数理解析研究所講究録
第771巻 1992年 12-28

Nonparametric Recursive Estimators of Probability Densities and Their Derivatives

新潟大・理　　磯貝　英一　（Eiichi Isogai）

§1. 問題

$X_1, X_2, X_3, \cdots$ は関数型が未知な確率密度関数 $f(x)$ $(x \in R)$ をもつ独立で同一分布に従う確率変数列とする。$p \geq 0$ を与えられた整数とするとき、$f(x)$ の p 次導関数 $f^{(p)}(x)$ $(f^{(0)}(x) = f(x))$ を推定する問題を考える。推定方法としてカーネル法を用いる。この問題は $p = 0$ の場合、Rosenblatt (1956)を始め、非常に多くの研究者によって研究がなされている。一方、$p \geq 0$ の場合、Bhattacharya (1967)を始め、Schuster(1969), Singh (1977a), Samanta and Mugisha (1981), Menon, Prasad and Singh (1984) 等によって研究が進められた。これまでに提案された推定量は次の通りである。

$X_1, \cdots, X_n$を fixed sample size n の標本とし、K(x) をカーネル、$h_n > 0$ を smoothing parameter とする。

Bhattacharya Type (Bhattacharya (1967))

$$(1.1) \qquad f_n^{(p)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{h_n^{p+1}} K^{(p)}\left(\frac{X_j - x}{h_n}\right)$$

ここに、$K^{(p)}(x)$ は $K(x)$ の p 次の導関数である。p=0 のときは、Rosenblatte-Parzen Type である。

Singh Type (Singh (1977a))

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{h_n^{p+1}}K\left(\frac{X_j - x}{h_n}\right) \tag{1.2}$$

ここに、(1.1)と(1.2)のK(x)は異なる。ところで、(1.1)と(1.2)の推定量は再帰的 (recursive)でない。即ち、標本が追加されたとき、新しい推定量を計算するのに今までのすべての標本を用いなければならない。従って、計算の手間がかかる。ここで、$\{f_n^{(p)}(x),\ n \geq 1\}$ が再帰的であるとは、次の関係が成り立つことである。

$$f_n^{(p)}(x) = g_n(f_{n-1}^{(p)}(x),\ X_n).$$

そこで、再帰的推定量が提案された。

Recursive version of (1.1) (Samanta and Mugisha (1981))

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{h_j^{p+1}}K^{(p)}\left(\frac{X_j - x}{h_j}\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$f_n^{(p)}(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_{n-1}^{(p)}(x) + \frac{1}{nh_n^{p+1}}K^{(p)}\left(\frac{X_n - x}{h_n}\right).$$

Recursive version of (1.2) (Menon, Prasad and Singh (1984))

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{h_j^{p+1}}K\left(\frac{X_j - x}{h_j}\right). \tag{1.3}$$

これらの統計的性質として、たとえば、以下のものが考えられている。

(i) 一致性（consistency）

(a) $f_n^{(p)}(x) \to f^{(p)}(x)$ a.s. $(n\to\infty)$ (pointwise)

(b) $\sup_{-\infty<x<\infty} |f_n^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)| \to 0$ a.s. $(n\to\infty)$ (uniform)

(c) $E[(f_n^{(p)}(x) - f^{(p)}(x))^2] \to 0$ $(n\to\infty)$ (Mean Square Error)

(d) $\sup_{-\infty<x<\infty} E[(f_n^{(p)}(x) - f^{(p)}(x))^2] \to 0$ $(n\to\infty)$

(ii) 収束の早さ（the rates of convergence）

上記 (i) の収束の早さを求める。

(iii) 漸近正規性（asymptotic normality）

$$(1.4) \quad \sqrt{nh_n^{1+2p}}\,(f_n^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)) \underset{L}{\to} N(0,\sigma^2) \quad (n\to\infty) \quad (\text{in law})$$

p = 0, 1 のとき、(1.4) を Samanta and Mugisha (1981) が証明した。本論文では（1.4）の正規近似の収束の早さを求めることである。

Singh (1977b) が与えた $f^{(p)}(x)$ の推定の例には、たとえば次のものがある。

<u>例1.</u> Fisher Information の推定

$$I_f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f^{(1)}(x))^2}{f(x)}\,dx$$

を推定する。

<u>例2.</u> regression function の推定

X, Y を確率変数とし、X = x におけるYの条件付き平均 r(x)=E(Y | X=x)

を推定する。今、Y = y が与えられたときのX の条件付き確率密度関数(p.d.f.)が

$$h(x \mid y) = u(x)\,a(y)\,e^{yx}$$

であるとする。たとえば、$h(x \mid y)$ は正規分布 N(y,1) のp.d.f. である場合がその例である。G(y) はY の分布関数で次を満たすとする。

$$\text{Support of } G \subset \{y \mid \int u(x)e^{yx}dx < \infty\}.$$

このとき

$$f(x) \equiv \int a(y)e^{yx}dG(y), \quad d\mu(x) \equiv u(x)\,dx$$

とおくと、f(x) は σ-finite measure μ に関して p.d.f. になり

$$r(x) = \frac{f^{(1)}(x)}{f(x)}$$

が成り立つ。

§2. 再帰型推定量

r > p は整数とする。I を1つの区間とする。p.d.f. f(x) のクラスとして次を考える。

$\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_0(I) = \{$ p.d.f. f(x) on R with respect to Lebesgue measure $\mid$

$\exists f^{(i)}(x)$ on R for all i=1,...,r and

$\exists$ positive constants ε_1, ε_2, M_1 and M_r such that

$$\varepsilon_1 \le \inf_{x\in I} f(x) \le \sup_{x\in I} f(x) \le \varepsilon_2,$$

$$\|f^{(i)}\| \le M_i \quad (i=1,r) \quad \text{for all } f\in\mathfrak{F}_0\}.$$

ここに、R上の実数値関数 g(y) に対して

$$||g|| \equiv \sup_{y \in R} |g(y)|$$

とおく。

$\mathfrak{F}_0$の例

任意の有限区間 I ＝ ［a,b］を与える。任意に与えられた

$-\infty < \mu_0 \leq \mu_1 < \infty$, $0 < \sigma_0^2 \leq \sigma_1^2 < \infty$ に対して

$\mathfrak{F}_0 = \{$ p.d.f. of the normal $N(\mu, \sigma^2) \mid \mu_0 \leq \mu \leq \mu_1,\ \sigma_0^2 \leq \sigma^2 \leq \sigma_1^2 \}$.

さて、本論文で使用するカーネルのクラスを与える。

$\mathcal{K}_{p,r}$ はつぎを満たすR上のすべてのボレル関数 K(y) の集合とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(y)|^i dy < \infty \quad (i=1,2,3), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |y^r K(y)| dy < \infty,$$

$$|yK(y)| \to 0 \text{ as } |y| \to \infty,$$

$$(2.1) \quad \frac{1}{j!}\int_{-\infty}^{\infty} y^j K(y)\,dy = \begin{cases} 1 & \text{if } j=p \\ 0 & \text{if } j \neq p,\ j=0,1,\ldots,r-1. \end{cases}$$

$K \in \mathcal{K}_{p,r}$ の例 (Singh (1979) による)

(1) $-\infty < a < b < \infty$ に対して

$K(y) = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j y^j\right) I(a<y<b)$ 、 ただし、I(A)はAの定義関数である

とおくとき、（2.1）に代入して r 個の連立方程式を解いて、$\alpha_0, \cdots, \alpha_{r-1}$を

決めると $K \in \mathcal{K}_{p,r}$ を得る。たとえば、r = 3, a = 0, b = 1　とする。

(a) $K(y) = 3(10y^2 - 12y + 3)\, I(0 < y < 1) \;\Rightarrow\; K \in \mathcal{K}_{0,3}$

(b) $K(y) = -12(15y^2 - 16y + 3)\, I(0 < y < 1) \Rightarrow K \in \mathcal{K}_{1,3}$

(c) $K(y) = 60(6y^2 - 6y + 1)\, I(0 < y < 1) \Rightarrow K \in \mathcal{K}_{2,3}$

(2) $r = p + 1, p = 0, 1, 2, 3$ を考える。 $\phi(y;\mu,\sigma^2)$ を $N(\mu,\sigma^2)$ のp.d.f.とする。

(a) $K_0(y) = \phi(y\,;0, 1) \Rightarrow K_0 \in \mathcal{K}_{0,1}$

(b) $K_1(y) = y\,\phi(y\,;0, 1) \Rightarrow K_1 \in \mathcal{K}_{1,2}$

(c) $K_2(y) = 2\{\phi(y\,;0, 2) - \phi(y\,;0, 1)\} \Rightarrow K_2 \in \mathcal{K}_{2,3}$

(d) $K_3(y) = y\{\phi(y\,;0, 2) - 2\phi(y\,;0, 1)\} \Rightarrow K_3 \in \mathcal{K}_{3,4}$

$\{h_n, n \geq 1\}$は$h_n \to 0\ (n \to \infty)$を満たす正数列とする。

任意の $K \in \mathcal{K}_{p,r}$ を固定し、 $f^{(p)}(x)$ の再帰的推定量として

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{h_j^{p+1}}K\left(\frac{X_j - x}{h_j}\right) \tag{2.2}$$

を用いる。

§3. 結果

この節では正規近似の収束の早さを求める。以下では、$C_1, C_2, \cdots$ は適当な正定数を表すとする。まず、漸近的不偏性についての収束の早さを求める。

補題 3.1. つぎを満たす正定数 c が存在する。

$$\sup_{f \in \mathfrak{F}_0}\ \sup_{-\infty<x<\infty} |Ef_n^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)| \leq cb_n \quad \text{for all } n \geq 1,$$

ただし、 $b_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h_j^{r-p}$.

証明の概略。テイラー展開と (2.1) を用いて、

$$Ef_n^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{h_j^p}[f^{(p)}(x)h_j^p + \frac{h_j^r}{r!}\int_{-\infty}^{\infty} y^r K(y) f^{(r)}(x+\theta h_j y)\,dy] - f^{(p)}(x)$$

$$= \frac{1}{r!}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h_j^{r-p}\int_{-\infty}^{\infty} y^r K(y) f^{(r)}(x+\theta h_j y)\,dy \qquad \text{for some } 0<\theta<1.$$

従って、仮定より

$$C = \frac{M_r}{r!}\int_{-\infty}^{\infty} |y^r K(y)|\,dy$$

とおくと

$$\sup_{f\in\mathfrak{F}_0}\sup_{x\in R}|Ef_n^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)|$$

$$\le \sup_{f\in\mathfrak{F}_0}\sup_{x\in R}\frac{\|f^{(r)}\|}{r!}\int_{-\infty}^{\infty}|y^r K(y)|\,dy\, b_n \le Cb_n.$$

これで補題が証明された。

(証終)

つぎの補題は分散の漸近表現を与えている。

補題 3.2. $\{h_n\}$は次の条件を満たすとする。

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{h_n}{h_j}\right)^{1+2p} = \gamma_{1+2p} + O(h_n^{\eta}) \quad (n\to\infty)$$

for some constants $\eta > 0$ and $\gamma_{1+2p} \geq 0$,

$$\left(\frac{h_n^{1+2p}}{n}\right) \sum_{j=1}^{n} h_j^{-2p} = O(h_n^{\xi}) \quad (n \to \infty) \quad \text{for some constant } \xi > 0.$$

このとき、次のことが成立する。

$$\sup_{f \in \mathfrak{F}_0} \sup_{x \in I} \left| nh_n^{1+2p} \mathrm{Var}(f_n^{(p)}(x)) - \sigma_{1+2p}^2(x) \right| = O(h_n^{\beta}) \quad (n \to \infty),$$

ここに、$\beta = \min(\eta, \xi)$ かつ $\sigma_{1+2p}^2(x) = \gamma_{1+2p} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y)\,dy.$

証明の概略。 平均値の定理と仮定より

$$\sup_{f \in \mathfrak{F}_0} \sup_{x \in I} \left| E\left\{\frac{1}{h_j} K^2\left(\frac{X_j - x}{h_j}\right)\right\} - f(x) \int K^2(y)\,dy \right|$$

$$\leq \sup_{f} \sup_{x} \| f^{(1)} \| \int | y K^2(y) |\,dy\, h_j \leq C_1 h_j,$$

$$\sup_{f \in \mathfrak{F}_0} \sup_{x \in I} \left[E\left\{\frac{1}{h_j} K\left(\frac{X_j - x}{h_j}\right)\right\}\right]^2$$

$$\leq 2 \sup_{f} \sup_{x} f^2(x) \left(\int | K(y) |\,dy\right)^2 + 2\left(\int | y K(y) |\,dy \sup_{f} \| f^{(1)} \|\right)^2 h_j^2$$

$$\leq C_2.$$

従って、仮定を用いると、十分大きな n に対して

$$\sup_{f \in \mathfrak{F}_0} \sup_{x \in I} \left| nh_n^{1+2p} \mathrm{Var}(f_n^{(p)}(x)) - \sigma_{1+2p}^2(x) \right|$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{h_n}{h_j}\right)^{1+2p} \sup_f \sup_x \left| E\left\{\frac{1}{h_j}K^2\left(\frac{X_j-x}{h_j}\right)\right\} - f(x)\int K^2(y)\,dy \right|$$

$$+ \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{h_n}{h_j}\right)^{1+2p} - \gamma_{1+2p}\right| \sup_f \sup_x f(x)\int K^2(y)\,dy$$

$$+ \frac{h_n^{1+2p}}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{C_3}{h_j^{2p}}$$

$$\le C_4 h_n^{\beta}.$$

これで補題が証明された。

（証終）

次の補題は Michel and Pfanzagl (1971) により与えられた。

補題 3.3. X, Yを確率変数とするとき、次の不等式が成り立つ。

$$|P\{X \le tY\} - \Phi(t)|$$

$$\le \sup_{u\in R}|P\{X \le u\} - \Phi(u)| + P\{|Y-1| > s\} + s$$

$$\text{for all } t \in R \text{ and } s > 0,$$

ただし、$\Phi(x)$は標準正規分布 N(0,1)の分布関数を表す。

次の補題は容易に示せる。

補題 3.4. Xを確率変数とするとき、次の不等式が成立する。

任意の $\varepsilon \in (0,\frac{1}{2})$ に対して

$$P\{|X^{-1}-1| > 2\varepsilon,\ X \ne 0\} \le 2P\{|X-1| > \varepsilon\}.$$

さて、定理を与えよう。

定理 3.1. $\{h_n\}$は次を満たすとする。

$$\sup_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{h_n}{h_j}\right)^{3p+2} < \infty,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{h_n}{h_j}\right)^{1+2p} = \gamma_{1+2p} + O(h_n^{\eta}) \quad (n\to\infty)$$

for some constants $\eta > 0$ and $\gamma_{1+2p} > 0$,

$$\left(\frac{h_n^{1+2p}}{n}\right)\sum_{j=1}^{n} h_j^{-2p} = O(h_n^{\xi}) \quad (n\to\infty) \quad \text{for some constant } \xi > 0.$$

このとき

$$\sup_{f\in\mathfrak{F}_0}\sup_{x\in I}\sup_{y\in R}\left|P\{(nh_n^{1+2p})^{1/2}(f_n^{(p)}(x)-f^{(p)}(x))\leq y\,\sigma_{1+2p}(x)\}-\Phi(y)\right|$$

$$= O(b_n) \quad (n\to\infty)$$

が成り立つ、ただし、

$$\beta = \min(\eta, \xi),$$

$$b_n = \max\{(nh_n)^{-1/2},\ \left(\frac{h_n^{1+2p}}{n}\right)^{1/2}\sum_{j=1}^{n} h_j^{r-p},\ h_n^{\beta/2}\}.$$

証明の概略。

$$Y_j(x) = \frac{1}{h_j^{p+1}}\{K\left(\frac{X_j-x}{h_j}\right) - EK\left(\frac{X_j-x}{h_j}\right)\},\quad s_n^2(x) = \sum_{j=1}^{n} EY_j^2(x)$$

とおくと

$$n\{f_n^{(p)}(x) - Ef_n^{(p)}(x)\} = \sum_{j=1}^{n} Y_j(x) \text{ and } v_n^2(x) \equiv \mathrm{Var}(f_n^{(p)}(x)) = \frac{s_n^2(x)}{n^2}.$$

平均値の定理より

$$\sup_f \sup_x \mathbf{E}\left|\frac{1}{h_j} K^3\left(\frac{X_j - x}{h_j}\right)\right| \le C_1 \quad \text{for all } j \ge 1.$$

よって、ヘルダーの不等式を用いると

$$\text{(3.1)} \qquad \sup_f \sup_x \sum_{j=1}^{n} E|Y_j(x)|^3 \le C_2 \sum_{j=1}^{n} h_j^{-(3p+2)}.$$

補題 3.2より

$$\text{(3.2)} \qquad \sup_f \sup_x \left|\frac{h_n^{1+2p} s_n^2(x)}{n} - \sigma_{1+2p}^2(x)\right| \le C_3 h_n^{\beta} \quad \text{for large n.}$$

従って、

$$\inf_f \inf_x \frac{h_n^{1+2p} s_n^2(x)}{n} \ge \inf_f \inf_x \sigma_{1+2p}^2(x) - \sup_f \sup_x \left|\frac{h_n^{1+2p} s_n^2(x)}{n} - \sigma_{1+2p}^2(x)\right|$$

$$\ge \gamma_{1+2p} \varepsilon_1 \int K^2(y)\,dy - C_3 h_n^{\beta}$$

$$\to \gamma_{1+2p} \varepsilon_1 \int K^2(y)\,dy > 0 \quad (n \to \infty)$$

だから

$$\text{(3.3)} \qquad \inf_f \inf_x \frac{h_n^{1+2p} s_n^2(x)}{n} \ge C_4 \qquad \text{for large n.}$$

さて、Berry-Esseenの定理、(3.1)、 (3.3)、 仮定を用いると

$$\text{(3.4)} \qquad \sup_f \sup_x \sup_{y \in R} \left|P\{\sum_{j=1}^{n} Y_j(x) \le y\, s_n(x)\} - \Phi(y)\right|$$

$$\leq C_5 (nh_n)^{-1/2} \quad \text{for large } n.$$

$$W_n(x) = f_n^{(p)}(x) - Ef_n^{(p)}(x), \quad V_n(x) = Ef_n^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)$$

とおくと

$$f_n^{(p)}(x) - f^{(p)}(x) = W_n(x) + V_n(x)$$

となる。(3.3) より

$$\text{(3.5)} \quad \inf_f \inf_x v_n(x) \geq C_6 (nh_n^{1+2p})^{-1/2} \quad \text{for large } n.$$

補題 3.1より

$$\text{(3.6)} \quad \sup_f \sup_x |V_n(x)| \leq C_7 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} h_j^{r-p} \quad \text{for all } n \geq 1.$$

従って、不等式 $|\Phi(u) - \Phi(v)| \leq |u - v|$ for all $u, v \in R$ 、(3.4)、(3.5)、(3.6)を用いると、十分大きな n に対して

$$\text{(3.7)} \quad \sup_f \sup_x \sup_{y \in R} |P\{W_n(x) + V_n(x) \leq y\, v_n(x)\} - \Phi(y)|$$

$$= \sup_f \sup_x \sup_y \left|P\left\{ \frac{W_n(x)}{v_n(x)} \leq y - \frac{V_n(x)}{v_n(x)} \right\} - \Phi(y)\right|$$

$$\leq \sup_f \sup_x \sup_y |P\{W_n(x) \leq y\, v_n(x)\} - \Phi(y)|$$

$$+ \sup_f \sup_x |V_n(x)| / \inf_f \inf_x v_n(x)$$

$$\leq C_8 \max\{(nh_n)^{-1/2}, \ \left(\frac{h_n^{1+2p}}{n}\right)^{1/2} \sum_{j=1}^{n} h_j^{r-p}\}.$$

$$C_9 = \gamma_{1+2p}\, \varepsilon_1 \int K^2(y)\, dy$$

とおくと

$$(3.8)\quad \inf_f \inf_x \sigma^2_{1+2p}(x) \geq C_9 .$$

十分大きなnに対して

$$(3.9)\quad t_n = \left(\frac{5C_3}{C_9}\right)^{1/2} h_n^{\beta/2} \quad (\in (0,1)) ,$$

$$A_n(x) = \sup_y \left| P\{(nh_n^{1+2p})^{1/2}(f_n^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)) \leq y\,\sigma_{1+2p}(x)\} - \Phi(y) \right|$$

とおくと、補題3.3より

$$(3.10)\quad A_n(x) \leq \sup_y \left| P\left\{\frac{f_n^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)}{v_n(x)} \leq y\right\} - \Phi(y) \right|$$

$$+ P\left\{\left| \left(\frac{\sigma^2_{1+2p}(x)}{nh_n^{1+2p} v_n^2(x)}\right)^{1/2} - 1\right| > t_n\right\} + t_n .$$

不等式 $|y-1| > z$ if $|\sqrt{y} - 1| > \sqrt{z}$ for $y, z > 0$ 、補題3.4、(3.2)、(3.8)、(3.9)より

$$\sup_f \sup_x P\left\{\left| \left(\frac{\sigma^2_{1+2p}(x)}{nh_n^{1+2p} v_n^2(x)}\right)^{1/2} - 1\right| > t_n\right\}$$

$$\leq 2 \sup_f \sup_x P\left\{\left| \frac{nh_n^{1+2p} v_n^2(x)}{\sigma^2_{1+2p}(x)} - 1\right| > \frac{t_n^2}{4}\right\}$$

$$\leq 2P\left\{C_3 h_n^{\beta} > \frac{t_n^2}{4} C_9\right\} = 2P\left\{1 > \frac{5}{4}\right\} = 0 \quad \text{for large } n,$$

すなわち、

$$\sup_f \sup_x P\{|(\frac{\sigma^2_{1+2p}(x)}{nh_n^{1+2p} v_n^2(x)})^{1/2} - 1| > t_n\} = 0 \quad \text{for large } n.$$

従って、この関係式と、(3.7)、(3.9)、(3.10)より

$$\sup_f \sup_x A_n(x)$$

$$\leq \sup_f \sup_x \sup_y |P\{f_n^{(p)}(x) - f^{(p)}(x) \leq y\, v_n(x)\} - \Phi(y)|$$

$$+ \sup_f \sup_x P\{|(\frac{\sigma^2_{1+2p}(x)}{nh_n^{1+2p} v_n^2(x)})^{1/2} - 1| > t_n\} + t_n$$

$$\leq C_{10} b_n \quad \text{for large } n.$$

これで定理が証明された。

（証終）

系 3.1.

$$h_n = n^{-\alpha}, \quad \frac{1}{1+2r} < \alpha < \frac{1}{1+2p}$$

を考える。 このとき

$$\sup_{f \in \mathfrak{F}_0} \sup_{x \in I} \sup_{y \in R} |P\{n^{\delta/2}(f_n^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)) \leq y\, \sigma_{1+2p}(x)\} - \Phi(y)|$$

$$= O(n^{-\zeta}) \quad \text{as } n \to \infty,$$

ここに

$$\sigma^2_{1+2p}(x) = \frac{1}{1+\alpha(1+2p)} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y)\,dy, \quad \delta = 1 - \alpha(1+2p),$$

ζ はつぎで与えられる。

(i) $p=0$ のとき

任意の $0<\tau<\frac{1}{4r}$ に対して　$\alpha=(1-\frac{4r\tau}{1+2r})/2r$ とおくと

$$\zeta=\frac{1}{4r}-\tau$$

または

任意の $0\leq\tau\leq\frac{r-1}{4r}$ に対して　$\alpha=\frac{1}{2}-2\tau$ とおくと

$$\zeta=\frac{1}{4}-\tau$$

(ii) $p\geq 1$ のとき

任意の $0<\tau\leq\frac{2(r-p)-1}{4r(1+2p)}$ に対して　$\alpha=\frac{1}{1+2p}-2\tau$ とおくと

$$\zeta=\frac{1}{2(1+2p)}-\tau$$

証明の概略。　計算により

$$\gamma_{1+2p}=\frac{1}{1+\alpha(1+2p)},\ \eta=\frac{1}{\alpha},\ \xi=1$$

として定理 3.1 の条件は満たされる。また、つぎのことが示される。

十分大きな n に対して

(1) $\alpha(r-p)<1$ のとき

$$\left(\frac{h_n^{1+2p}}{n}\right)^{1/2}\sum_{j=1}^{n}h_j^{r-p}\leq\frac{2}{1-\alpha(r-p)}n^{-\{\alpha(1+2r)-1\}/2}$$

(2) $\alpha(r-p)=1$ のとき

$$\left(\frac{h_n^{1+2p}}{n}\right)^{1/2}\sum_{j=1}^{n} h_j^{r-p} \le 2\, n^{-\alpha(1+r+p)/2}\log n$$

(3) $\alpha(r-p)>1$ のとき

$$\left(\frac{h_n^{1+2p}}{n}\right)^{1/2}\sum_{j=1}^{n} h_j^{r-p} \le \frac{1}{\alpha(r-p)-1}\, n^{-\{1+\alpha(1+2p)\}/2}$$

これらの結果を用いると系が証明できる。

(証終)

参考文献

[1] Bhattacharya, P.K. (1967). Estimation of a probability density function and its derivatives. *Sankhya A* 29, 373-382.

[2] Menon, V.V., B. Prasad and R.S. Singh. (1984). Non-parametric recursive estimates of a probability density function and its derivatives. *J. Statist. Plann. Inference* 9, 73-82.

[3] Michel, R. and J. Pfanzagl. (1971). The accuracy of the normal approximation for minimum contrast estimates. *Z. Wahrsch. Gebiete* 18, 73-84.

[4] Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Ann. Math. Statist.* 27, 832-837.

[5] Samanta, M. and R.X. Mugisha. (1981). On a class of estimates of the probability density function and mode based on a random number of observations. *Cal. Statist. Assoc. Bull.* 117, 23-40.

[6] Singh, R.S. (1977a). Improvement on some known nonparametric uniformly consistent estimators of derivatives of a density. *Ann. Statist.* 5, 394-399.

[7] Singh, R.S. (1977b). Applications of estimators of a density and its derivatives to certain statistical problems. *J. R. Statist. Soc. B* 39, 357-363.

[8] Singh, R.S. (1979). On necessary and sufficient conditions for uniform strong consistency of estimators of a density and its derivatives. *J. Multivariate Anal.* 9, 157-164.

[9] Schuster, E.F. (1969). Estimation of a probability density function and its derivatives. *Ann. Math. Statist.* 40, 1187-1195.