

EHD 界面の運動

桑原真二

名古屋大学 工学部 応用物理学科

まず、G.I.Taylor の行なった 2、3 の実験の例を示す^{3,4)}。
球対称の電気ポテンシャルの解：

$$V = V_0 + AR^{\frac{1}{2}}P_{\frac{1}{2}}(\cos \theta) \quad (1)$$

を考える。ここで、 R, θ は球座標、 $P_{\frac{1}{2}}(\cos \theta)$ はルジャラン
ドルの関数、 V_0, A は定数である。そこで $V = V_0$ を満足
する角度 θ_0 とすれば、それは

$$P_{\frac{1}{2}}(\cos \theta_0) = 0, \quad (2)$$

を満たし、その解は $\theta_0 = 130.7099^\circ$ である。F i g . 1 は、
 $V = 0$ と $V = V_0$ を満たす軸対称形状の金属面の間に油を
入れ、 $V = V_0$ に対応する円錐の先端を削り落として平面と
し、そこに少量の水を添加した実験装置である。その金属
面間の電位差を変えて、界面の形状をしらべたのが F i g .
2 である。また、彼は F i g . 3 に示すような装置をも
ちいて、水と油の重力界面の EHD(Electro-Hydrodynamics)

を研究し、円錐状の高まりができることを示した (F i g. 3)。以上の実験を解析する手始めとして、簡単な2次元 E H D問題を考察する。

この論文では、縮まない2種の完全流体の一方を完全導体、他方を不導体とする E H Dを考える。簡単のために2種の流体の密度は等しいとし、2次元の問題に限るものとする。無限に広い空間で、内外に完全導体、不導体がある場合に、外部が導体の場合は電場は存在し得ないから興味が薄く、そこで内部が導体、外部が不導体の場合を考える。流体は静止から始まるとして、渦無しを仮定すると、速度ポテンシャル Φ が存在する。また外部には、電気ポテンシャル χ が存在すると仮定する。そこで、 Φ, χ は各々、外部領域1、内部領域2で

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 \chi = 0, \quad in \ 1 \quad (3)$$

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad in \ 2 \quad (4)$$

を満足し、領域1と領域2の界面における境界条件は次のようになる (F i g. 4)。

$$\frac{\partial \chi}{\partial s} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad} \Phi_1)^2 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} (\text{grad} \Phi_2)^2 \right] \\ - \frac{T_s}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial n} \right)^2 = K, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{n} \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \vec{t} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial s} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \right) \quad (8)$$

である。ここで ρ は密度、 T_s は表面張力係数、 R は曲率で、曲率中心が領域 2 に向いている時、正とする。 \vec{X} , \vec{n} , \vec{t} は界面の位置ベクトル、法線、接線ベクトル、 n, s は法線、接線方向の長さを表わす。

ここで、方程式と境界条件を無次元の形で表わすため、代表的長さ a 、速さ V 、電場 E_0 によって物理量を次のように無次元化する。

$$\vec{x}/a \longrightarrow \vec{x}, \quad t/(a/V) \longrightarrow t, \quad \vec{v}/V \longrightarrow \vec{v}, \quad \Phi/Va \longrightarrow \Phi,$$

$$\chi/E_0a \longrightarrow \chi, \quad R/a \longrightarrow R, \quad T_s/\rho a V^2 \longrightarrow T_s. \quad (9)$$

ここで、左辺は次元のある量、右辺は無次元量である。そこで、(3) ~ (8) は無次元形で

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad \nabla^2\chi = 0, \quad in \ 1 \quad (10)$$

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad in \ 2 \quad (11)$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial s} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \quad (13)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}(\text{grad}\Phi_1)^2 - \frac{\partial\Phi_2}{\partial t} - \frac{1}{2}(\text{grad}\Phi_2)^2$$

$$- \frac{T_s}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial n}\right)^2 = K, \quad (14)$$

$$\frac{\partial\vec{X}}{\partial t} = \vec{n}\frac{\partial\Phi}{\partial n} + \vec{t}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial s} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial s}\right) \quad (15)$$

と書き直すことができる。

ここで、EHDの問題を積分方程式の形で表わす。まず、基本解 $F(\vec{x}, \vec{x}')$:

$$\nabla^2 F(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^2(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (16)$$

$$F(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{2\pi} \log |\vec{x} - \vec{x}'|, \quad (17)$$

を定義する。境界 I で囲まれた内部領域 1 と境界 I, I で囲まれた環状領域 2 (Fig. 5) におけるグリーン
の定理 :

$$\iint (u' \nabla'^2 v' - v' \nabla'^2 u') d^2 \vec{x}' = \oint_I (u' \frac{\partial v'}{\partial n'} - v' \frac{\partial u'}{\partial n'}) ds', \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \iint_D (u' \nabla'^2 v' - v' \nabla'^2 u') d^2 \vec{x}' &= -\oint_I (u' \frac{\partial v'}{\partial n'} - v' \frac{\partial u'}{\partial n'}) ds' \\ &+ \oint_{II} (u' \frac{\partial v'}{\partial n'} - v' \frac{\partial u'}{\partial n'}) ds', \end{aligned} \quad (19)$$

を考える。ここで、 $u' = u(\vec{x}')$ 等である。さて、 $v' = F(\vec{x}', \vec{x})$

とおき、(18)に(3)を、(19)に(4)を適用する。 Φ_2 及び $F(\vec{x}, \vec{x}')$ の無限遠における振舞いから、境界 I I を無限遠にもっていった時に、 ϕ_{II} の寄与がなくなることがわかる。これらの積分表示において、 \vec{x} を各々領域 1、2 より境界 I に近づけた極限をとり、境界条件を適応すると、境界値に対する積分方程式がえられる。(10)、(11)からは各々次の方程式が得られる：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\chi(s) + \int \chi(s') \frac{\partial}{\partial n'} F(s', s) ds' \\ & - \int \frac{\partial}{\partial n'} \chi(s') F(s', s) ds' = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\Phi_1(s) + \int \Phi_1(s') \frac{\partial}{\partial n'} F(s', s) ds' \\ & - \int \frac{\partial}{\partial n'} \Phi_1(s') F(s', s) ds' = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{1}{2}\Phi_2(s) - \int \Phi_2(s') \frac{\partial}{\partial n'} F(s', s) ds'$$

$$+ \int \frac{\partial}{\partial n'} \Phi_2(s') F(s', s) ds' = 0, \quad (22)$$

ここで、 $\Phi_1(s)$ は Φ_1 の境界における極限值である。なお $\partial F(s', s)/\partial n'$ を含む積分はその主値をとるものとする。更に、変数の変換：

$$\Phi_+ = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2), \quad \Phi_- = \Phi_1 - \Phi_2, \quad (23)$$

を用い、境界条件 (12) ~ (15) (ただし (12) は、これと同等な $\chi = 0$)、を用いて基礎方程式をまとめると

$$\int \frac{\partial \chi'}{\partial n'} F(s', s) ds' = 0, \quad (24)$$

$$\frac{D\Phi_-}{Dt} + T_s \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{t}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial n} \right)^2 = K, \quad (25)$$

$$\Phi_+(s) + \int \Phi_-(s') \frac{\partial}{\partial n'} F(s', s) ds' = 0, \quad (26)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial n'} \Phi_+(s') F(s', s) ds' - \frac{1}{4} \Phi_-(s) + \int \Phi_-(s')$$

$$\int \frac{\partial}{\partial n'} F(s', s'') \frac{\partial}{\partial n''} F(s'', s) ds'' ds' = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{n} \frac{\partial \Phi_+}{\partial n} + \vec{t} \frac{\partial \Phi_+}{\partial s}, \quad (28)$$

となる。ここで、未知数は $\partial \chi / \partial n, \Phi_+, \Phi_-, \partial \Phi_+ / \partial n$ である。

境界を位置ベクトル：

$$\vec{x} = \vec{X}(s, t) = (X_1(s, t), X_2(s, t)) \quad (29)$$

で表わしたとき、境界の接線、法線、曲率は

$$\vec{t}(s, t) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial s}, \frac{\partial X_2}{\partial s} \right), \quad (30)$$

$$\vec{n}(s, t) = \left(\frac{\partial X_2}{\partial s}, -\frac{\partial X_1}{\partial s} \right), \quad (31)$$

$$\frac{1}{R(s, t)} = -\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{t}}{\partial s} = -\frac{\partial X_2}{\partial s} \frac{\partial^2 X_1}{\partial s^2} + \frac{\partial X_1}{\partial s} \frac{\partial^2 X_2}{\partial s^2}, \quad (32)$$

により計算できる。

つぎに、帯電した円筒状の導体の流体のまわりに、不導体の流体がある場合のEHDの問題を考える。軸の長さあたり Q の電荷をもつ無限に長い導体の円柱のまわりの電気ポテンシャル及び電場は

$$\chi = \frac{Q}{2\pi} \log r, \quad E_r = \frac{\partial \chi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}, \quad (33)$$

で表わされる。ここで、 r は円柱の軸からの半径である。円柱の半径を a としたときに、そこにおける電場の強さは

$$E_0 = \frac{Q}{2\pi a} \quad (34)$$

である。電場のエネルギーと運動のエネルギーを等置して、すなわち、 $\frac{1}{2}\epsilon E_0^2 = \frac{1}{2}\rho V^2$ から特性的速さ $V = \sqrt{\epsilon/\rho} E_0$ が得られる。そこで、 a, V, E_0 を代表的の長さ、速さ、電場にえらび、すべての量を無次元化する。

次に、境界の変形を半径1の円からの変位として表わし、境界の1点は対応する円の偏角 ϑ で表わす (F i g. 6):

$$X_1(\vartheta, t) = (1 + \delta r(\vartheta, t)) \cos \vartheta - \delta \theta(\vartheta, t) \sin \vartheta, \quad (35)$$

$$X_2(\vartheta, t) = \delta\theta(\vartheta, t) \cos \vartheta + (1 + \delta r(\vartheta, t)) \sin \vartheta. \quad (36)$$

これらを使って、接線、法線ベクトルは

$$\begin{aligned} \vec{t}(\vartheta, t) = \frac{1}{S} [& (-a_1 \sin \vartheta + a_2 \cos \vartheta) \vec{e}_1 + (a_1 \cos \vartheta \\ & + a_2 + a_2 \sin \vartheta) \vec{e}_2], \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \vec{n}(\vartheta, t) = \frac{1}{S} [& (a_1 \cos \vartheta + a_2 \sin \vartheta) \vec{e}_1 + (a_1 \sin \vartheta \\ & + a_2 - a_2 \cos \vartheta) \vec{e}_2], \end{aligned} \quad (38)$$

$$a_1(\vartheta, t) = 1 + \delta r(\vartheta, t) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \delta\theta(\vartheta, t), \quad (39)$$

$$a_2(\vartheta, t) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \delta\theta(\vartheta, t) - \delta\theta(\vartheta, t), \quad (40)$$

$$S = \frac{ds}{d\vartheta} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (41)$$

とおくと (24) ~ (28) は

$$\int \frac{\partial \chi'}{\partial n'} F(\vartheta', \vartheta) S(\vartheta') d\vartheta' = 0, \quad (42)$$

$$\frac{D\Phi_-}{Dt} + T_s \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{t}}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial n} \right)^2 = K, \quad (43)$$

$$\Phi_+(\vartheta) + \int \Phi_-(\vartheta') \frac{\partial}{\partial n'} F(\vartheta', \vartheta) S(\vartheta') d\vartheta' = 0, \quad (44)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial n'} \Phi_+(\vartheta') S(\vartheta') F(\vartheta', \vartheta) d\vartheta' - \frac{1}{4} \Phi_-(\vartheta) + \int \Phi_-(\vartheta')$$

$$\int \frac{\partial}{\partial n'} F(\vartheta', \vartheta'') \frac{\partial}{\partial n''} F(\vartheta'', \vartheta) S(\vartheta'') d\vartheta'' S(\vartheta') d\vartheta' = 0, \quad (45)$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}(\vartheta, t) = \vec{n} \frac{\partial \Phi_+}{\partial n} + \vec{t} \frac{\partial \Phi_+}{\partial s}, \quad (46)$$

となる。

ここで、線形の安定性をしらべる。円からの変形が小さいとし、

$$r = 1 + \delta r, \quad \delta \theta = 0,$$

$$\chi = \log r + \delta \chi, \quad \Phi_+ = \delta \Phi_+, \quad \Phi_- = \delta \Phi_-,$$

$$\delta r = \delta \hat{r} e^{\sigma t + i m \vartheta}, \text{ etc.} \quad (47)$$

とおけば、(42) ~ (46) は

$$\delta r + I_m \delta \chi = 0, \quad (48)$$

$$(T_s(m^2 - 1) + 1) \delta r - \sigma \delta \Phi_- - \delta \chi_n = 0, \quad (49)$$

$$\delta \Phi_+ = 0, \quad (50)$$

$$\delta \Phi_- - 2I_m \delta \Phi_n = 0, \quad (51)$$

$$\sigma \delta r - \delta \Phi_n = 0, \quad (52)$$

となる。この特性方程式を解いて分散公式を求めれば

$$\sigma^2 = -\frac{1}{2I_m} \left[-\frac{1}{I_m} - 1 - T_s(m^2 - 1) \right], \quad (53)$$

$$I_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \log(1 - \cos \varphi) d\varphi, \quad (54)$$

をうる。

更にここで、偏微分方程式 (10)、(11)、境界条件 (12) ~ (14) 及び運動学的条件

$$\frac{DF}{Dt} = 0, \quad F = r - (1 + \delta r), \quad (55)$$

を用い、

$$\chi = \log r + \delta\chi, \quad \Phi_1 = \delta\Phi_1, \quad \Phi_2 = \delta\Phi_2,$$

$$\delta\chi = \delta\chi_1(r) e^{\sigma t + im\theta}, \text{ etc.}, \quad (56)$$

とにおいて (10)、(11) に代入すれば

$$\frac{d^2}{dr^2}\delta\chi_1 + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\delta\chi_1 - \frac{m^2}{r^2}\delta\chi_1 = 0, \text{ etc.}, \quad (57)$$

がえられ、無限遠または中心における境界条件を用いて

$$\delta\chi = \delta\hat{\chi}r^{-m}e^{\sigma t + im\theta},$$

$$\delta\Phi_1 = \delta\hat{\Phi}_1r^{-m}e^{\sigma t + im\theta},$$

$$\delta\Phi_2 = \delta\hat{\Phi}_2r^me^{\sigma t + im\theta},$$

$$\delta r = \delta\hat{r}e^{\sigma t + im\theta}, \quad (58)$$

を得る。 $\delta\hat{\chi}$ 等は定数である。界面の境界条件 (13) ~ (15) 及び (55) から

$$\delta\hat{r} + \delta\hat{\chi} = 0, \quad (59)$$

$$(T_s(m^2 - 1) + 1)\delta\hat{r} - \sigma\delta\hat{\Phi}_1 + \sigma\delta\hat{\Phi}_2 + m\delta\hat{\chi} = 0, \quad (60)$$

$$\delta\hat{r} + m\delta\hat{\Phi}_1 = 0, \quad (61)$$

$$\delta\hat{\Phi}_1 - \delta\hat{\Phi}_2 = 0, \quad (62)$$

が得られる。この特性特性方程式を解いて、分散公式：

$$\sigma^2 = \frac{m}{2}[m - 1 - T_s(m^2 - 1)] \quad (63)$$

を得ることができる。(54)と(62)とを比較して

$$I_m = -\frac{1}{m}, \quad (64)$$

となると考えられるが、その証明は中沢宏（京大）氏からいただいた。

参考文献：

- 1) 天谷澄：電氣流体力学的界面の運動、名古屋大学工学部応用物理修士論文（1990）
- 2) 今井功：電磁気学を考える（サイエンス社,1989）.

- 3) Taylor, G.I.: Proc. Roy. Soc. London A280(1964)383-397.
4) Taylor, G.I.: JFM 22(1965)1-15.

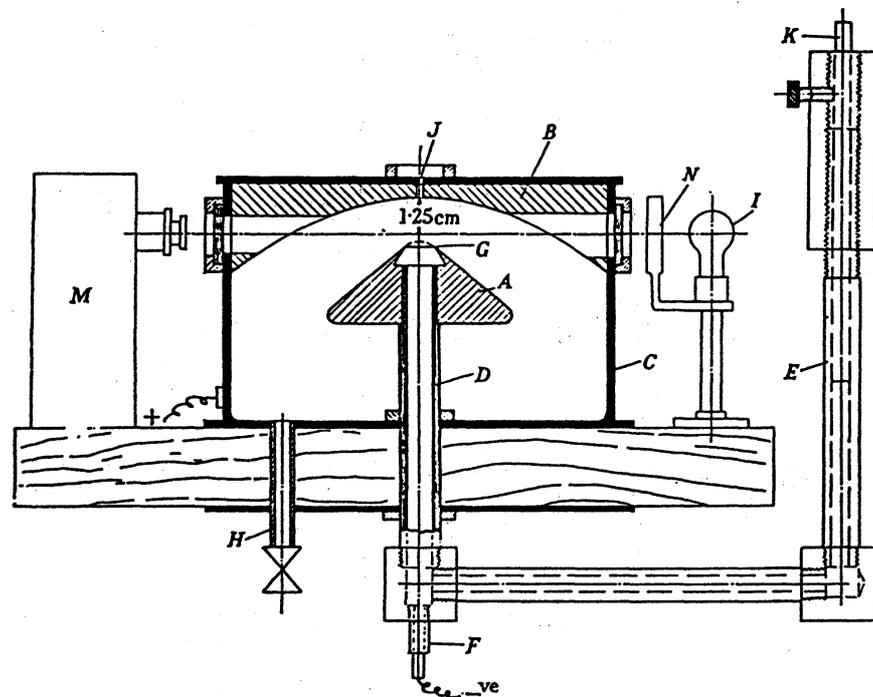


Fig.1. Chamber for producing field necessary for conical interface.

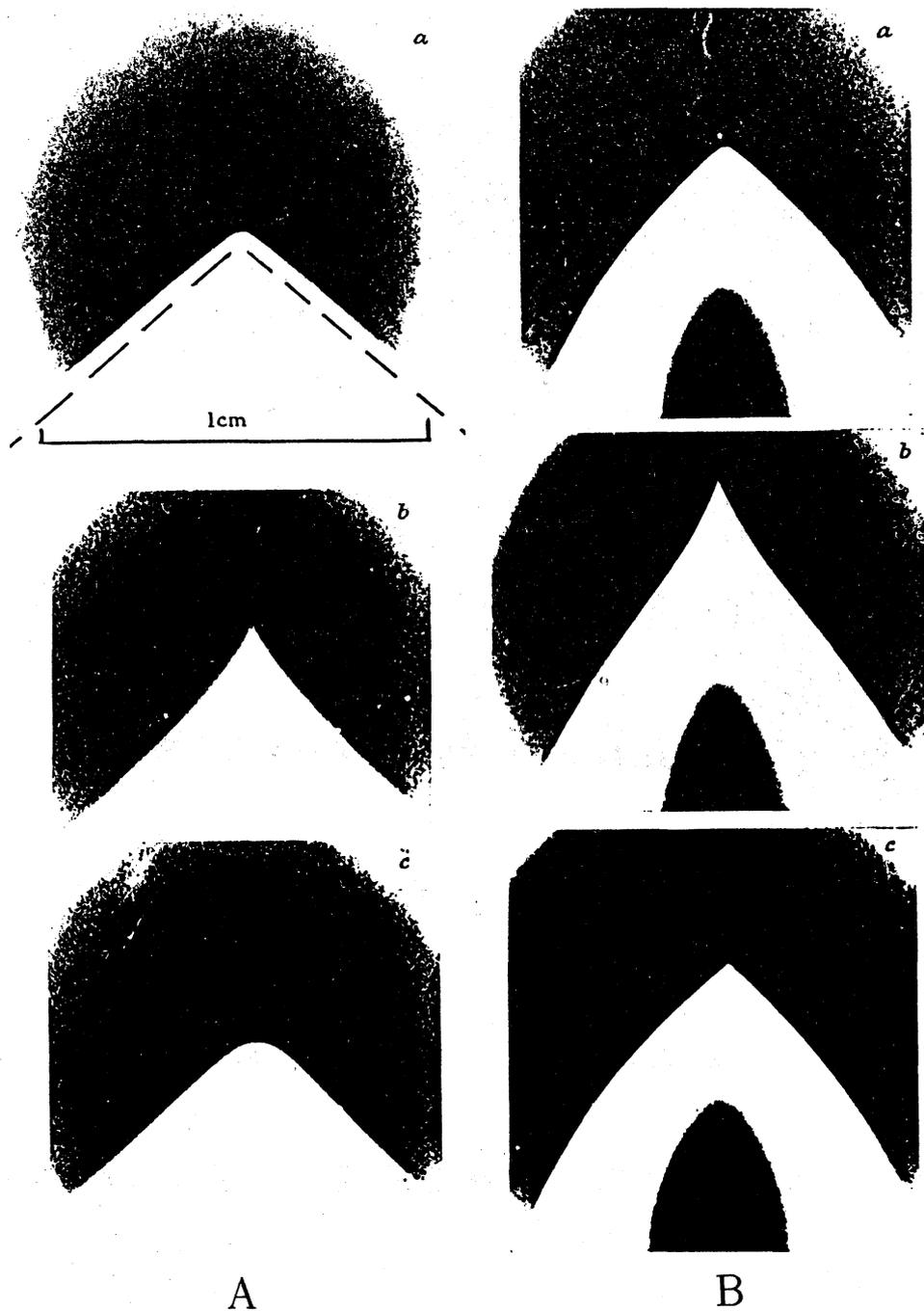
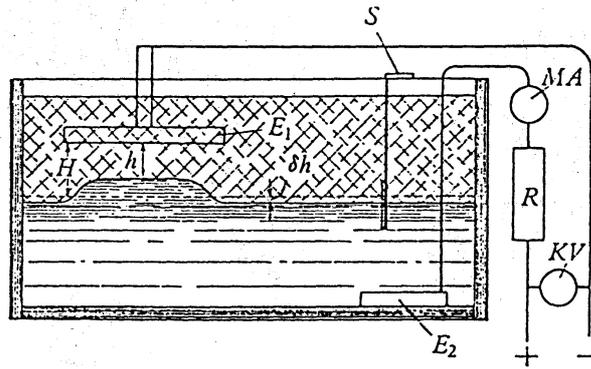
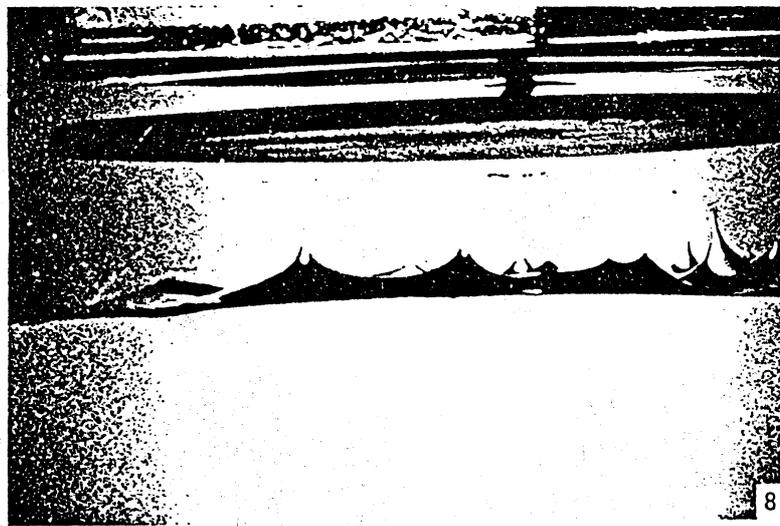


Fig.2. A: Oil/water interface. Three successive frames (1.6 msec. exposures) at intervals of $1/64$ sec. (a) Before jet injection; (b) jet forms; (c) subsequent collapse. Broken lines at 98.6° (negative photo). B: Oil/water interface when initial volume was in excess of requirement for 49.3° cone, (a) Before jet forms; (b) jet forms; (c) after jet has become detached and broken up.



Apparatus.



Oil/water interface when $h_0 = 2.62\text{cm}$ and $V_0 = 17.7\text{kV}$.

Fig.3. 上下に置かれた、正負に帯電した平板間の油と水の界面。

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad \nabla^2\chi = 0, \quad \text{in } 1$$

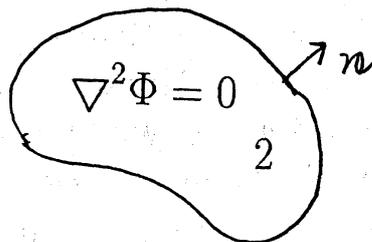


Fig.4.

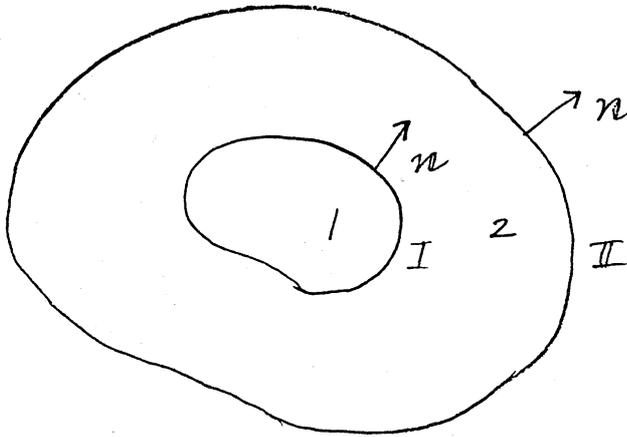


Fig.5.

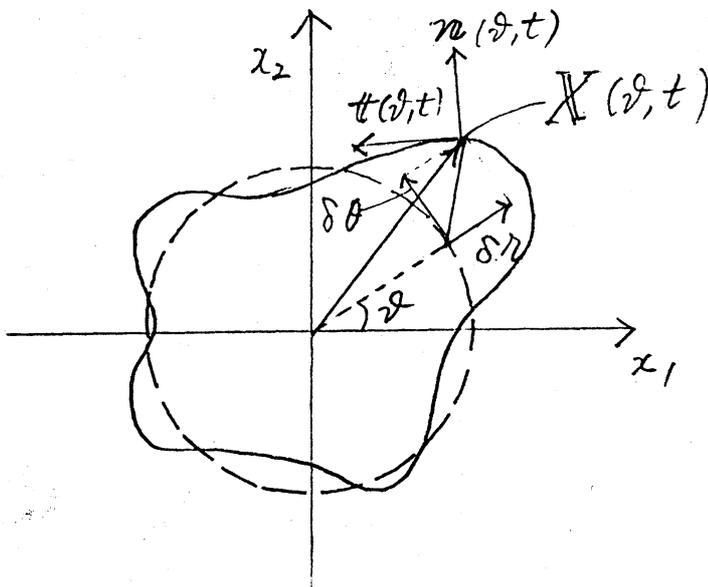


Fig.6.