

単純楕円型特異点の Symplectic Quotient としての構成

京大数理研 八尋 親雄
(Chikao Yahiro)

Kronheimer は、1986 年に、2次元単純特異点 (= 有理二重点) と、その semi-universal deformation を微分幾何でいう Hyper-Kähler Quotient の方法を用いて構成した。

2次元単純特異点は、Klein 群 K によって、 \mathbb{C}^2/K なる商特異点として実現される。Kronheimer は、 K の群環から出発して、Hyper-Kähler 構造をもつ Affine 空間を定義し、その Hyper-Kähler Quotient として、 \mathbb{C}^2/K 及びその semi-universal deformation を得たのである。

一方、単純楕円型特異点と呼ばれる、2次元の孤立特異点が、斎藤恭司氏によって発見されている。

これは特異点の Hierarchy でいうと、単純特異点の次の族として位置するものであり、離散 Heisenberg 群 (但し、この群は無限群) による Quotient としてあらわせる。

この小論では、単純楕円特異点に対して、Kronheimerの構成の *analogy* を考える。

すなわち、離散 Heisenberg 群から出発して、ある Symplectic 空間（幾何的には、接続の空間）と、その上に act する群作用（幾何的には、ゲージ群作用）を定義し、その Symplectic Quotient として、単純楕円型特異点があられることを示す。

<u>目次</u>	§1. Kronheimer 理論の概略
	§2. 離散 Heisenberg 群と、単純楕円型特異点
	§3. 接続の空間の構成と、主定理
	§4. 証明
	§5. 注意

§1. Kronheimer 理論の概略

Klein 群 K をとる。これは $SU(2)$ （特殊ユニタリ群）の離散部分群であるので、自然な 2次元表現 $\rho: K \curvearrowright \mathbb{C}^2$ をもつ。この時 $\mathbb{C}^2/\rho(K)$ が単純特異点である。

群 K の複素数体 \mathbb{C} 上の群環 $\mathbb{C}[K]$ を考える。 K は $\mathbb{C}[K]$ に正則表現 R で作用する。 $R: K \curvearrowright \mathbb{C}[K]$.

表現の tensor 積 $\rho \otimes \text{Ad} R: K \curvearrowright \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \text{End}(\mathbb{C}[K])$ を考え.

$$M := \left\{ \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \text{End}(\mathbb{C}[K]) \right\}^{(K, \rho \otimes \text{Ad} R)} \quad (\text{不動点集合})$$

とおく。 \mathbb{C}^2 と四元数体の同一視. 及び $\mathbb{C}[K]$ 上の Hermitian 内積を固定することによって. M 上に Hyper-Kähler 構造を定義できる。

$$G := \mathcal{U}(\mathbb{C}[K])^{(K, \text{Ad} R)} \quad (\text{正則表現と可換なユ=タリ変換})$$

とおくと. G は adjoint 作用として M に働くが. M の Hyper-Kähler 構造を保存する。

故に. moment 写像 $\mu = (\mu_I, \mu_J, \mu_K): M \rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{g}^*$ が考えられる。このとき.

定理 (Kronheimer)

$$(1) \quad \mu^{-1}(0)/G \cong \mathbb{C}^2/K$$

(2) \mathfrak{g}^* には. G が coadjoint-action で作用する
 $\mathfrak{f} := (\mathfrak{g}^*)^{(G, \text{coad})}$ (不動点集合) とおくと.

$$\mu^{-1}(\mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{f})/G \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{f} \quad \text{なる fibration}$$

が得られるが. これは. 単純特異点 \mathbb{C}^2/K の

semi-universal deformation. 及び. その

simultaneous-resolution になっている。

§2. 離散Heisenberg群と

単純楕円型特異点

2-1 離散Heisenberg群

$P \in \mathbb{Z}$ とする。index P の離散Heisenberg群 H_P を、次のような 3×3 行列のなす群として定義する。

$$H_P := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m_3 & \frac{m_1}{P} \\ & 1 & m_2 \\ & & 1 \end{pmatrix} : m_j \in \mathbb{Z} \right. \\ \left. (j=1,2,3) \right\}$$

簡単のため、上の行列を $\bar{m} = [m_1, m_2, m_3]$ とかくと、

群の乗法は、 $[m_1, m_2, m_3] \cdot [m'_1, m'_2, m'_3]$

$$= [m_1 + m'_1 + P m_3 m'_2, m_2 + m'_2, m_3 + m'_3]$$

H_P の中心は $\{ [m_1, 0, 0] : m_1 \in \mathbb{Z} \}$ であり、

$N := \{ [m_1, m_2, 0] : m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \}$ は H_P の極大な可換部分群である。

2-2 単純楕円型特異点

楕円曲線 $E_\tau := \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ ($\tau \in \mathbb{H}$: 上半平面) とする。

E_τ 上の、正則 line bundle で Chern 数 $= P$ なるもの L_P を考える。 P が負整数のとき、零切断を blow-down した L_P/E_τ は 2次元正規特異点。特に $P = -1, -2, -3$ の時は単純楕円型特異点と呼ばれ、3変数多項式による曲面の $(0) = (0, 0, 0)$ における特異点として実現できる。

$P = -1$ のとき、 $x^2 - 4y^3 + g_2 y z^4 + g_3 z^6 \quad \tilde{E}_8\text{-type}$

$$P = -2 \text{ のとき, } X^2 - 4Y^3Z + g_2 \cdot YZ^3 + g_3 \cdot Z^4 \quad \widetilde{E}_7\text{-type}$$

$$P = -3 \text{ のとき, } ZX^2 - 4Y^3 + g_2 \cdot YZ^2 + g_3 \cdot Z^3 \quad \widetilde{E}_6\text{-type}$$

但し, $g_2 = g_2(\tau), g_3 = g_3(\tau)$

2-3 離散 Heisenberg 群 H_P による

単純楕円型特異点の構成

H_P の 4次元線型表現 ρ を次で定義する。

$$\mathbb{C}^4 \ni \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho_{\bar{m}}} \begin{pmatrix} 1 & m_3 & \frac{-m_3^2}{2} & \frac{-m_1}{P} \\ & 1 & -m_3 & -m_2 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

for $\bar{m} = [m_1, m_2, m_3] \in H_P$

射影 $\pi: \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ は作用 ρ によって

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ t(X_1, X_2, X_3, X_4) & \longmapsto & t(X_3, X_4) \end{matrix} \quad \text{不変に保たれる。}$$

$\tau \in \mathbb{H}$ (複素上半平面) をとり, Affine 部分空間 $\pi^{-1}(\tau, 1) \subset \mathbb{C}^4$ を考えると, H_P は $\pi^{-1}(\tau, 1)$ 上に作用する。このとき,

FACT (斎藤恭司)

商空間 $\pi^{-1}(\tau, 1)/H_P$ は単純楕円型特異点である。

つまり, 次の複素解析空間としての同型が成り立つ。

$$\pi^{-1}(\tau, 1)/H_P \cong X_{P, \tau} \setminus (0) \quad (P = -1, -2, -3)$$

但し, 上の $X_{P, \tau}$ は $P = -1, -2, -3$ に応じて, $\widetilde{E}_8, \widetilde{E}_7, \widetilde{E}_6$ -type の, modulous τ をもつ, 単純楕円型特異点。

§3. 接続の空間の構成と主定理

概要 2次元 torus 上の無限次元 vect. bdl を考える。
 その bdl の切断の空間に、離散 Heisenberg 群 H_p の作用を定義し、bdl の接続で、 H_p 作用-擬不変なもののみを空間を考える。
 H_p -擬不変接続の空間は、Symplectic 構造をもち、 H_p -不変ゲージ群が Symplectic 構造を保って作用している。その Symplectic Quotient は、 H_p -擬不変 flat 接続の、 H_p -不変ゲージ群による同値類空間である。我々はこの空間に着目する。

ここでは、接続に、更に、正規性の条件をつけ、ゲージ群をユニタリーゲージ群に制限したものを考えた時、得られる同値類の空間は、単純楕円型特異点と同型になることを示す。

3-1 H_p -擬不変接続の空間 $M_{\tau, p}$ の構成 (p : 負整数)

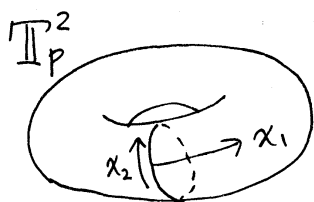
• 2次元 torus $\mathbb{T}_p^2 := \mathbb{R}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni [x_1, x_2]$

$u_1 = \exp(2\pi\sqrt{-1}\frac{x_1}{p})$, $u_2 = \exp(2\pi\sqrt{-1}x_2)$ とおく。

(ここで片方の変数 x_1 について $p\mathbb{Z}$ で割るのは
 (すでに定義した H_p の表現 ρ との斉合性のため)

• Dehn twist $T: \mathbb{T}_p^2 \longrightarrow \mathbb{T}_p^2$

$[x_1, x_2] \longmapsto [x_1, x_1 + x_2]$



T は x_2 方向の cycle に沿って

角度 $2\pi p$ の Dehn twist である。

• $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni [x_3]$ $u_3 = e^{2\pi i x_3}$ とおく。

Hilbert 空間 $L^2(S^1) = \{ S^1 \text{ 上の 2乗可積分関数} \}$ を fibre とする。 \mathbb{T}_p^2 上の自明な bundle $\mathbb{T}_p^2 \times L^2(S^1) \rightarrow \mathbb{T}_p^2$ を考える

定義 $\Gamma := \left\{ \begin{array}{l} \text{Hilbert bundle } \mathbb{T}_p^2 \times L^2(S^1) \rightarrow \mathbb{T}_p^2 \\ \text{の } L^2\text{-切断} \end{array} \right\}$

• Γ は自然に Hilbert 空間になる。

• $S \in \Gamma$ は $S(x_1, x_2) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} S_m(x_1, x_2) \cdot u_3^m$
ここで $S_m \in L^2(\mathbb{T}_p^2)$ と展開でき。

このとき、 S の norm $\|S\|$ は

$$\|S\|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \|S_m\|_{L^2(\mathbb{T}_p^2)}^2$$

• $C(\mathbb{T}_p^2) = \{ \mathbb{T}_p^2 \text{ 上の連続 } (\mathbb{C}\text{-値}) \text{ 関数} \}$ とすると

$C(\mathbb{T}_p^2)$ は 関数倍として、 Γ に作用する。

これにより、 Γ を左 $C(\mathbb{T}_p^2)$ -module とみる。

定義 離散 Heisenberg 群 H_p の、 Γ の作用 R 。

$$\begin{array}{ccc} H_p & \curvearrowright & \Gamma \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{\ell} = [\ell_1, \ell_2, \ell_3] & & S = \sum_m S_m \cdot u_3^m \quad (S_m \in L^2(\mathbb{T}_p^2)) \end{array}$$

$$R_{\bar{\ell}}(S) := u_1^{\ell_1} u_2^{\ell_2} \cdot \sum_m (T^{*\ell_3} S_m) \cdot u_3^{\ell_3 + m}$$

ここで、 T^* は Dehn twist T による関数のひきもとし。

$$(T^{*\ell_3} S_m)(x_1, x_2) = S_m(x_1, x_1 \ell_3 + x_2)$$

注意 H_p の極大可換部分群 $N = \{ [l_1, l_2, 0] \mid l_j \in \mathbb{Z} \}$
 は作用 R により, "函数倍" として働く。

次に Γ 上の linear operator で, H_p 作用 R と可換なもの
 のなる集合を決定する。

$$\mathcal{L}(\Gamma) := \{ \Gamma \text{ 上の linear operator} \}$$

$$E_p := \mathcal{L}(\Gamma)^{(H_p, \text{Ad} R)} : H_p \text{ 作用 } R \text{ と可換な} \\ \text{lin. op. 全体。と置く。}$$

FACT $\forall \alpha \in E_p$ に対して, \mathbb{T}_p^2 上の函数の系列,

$$\{ a_\ell = a_\ell(x_1, x_2) \}_{\ell \in \mathbb{Z}} \text{ が一意的に決まり,}$$

$$S = \sum_m S_m \cdot U_3^m \in \Gamma \text{ に対して,}$$

$$\alpha(S) = \sum_{\ell, m} (T^{*m} a_\ell) \cdot S_m \cdot U_3^{m+\ell} \text{ となる。}$$

上の $\alpha \in E_p$ と $\{ a_\ell = a_\ell(x_1, x_2) \}_{\ell \in \mathbb{Z}}$ の対応を,

$$\alpha \equiv \{ a_\ell(x_1, x_2) \}_{\ell \in \mathbb{Z}} \text{ と書く}$$

定義 "trace map" tr

$$\text{tr} : E_p \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\alpha \longmapsto \int_0^p dx_1 \cdot \int_0^1 dx_2 a_0(x_1, x_2) \text{ と定義すると.}$$

$$\text{但し, } \alpha \equiv \{ a_\ell(x_1, x_2) \}_{\ell \in \mathbb{Z}}$$

- $\alpha, \alpha' \in E_p$ で, 合成 operator $\alpha \circ \alpha', \alpha' \circ \alpha$ が考えられる
 ならば, $\text{tr}(\alpha \circ \alpha') = \text{tr}(\alpha' \circ \alpha)$

表現の tensor 積. $\rho \otimes \text{Ad} R : H_p \curvearrowright \mathbb{C}^4 \otimes \mathcal{L}(\Gamma)$

$$\begin{array}{c}
 H_p \\
 \downarrow \\
 \bar{l} = [l_1, l_2, l_3]
 \end{array}
 \curvearrowright
 \mathbb{C}^4 \otimes \mathcal{L}(\Gamma)$$

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & l_3 & \frac{-l_3^2}{2} & \frac{-l_1}{p} \\ & 1 & -l_3 & -l_2 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_e \circ B_1 \circ R_e^{-1} \\ R_e \circ B_2 \circ R_e^{-1} \\ R_e \circ B_3 \circ R_e^{-1} \\ R_e \circ B_4 \circ R_e^{-1} \end{pmatrix}$$

射影 $\pi \otimes I : \mathbb{C}^4 \otimes \mathcal{L}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{L}(\Gamma)$

$${}^t(B_1, B_2, B_3, B_4) \longmapsto {}^t(B_3, B_4) \quad \text{を考えると}$$

$\tau \in \mathbb{H}$ (複素上半平面) をとり, Affine 部分空間

$(\pi \otimes I)^{-1}(-2\pi\sqrt{\tau}I, -2\pi\sqrt{\tau}I) \subset \mathbb{C}^4 \otimes \mathcal{L}(\Gamma)$ を考えると,

H_p はこの Affine 部分空間上に作用している。

定義 $M_{\tau, p} := \left\{ (\pi \otimes I)^{-1}(-2\pi\sqrt{\tau}I, -2\pi\sqrt{\tau}I) \right\}^{(H_p, \rho \otimes \text{Ad} R)}$
(不動点集合)

• $M_{\tau, p}$ の元は, $\text{bdle } \mathbb{T}_p^2 \times L^2(S^1) \rightarrow \mathbb{T}_p^2$ の接続
つまり, $(B_1, B_2) \in M_{\tau, p}$ なるは

$S \in \Gamma$, $f = f(x_1, x_2) \in C^1(\mathbb{T}_p^2)$ (C^1 級函数)

$$\text{に対して, } B_j(f \cdot S) = \frac{\partial}{\partial x_j} f \cdot S + f \cdot B_j(S)$$

($j=1, 2$) となる。

よって, $M_{\tau, p}$ の元は, $\text{bdle } \mathbb{T}_p^2 \times L^2(S^1) \rightarrow \mathbb{T}_p^2$ の接続で
あって, 更に, H_p の作用に関して, ある種の変換性
(擬不変性) を持つものである。

FACT $M_{\tau, p}$ は. 次のような集合である。

$$M_{\tau, p} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2 \right) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{L}(\Gamma) \\ A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\Gamma)^{(N, \text{Ad}R)} : \mathbb{C}(\mathbb{T}_p^2)\text{-linear operator} \\ \text{であつて. 更に. 次のような形をしている。} \\ \begin{cases} A_1 = \frac{-\tau}{2} \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau}} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2 + \alpha_2 \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) + 2\pi\sqrt{\tau} \alpha_1 \\ A_2 = \phantom{\frac{-\tau}{2} \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau}} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2} -\tau \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) + 2\pi\sqrt{\tau} \alpha_2 \end{cases} \\ \text{但し. } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{E}_p \end{array} \right.$$

注意 Γ の元 S を $S = \sum_{m \in \mathbb{Z}} S_m(u_1, u_2) \cdot u_3^m$ と表す。

$\{u_3^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ を基として. $\frac{\partial}{\partial x_3}, \alpha_j \equiv \{a_{\ell}^{(j)}(x_1, x_2)\}_{\ell \in \mathbb{Z}}$ は次のような " $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -行列" として表示できる。

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} < n$$

\hat{n} (対角行列)

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} < n$$

\hat{n}

3-2 空間 $M_{\tau,p}$ 上の Symplectic 構造.

Affine 部分空間 $M_{\tau,p} \subset \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{L}(\Gamma)$ に付随する vector 部分空間を $W_p \subset \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{L}(\Gamma)$ とすると.

$$W_p = \left\{ \begin{array}{l} (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{L}(\Gamma) \\ \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \alpha_2 \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) + 2\pi\sqrt{-1}\alpha_1 \\ v_2 = 2\pi\sqrt{-1}\alpha_2 \end{array} \right. \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{E}_p) \end{array} \right\}$$

$(v_1, v_2), (v_1', v_2') \in W_p$ とすると

$$v_1 \circ v_2' - v_2 \circ v_1' \in \mathcal{E}_p \text{ となる}$$

定義 W_p 上の Symplectic form $\omega_{\mathbb{C}}$ を次で定義する。

$$\omega_{\mathbb{C}} : W_p \times W_p \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\omega_{\mathbb{C}}((v_1, v_2), (v_1', v_2')) := \text{tr}(v_1 \circ v_2' - v_2 \circ v_1')$$

• $\omega_{\mathbb{C}}$ は skew, \mathbb{C} -bilinear で非退化。

よって, $\omega_{\mathbb{C}}$ は Affine space $M_{\tau,p}$ 上の Symplectic 構造を定義する。

3-3 Symplectic 作用と主定理

$$\text{ob}(\Gamma) := \{ \Gamma \text{ 上の有界 linear operator} \}$$

$$\text{ob}(\Gamma)^{\times} := \left\{ \begin{array}{l} \text{ob}(\Gamma) \text{ の元で可逆、更に逆作用素} \\ \text{もまた、ob}(\Gamma) \text{ の元となるもの} \end{array} \right\}$$

$$\{ \text{ob}(\Gamma)^{\times} \}^{(H_p, \text{Ad}R)} : H_p\text{-作用 } R \text{ と可換な、ob}(\Gamma)^{\times} \text{ の元全体}$$

これは $M_{\tau,p}$ に adjoint として作用する。

$$M_{\tau,p} \ni (B_1, B_2) \longmapsto (g \circ B_1 \circ g^{-1}, g \circ B_2 \circ g^{-1}) \in M_{\tau,p}$$

但し. $g \in \{ \mathcal{G}(\Gamma)^{\times} \}^{(H_p, AdR)}$

この作用は. $bdk \mathbb{T}_p^2 \times L^2(S^1) \rightarrow \mathbb{T}_p^2$ に対する $(H_p$ -作用 R で不変な) ゲージ変換である. これは $\boxed{3-2}$ で定義した $M_{\tau,p}$ 上の Symplectic 構造を保存し. moment map は $\mu_c(B_1, B_2) = [B_1, B_2]$ (曲率)

この時の Symplectic Quotient を考えよう.

我々は. $(B_1, B_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2 \right) \in M_{\tau,p}$ に対して.

- ①. linear operator としての正規性
- ② \mathbb{T}_p^2 の函数としての微分可能性 (C^2 -級) を要請し. ゲージ群についても次のことを要請する.

① unitary operator である

② \mathbb{T}_p^2 の函数としての微分可能性 (C^3 -級)

つまり. $M'_{\tau,p} \subset M_{\tau,p}$ (部分集合)

$G_{\tau,p} \subset \{ \mathcal{G}(\Gamma)^{\times} \}^{(H_p, AdR)}$ を次のように定義

$$M'_{\tau,p} := \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2 \right) \in C^2 \otimes \mathcal{L}(\Gamma) \\ \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{-\tau}{2} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2 + \alpha_2 \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) + 2\pi\sqrt{-1} \alpha_1 \\ A_2 = \quad \quad \quad -\tau \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) + 2\pi\sqrt{-1} \alpha_2 \end{array} \right. \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{E}_p \text{ に対して. } \alpha_j \equiv \left\{ a_e^{(j)}(x_1, x_2) \right\}_{e \in \mathbb{Z}} \\ \text{とする. } a_e^{(j)} \in C^2(\mathbb{T}_p^2) \text{ (} C^2\text{-級) 7" } \\ \sum_e \sup_{x \in \mathbb{T}_p^2} |a_e^{(j)}(x)| < \infty \quad (j=1,2) \\ \sum_e \sup_{x \in \mathbb{T}_p^2} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} a_e^{(j)}(x) \right| < \infty \quad (k=1,2) \end{array} \right.$$

§4. 主定理の証明

概略 $F_{\tau, p}$ の元 $(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2)$ をとる。

これは Hilbert bundle $\mathbb{T}_p^2 \times L^2(S^1) \rightarrow \mathbb{T}_p^2$ 上の flat な接続である。この接続に関する平行移動の微分方程式を考えると、($L^2(S^1)$ -valued の) 熱方程式型の発展方程式となっている。発展方程式の理論を使うと、この方程式は解ける。つまり解の基本系 (= 発展作用素) が存在する。

特に, torus \mathbb{T}_p^2 の homology cycle に関する holonomy operator が存在し、共通固有ベクトルをもつ。この事実を使うと、 Γ の正規直交基底で、 $\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2$ を同時対角化するものの存在がいえ。この時対角成分は、ある元 $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ の H_p 作用による orbit となっている

このことは主定理が成立していることを示す。

4-1 平行移動の方程式と Holonomy 作用素

$(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2) \in F_{\tau, p}$ をとる。

$$A_x(t) := x_1 \cdot A_1(xt) + x_2 \cdot A_2(xt) \quad (x = (x_1, x_2))$$

とよくと、 $A_x(t)$ は parameter $x \in \mathbb{R}^2$ と、時間 $t \in [0, 2]$ に対して決まる $L^2(S^1)$ 上の閉作用素である。

但し、 $A_x(t)$ は $L^2(S^1)$ 上非有界で、定義域 $\text{Dom}(A_x(t))$ は

$$\text{Dom}(A_x(t)) = H^2(S^1) := \left\{ \begin{array}{l} L^2\text{-sense 7" 2階可微分} \\ \text{な } S^1 \text{ 上の函数} \end{array} \right\}$$

ソボレフ空間.

$A_x(t)$ を具体的に書くと.

$$\begin{aligned} A_x(t) &= \kappa_1 \frac{\tau}{2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2 \\ &\quad + \{ \kappa_1 \cdot \alpha_2(t, x) - \kappa_2 \tau \} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ &\quad + 2\pi\sqrt{1} \{ \kappa_1 \cdot \alpha_1(t, x) + \kappa_2 \cdot \alpha_2(t, x) \} \end{aligned}$$

$L^2(S^1)$ -valued 発展方程式

$$\frac{d}{dt} y = A_x(t) \cdot y \quad \text{-----} (*)$$

$y: [0, 2] \rightarrow L^2(S^1)$ を考える。

次のFACTが Key である。

FACT 1 発展方程式(*)は、 $\kappa_1 < 0$ のとき、

C^2 -級の発展作用素をもつ。

すなわち、 $2 \geq t \geq s \geq 0$ に対して、 $U_x(t, s) \in \mathcal{B}(L^2(S^1))$

が決まり、次の①~④をみたす。

$$\textcircled{1} \left\{ (t, s) \in [0, 2]^2 : t \geq s \right\} \longrightarrow \mathcal{B}(L^2(S^1))$$

$$\quad \quad \quad \downarrow$$

$$\quad \quad \quad (t, s) \longmapsto U_x(t, s)$$

は強連続

$$\textcircled{2} U_x(t, s) \circ U_x(s, r) = U_x(t, r) \quad (t \geq s \geq r)$$

$$U_x(t, t) = I_{L^2(S^1)}$$

③ $V_x(t, s)$ は t について、強連続的微分可能で

$$\frac{\partial}{\partial t} V_x(t, s) = A_x(t) \cdot V_x(t, s)$$

④ $V_x(t, s)$ は s について、強連続的微分可能で

$$\frac{\partial}{\partial s} V_x(t, s) = -V_x(t, s) \cdot A_x(s)$$

FACT 1 の証明

$\chi_1 < 0$ のとき、 $A_x(t)$ の最高階の微分 $(\frac{\partial}{\partial x_3})^2$ の係数

$\chi_1 \frac{-i}{2} \frac{1}{2\pi i}$ は $\operatorname{Re}(\chi_1 \frac{-i}{2} \frac{1}{2\pi i}) > 0$ をみたすので

(*) は熱方程式 type の発展方程式である。

$\operatorname{Arg}(\chi_1 \frac{-i}{2} \frac{1}{2\pi i}) = \theta$ とする。 $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ 次のことがいえる

(I) $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in \mathbb{R}, \exists M_\varepsilon > 0$

s.t. (i) $\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}(\lambda - a_\varepsilon)| < \pi - |\theta| - \varepsilon \}$

は $A_x(t)$ の Resolvent set に含まれる
 $\forall t \in [0, 2]$

(ii) $\| (\lambda - A_x(t))^{-1} \|_{\mathcal{B}(L^2(S^1))} \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}$

for all $\lambda \in \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}(\lambda - a_\varepsilon)| < \pi - |\theta| - \varepsilon \}$
 $t \in [0, 2]$

(II) 実数 λ_0 (充分大) を適当にとると、 $\exists N > 0, \exists \theta > 0$

s.t. $\| (\lambda_0 - A_x(t)) \cdot (\lambda_0 - A_x(s))^{-1} - I \|_{\mathcal{B}(L^2(S^1))}$
 $\leq N \cdot |t - s|^{\theta+1}$

for all $t, s \in [0, 2]$

(I). (II) の証明には, $\alpha_j \equiv \{a_e^{(j)}(x_1, x_2)\}$ とした時の $a_e^{(j)}(x_1, x_2)$ たちの smooth 性を使う。

Tanabe によつて, (I). (II) から FACT 1 が従う。

FACT 2 $\left. \begin{array}{l} C_1 := U_{(p,0)}(1,0) \\ C_2 := U_{(p,1)}(1,0) \end{array} \right\}$ とおくと。

- ① C_1, C_2 は $L^2(S')$ 上の cpt operator
- ② C_1 と C_2 は可換である
- ③ C_1, C_2 とともに正規 operator である。

FACT 2 の証明

① は, 熱方程式型 (= 放物型) 発展方程式の発展作用素であるから, ② は, $[\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2] = 0$, つまり接続が flat だから, Holonomy は基本群の表現になるという有限次元のときの事実の証明のまねをする。

③ は, $\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j$ が正規 operator であるから,

$$A_x(t) \text{ が } \frac{d}{dt}(A_x(t) + A_x(t)^*) = [A_x(t), A_x(t)^*]$$

をみたすので, これから従う。

FACT 3 $\begin{array}{l} U_{(x_1+p, x_2)}(1,0) = U_{(x_1, x_2)}(1,0) \circ C_1 \\ U_{(x_1+p, x_2+1)}(1,0) = U_{(x_1, x_2)}(1,0) \circ C_2 \end{array}$

FACT 3 の証明

$[\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2] = 0$ より, $\frac{\partial}{\partial x_j} U_x(1,0) = A_j(x) \circ U_x(1,0)$

($j=1,2$) が従う。これを用いて証明される。

4-2 主定理の証明

4-1 の FACT 2 より, C_1, C_2 は共通固有ベクトルをもつ。(実は, もっと強く, ある $L^2(S')$ の正規直交基底によって同時対角化される。) その時, 固有値は零でないから, $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ により, $e^{-p\lambda_1}, e^{-p\lambda_1 - \lambda_2}$ とかける。すなわち, $\exists \varphi_0 \in L^2(S'), \varphi_0 \neq 0$.

$$\text{s.t. } \begin{cases} C_1 \varphi_0 = e^{-p\lambda_1} \varphi_0 \\ C_2 \varphi_0 = e^{-p\lambda_1 - \lambda_2} \varphi_0 \end{cases}$$

上の $\varphi_0 \in L^2(S')$ を使って,

$$\psi_t(x) := e^{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)t} \cdot U_x(t, 0) \varphi_0 \\ x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{とおく}$$

4-1 の FACT 3 を用いると,

$$\begin{cases} \psi_1(x_1+p, x_2) = \psi_1(x_1, x_2) \\ \psi_1(x_1+p, x_2+1) = \psi_1(x_1, x_2) \quad \text{となり.} \end{cases}$$

$\psi_1 \in \Gamma$ であることが示せる。このとき,

FACT $(\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j) \psi_1 = \lambda_j \cdot \psi_1 \quad (j=1, 2)$

証明 $\psi_1(x) = e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} U_x(1, 0) \varphi_0$ を微分.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_1 &= \lambda_j \psi_1 + e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} U_x(1, 0) \cdot \varphi_0 \\ &= \lambda_j \psi_1 + e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \cdot A_j(x) \cdot U_x(1, 0) \varphi_0 \\ &= (\lambda_j + A_j(x)) \psi_1 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } (\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j(x)) \psi_1 = \lambda_j \psi_1 \quad (j=1, 2)$$

$\psi_1 \in \Gamma$ は $\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1(x)$, $\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2(x)$ の共通固有ベクトル
 になっている。 $\psi_1 \in \Gamma$ を H_p の作用 R によって変換し
 たものの族 $\{R_{\bar{l}} \psi_1\}_{\bar{l} \in H_p}$ を考える。

$(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2) \in F_{\tau, p}$ は、次のような H_p -擬不変性。

$$R_{\bar{l}}^{-1} \circ (\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1) \circ R_{\bar{l}} = (\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1) + l_3 (\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2) \\ + \frac{l_3^2}{2} 2\pi\sqrt{-1}\tau I + \frac{l_1}{p} 2\pi\sqrt{-1} I$$

$$R_{\bar{l}}^{-1} \circ (\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2) \circ R_{\bar{l}} = (\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2) + l_3 (2\pi\sqrt{-1}\tau) I \\ + l_2 (2\pi\sqrt{-1}) I$$

for all $\bar{l} = [l_1, l_2, l_3] \in H_p$

これから

$$(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1) (R_{\bar{l}} \psi_1) \\ = \left\{ \lambda_1 + l_3 \cdot \lambda_2 - 2\pi\sqrt{-1} \left(\frac{-l_3^2}{2} + \frac{-l_1}{p} \right) \right\} (R_{\bar{l}} \psi_1)$$

$$(\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2) (R_{\bar{l}} \psi_1) \\ = \left\{ \lambda_2 - 2\pi\sqrt{-1} (-l_3\tau - l_2) \right\} (R_{\bar{l}} \psi_1)$$

族 $\{R_{\bar{l}} \psi_1\}_{\bar{l} \in \mathbb{Z}}$ は Hilbert space Γ の正規直交基底
 になっており、この基底に関して、 $\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2$ が同時
 対角化された。 その対角成分は、 $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ の。

H_p 作用 ρ (Affine作用) に関する軌道となっている。

定数切断 $1 \in \Gamma$ を H_p の作用 R によって変換したものの族

$\{R_{\bar{l}} 1\}_{\bar{l} \in H_p}$ も Γ の正規直交基底である。

これを基準として採用する

$\{R_{\bar{z}} 1\}_{\bar{z} \in H_p}$ を $\{R_{\bar{z}} \psi_1\}_{\bar{z} \in H_p}$ にくつぎ unitary 作用素 $g \in U(\Gamma)$ をとる。 $g R_{\bar{z}} 1 = R_{\bar{z}} \psi_1$, $\bar{z} \in H_p$ すると、

$$\begin{aligned} (g \circ R_{\bar{m}}) R_{\bar{z}} 1 &= g \circ R_{\bar{m} \cdot \bar{z}} 1 = R_{\bar{m} \cdot \bar{z}} \psi_1 \\ &= R_{\bar{m}} \circ R_{\bar{z}} \psi_1 = R_{\bar{m}} \circ g R_{\bar{z}} 1 \end{aligned}$$

$$\text{すなわち } (g \circ R_{\bar{m}} - R_{\bar{m}} \circ g) (R_{\bar{z}} 1) = 0$$

for all $\bar{m}, \bar{z} \in H_p$

$$\therefore g \in U(\Gamma)(H_p, \text{Ad} R)$$

更に、 $\psi_1 = \psi_1(x)$ の x に対する smooth 性より、

g の smooth 性がいえて、 $g \in G_p$ である。

結局、 $(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2) \in F_{z,p}$ に対して、

ある $g \in G_p$ が存在して、この g で変換すると

基準とした正規直交基底 $\{R_{\bar{z}} 1\}_{\bar{z} \in H_p}$ に関して、

$g^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1) \circ g$, $g^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2) \circ g$ は対角形作用素 on Γ

であり、対角成分は $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ の H_p -作用 ρ による軌道である。

このことは主定理の成立を意味する。

§5. 注意

この小論では、moment map = 0 で得られる Symplectic Quotient を調べたが、一般に、 $\forall a \in \text{Center of } E_p$ に対して、

moment map = a に対する Symplectic Quotient を考える

ことができる。この一般の Symplectic Quotient は単純楕円型特異点の変形とみなせるが、どのような構造を持つのか調べねばならない。

Reference

- (1) K.B. Kronheimer : ALE-gravitational instantons
thesis, Oxford Univ (1986)
- (2) Saito, K : Einfach-elliptische Singularitäten
Invent. Math 23 (1974)
- (3) Tanabe, H : On the equation of evolution in a Banach Space
Osaka. Math. J 12 (1960)