数理解析研究所講究録
第 778 巻 1992 年 91-97

等質ベクトル束の球切断

日本女子大学　峰村勝弘

序

G を連結なリー群、K を G の閉部分群とし、G,K のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g},\mathfrak{k}$ で表し、$\mathfrak{g}$ に $Ad(K)$ 不変部分空間 $\mathfrak{p}$ で、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ となるものが存在すると仮定する（このとき、G/K は簡約と呼ばれる)。$\mathfrak{g}_c,\mathfrak{k}_c,\mathfrak{p}_c$ をそれぞれ $\mathfrak{g},\mathfrak{k},\mathfrak{p}$ の複素化とする。$\top$ で $U(\mathfrak{g}_c)$ 上の標準逆同型写像を表す。τ を V_τ をその表現空間とする K の有限次元表現とし、τ の微分表現を $U(\mathfrak{k}_c)$ の表現に拡張して、その核を $\mathcal{I}$ で表す。$\mathcal{I}$ の $\top$ による像を $\mathcal{I}^\top$ で表す。τ に同伴する G/K 上の等質ベクトル束を E_τ とし、E_τ 上の $G-$不変微分作用素全体のなす環を $D(E_\tau)$ と記す。第 1 節で、$D(E_\tau)$ はベクトル空間として $(S(\mathfrak{p}_c)\otimes \mathrm{End}V)^K$ と同型になることを示し（命題 1.2)、ある条件のもとでは $D(E_\tau)$ と $U(\mathfrak{g}_c)^K/U(\mathfrak{g}_c)^K\cap U(\mathfrak{g}_c)\mathcal{I}^\top$ が環として同型になることを示す（定理 1.3)。

χ を環 $D(E_\tau)$ の有限次元表現とする。第 2 節では K がコンパクトと仮定し”χ 型の同時固有切断”の定義と帯球函数（[5],[7]）の一般化としての”χ 型の球切断”の定義を与え、χ 型の球切断の全体がなすベクトル空間の次元を上からおさえることができることを示す（定理 2.5)。

第 3 節では、G/K が対称リーマン空間の時に、球切断のなす空間の次元をポアソン変換を用いて決定する（定理 3.4)。

本稿では詳細を [11] に譲り証明を省略する。

1.　不変微分作用素環

記号は序のものに従う。$C^\infty(G,V_\tau)$ で G 上で定義された V_τ に値をとる可微分関数全体のなす空間を、$C^\infty(G,\tau)$ で $C^\infty(G,V_\tau)$ の元 f で $f(gk)=\tau(k^{-1})f(g)$ を満たすもの全体を表す。また、$C^\infty(E_\tau)$ で E_τ 上の可微分切断全体を表す。このとき自然な対応で $C^\infty(E_\tau)$ と $C^\infty(G,\tau)$ とが同型になる。以下この対応により $C^\infty(E_\tau)$ と $C^\infty(G,\tau)$ を同一視する。

$\mathfrak{g}$ の元を G 上の左不変微分作用素とみなし、$U(\mathfrak{g}_c)$ の $C^\infty(G,V_\tau)$ 上の表現に拡張する。σ を K の V_σ 上の別の有限次元表現とし、$L(V_\tau,V_\sigma)$ で V_τ から V_σ への線形写像全体を表す。このとき $U(\mathfrak{g}_c)\otimes L(V_\tau,V_\sigma)$ は

$$(X\otimes T)f=T\cdot Xf\quad (X\in U(\mathfrak{g}_c),T\in L(V_\tau,V_\sigma),f\in C^\infty(G,V_\tau))$$

により $C^\infty(G,V_\tau)$ に作用する。$D(E_\tau,E_\sigma)$ を G の作用と可換な E_τ から E_σ への微分作用素全体のなすベクトル空間とし、$\tau=\sigma$ のとき $D(E_\tau,E_\sigma)$ を単に $D(E_\tau)$ と記す。$k\in K,T\in$

$L(V_\tau, V_\sigma)$ に対して、$kT = \sigma(k)T\tau(k^{-1})$ と定めることにより、$L(V_\tau, V_\sigma)$ を $K-$加群とみなす。$(U(\mathfrak{g}_c) \otimes L(V_\tau, V_\sigma))^K$の元 Dは $C^\infty(G,\tau)$ の元を $C^\infty(G,\sigma)$ に写す（[**16**, Proposition 5.4.11]）ので、Dは $D(E_\tau, E_\sigma)$ の元Δを定める。$(U(\mathfrak{g}_c) \otimes L(V_\tau, V_\sigma))^K$から $D(E_\tau, E_\sigma)$ への写像μ_0を$\Delta = \mu_0(D)$ で定義する。Λを $S(\mathfrak{g}_c)$ から $U(\mathfrak{g}_c)$ への対称化写像とし、

$$\nu(p \otimes T) = \Lambda(p) \otimes T \quad (p \in S(\mathfrak{g}_c), T \in L(V_\tau, V_\sigma))$$

によりνを定義する。νの $(S(\mathfrak{p}_c) \otimes L(V_\tau, V_\sigma))^K$への制限を$\nu_K$で表す。更に$\zeta_K = \mu_0 \cdot \nu_K$ とおく。このとき

補助定理 1.1. ζ_Kは $(S(\mathfrak{p}_c) \otimes L(V_\tau, V_\sigma))^K$から $D(E_\tau, E_\sigma)$ の上への同型を与える。

以下$\tau = \sigma$とし、τの微分表現（それもτで表す）が既約と仮定する。$U(\mathfrak{g}_c)^K$は対応 $q \mapsto q \otimes Id$ により $(U(\mathfrak{g}_c) \otimes \mathrm{End}V_\tau)^K$の部分集合とみなすことができるので、$\mu_0$の $U(\mathfrak{g}_c)^K$への制限をμと定義する。$\mathcal{I}$ をτの $U(\mathfrak{k}_c)$ における核とし、

$$\xi(q \otimes z) = q \otimes (z + \mathcal{I}^\top) \quad (q \in S(\mathfrak{p}_c), z \in U(\mathfrak{k}_c))$$

により、$S(\mathfrak{p}_c) \otimes U(\mathfrak{k}_c)$ から $S(\mathfrak{p}_c) \otimes U(\mathfrak{k}_c)/\mathcal{I}^\top$ の上への写像ξを定義する。ξは Kの作用と可換なので、ξの $(S(\mathfrak{p}_c) \otimes U(\mathfrak{k}_c))^K$への制限$\xi_K$は $(S(\mathfrak{p}_c) \otimes U(\mathfrak{k}_c))^K$から $(S(\mathfrak{p}_c) \otimes U(\mathfrak{k}_c)/\mathcal{I}^\top)^K$の中への写像となる。一方$\tau$の既約性から、

$$\eta(q \otimes (z + \mathcal{I}^\top)) = q \otimes \tau(z^\top) \quad (q \in S(\mathfrak{p}_c), z \in U(\mathfrak{k}_c))$$

で定義される写像ηは $S(\mathfrak{p}_c) \otimes U(\mathfrak{k}_c)/\mathcal{I}^\top$ から $S(\mathfrak{p}_c) \otimes \mathrm{End}V_\tau$への $K-$同型をあたえ、従って、ηの $(S(\mathfrak{p}_c) \otimes U(\mathfrak{k}_c)/\mathcal{I}^\top)^K$への制限は $(S(\mathfrak{p}_c) \otimes \mathrm{End}V_\tau)^K$の上への同型を与える。

$$\psi(q \otimes z) = \Lambda(q)z \quad (q \in S(\mathfrak{p}_c), z \in U(\mathfrak{k}_c))$$

により $S(\mathfrak{p}_c) \otimes U(\mathfrak{k}_c)$ から $U(\mathfrak{g}_c)$ への写像を定めると、ψは $K-$同型となる（[**3**, Proposition 2.4.15]）ので、ψの $(S(\mathfrak{p}_c) \otimes U(\mathfrak{k}_c))^K$への制限は $U(\mathfrak{g}_c)^K$の上への同型となる。

命題 1.2. τを Kの V_τ上の有限次元表現で、その微分表現が既約と仮定する。このときμは $U(\mathfrak{g}_c)^K$から $D(E_\tau)$ への環準同型で、

$$\begin{array}{ccccc}
(S(\mathfrak{p}_c) \otimes U(\mathfrak{k}_c))^K & \xrightarrow{\xi_K} & (S(\mathfrak{p}_c) \otimes U(\mathfrak{k}_c)/\mathcal{I}^\top)^K & \xrightarrow{\eta_K, \cong} & (S(\mathfrak{p}_c) \otimes \mathrm{End}V_\tau)^K \\
\psi_K \big\downarrow \cong & & & & \zeta_K \big\downarrow \cong \\
U(\mathfrak{g}_c)^K & & \xrightarrow{\mu} & & D(E_\tau)
\end{array}$$

は可換となる。従ってμの核は $U(\mathfrak{g}_c)^K \cap U(\mathfrak{g}_c)\mathcal{I}^\top$に等しく、$\mu$から誘導される $U(\mathfrak{g}_c)^K/U(\mathfrak{g}_c)^K \cap U(\mathfrak{g}_c)\mathcal{I}^\top$ から $D(E_\tau)$ への写像をμ_Kとすれば、μ_Kが全単射となる必要十分条件はξ_Kが全射となることである。

上の命題から次の定理を得る。

定理 1.3. 次の条件の一つが成立すれば、単射環準同型写像

$$\mu_K : U(\mathfrak{g}_c)^K / U(\mathfrak{g}_c)^K \cap U(\mathfrak{g}_c)\mathcal{I}^{\mathsf{T}} \to D(E_\tau)$$

は全射となる：

(i) $U(\mathfrak{k}_c)$ に K−不変部分空間 $\mathcal{J}$ で $U(\mathfrak{k}_c) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ となるものが存在する。

(ii) Kの随伴表現は $\mathfrak{k}_c$の上で半単純である。

(iii) $\mathrm{Ad}(K)$ はコンパクトである。

注意 τが自明なときは、上の定理は良く知られた同型 ([7])

$$U(\mathfrak{g}_c)^K / U(\mathfrak{g}_c)^K \cap U(\mathfrak{g}_c)\mathfrak{k} \cong D(G/K)$$

を与える。

2. 同時固有切断と球切断

この節では Kはコンパクトと仮定する。この時 G/Kは簡約である ([7]) 。$R(D_\tau)$ で環 $D(E_\tau)$ の有限次元表現の同値類全体を表す。E_τ上の超（函数）切断（ [16] ）全体のなす空間を $\mathcal{B}(E_\tau)$ と書き、自然な G−加群としての構造に対応する G の表現をπと書く。

定義 2.1. $\chi \in R(D_\tau)$ の表現空間を Hとする。$u \in \mathcal{B}(E_\tau)$ に対して $\mathcal{B}(E_\tau)$ の $D(E_\tau)$−不変部分空間 $H_i (i = 1 \dots n)$ が存在して *1)* 各 H_iは $D(E_\tau)$−加群として Hの商加群に同型 *2)*$u \in \sum_i H_i$ の 2 条件を満足するとき u はχ型の同時固有切断という。

$\mathcal{B}(E_\tau, \chi)$ によりχ型の同時固有切断のつくるベクトル空間を表す。G の $\mathcal{B}(E_\tau)$ 上の自然な作用をπと書く。この作用で $\mathcal{B}(E_\tau, \chi)$ は G−加群となる。Kがコンパクト故、次の補助定理を得る。

補助定理 2.2. $\mathcal{B}(E_\tau, \chi)$ のすべての元は解析的である。

以下 $\mathcal{B}(E_\tau, \chi)$ を単に $\mathcal{A}(E_\tau, \chi)$ と記す。

V_τの次元を $d(\tau)$ 、K上の正規化されたハール測度を dkとする。V_τに値をとる G 上の解析的関数 fについて次の条件を考える：

(C1) $f(gk) = \tau(k^{-1}) f(g) \quad (g \in G, k \in K)$,

(C2) $f(kgk^{-1}) = f(g) \quad (g \in G, k \in K)$,

(C3) $d(\tau) \int_K \overline{\mathrm{tr}(\tau(k))} f(k^{-1}g) dk = f(g) \quad (g \in G)$.

$\mathcal{S}$ (または $\mathcal{T}$) を上の条件 (C1) と (C3) （または (C2) と (C3) ）を満たす fの全体とする。

補助定理 2.3. S, Tをそれぞれ次式で定義される写像とする。

$$(Sf)(g) = \int_K f(kgk^{-1}) dk \quad (f \in \mathcal{S}, g \in G),$$
$$(Tf)(g) = d(\tau)^2 \int_K \tau(k) f(gk) dk \quad (f \in \mathcal{T}, g \in G).$$

このとき

(i) S, Tは共に全単射で互いに逆写像となる。

(ii) $f \in S, D \in U(\mathfrak{g}_c)^K$に対して $(Sf)(e; D) = f(e; D)$ となる。従って、すべての $D \in U(\mathfrak{g}_c)^K$ に対して $f(e; D) = 0$ ならば $f = 0$ となる。

定義 2.4. $u \in \mathcal{A}(E_\tau, \chi)$ が

$$d(\tau) \int_K \overline{\mathrm{tr}(\tau(k))} \pi(k) u dk = u$$

を満たすとき、u を（χ型の）球切断という。

χ型の球切断全体を $\mathcal{A}(E_\tau, \chi)^\tau$ と書く。$u \in \mathcal{A}(E_\tau, \chi)$ に対して

$$< s_\chi(u), \Delta + \ker \chi >= (\Delta u)(eK)$$

により、$\mathcal{A}(E_\tau, \chi)$ から $V_\tau \otimes (D(E_\tau)/\ker \chi)^*$ への写像 s_χを定義する。

定理 2.5. s_χの $\mathcal{A}(E_\tau, \chi)^\tau$への制限は単射となる。従って

$$\dim \mathcal{A}(E_\tau, \chi)^\tau \leq d(\tau) \cdot \dim(D(E_\tau)/\ker \chi).$$

3. リーマン対称空間上の球切断とポアソン変換

この節では G は中心が有限な連結半単純リー群で、Kはその極大コンパクト部分群とし、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ をカルタン分解とする。$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間とし、$\mathfrak{a}$ に対応する解析的部分群を A とする。$\mathfrak{a}$ にひとつの辞書式順序を入れ、この順序に関して正のルートに対応する巾零部分群を N、正のルートの和の半分をρで表す。岩沢分解 $G = KAN$に対応する $g \in G$ の分解を $g = \kappa(g) e^{H(g)} n$ と書く。Kにおける A の中心化群を Mとし、$P = MAN$とおく。

τを Kの V上の既約表現とし、τに同伴する等質ベクトル束を E_τと書く。τの Mへの制限をτ_Mとする。Mの V_σ上の有限次元表現σと、$\lambda \in \mathfrak{a}_c^*$に対して、$P$の表現 $P \ni man \mapsto e^{(-\lambda+\rho)H(a)} \sigma(m)$ $(m \in M, a \in A, n \in N)$ に同伴する G/P上の等質ベクトル束を $F_{\sigma,\lambda}$で表す。特に、$\sigma = \tau_M$のときは $F_{\tau_M,\lambda}$の代わりに単に $F_{\tau,\lambda}$と書く。$\mathcal{B}(E_\tau)$、$\mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})$ をそれぞれ E_τ、$F_{\sigma,\lambda}$の超（函数）切断全体とする。これらの空間は自然に G−加群となるので、対応する G の表現をそれぞれπ、$\pi_{\sigma,\lambda}$と書く。自然な対応で $\mathcal{B}(E_\tau)$、$\mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})$ の元をそれぞれ V に値をとる超函数と同一視しておく。

$D \in U(\mathfrak{g}_c)^K$に対して、条件 $D - \omega(D) \in \mathfrak{n} U(\mathfrak{g}_c)$ により $U(\mathfrak{a}_c) U(\mathfrak{k}_c)$ の元として$\omega(D)$ を定義する。$U(\mathfrak{a}_c) U(\mathfrak{k}_c)$ と環 $U(\mathfrak{a}_c) \otimes U(\mathfrak{k}_c)$ を同一視して、$U(\mathfrak{g}_c)^K$ から $U(\mathfrak{a}_c) \otimes U(\mathfrak{k}_c)$（の中への）への環逆同型$\omega$を定義する（[3]）。$U(\mathfrak{a}_c)$ 上の自己同型$\sharp$を$\sharp(H) = H + \rho(H)$ $(H \in \mathfrak{a})$ で定め、$\omega_\tau = (\sharp \otimes (\tau \cdot \top)) \cdot \omega$、$\omega'_\tau = (\sharp \otimes \tau) \cdot \omega$, とおく。このとき、$\omega_\tau$（または$\omega'_\tau$）は $U(\mathfrak{g}_c)^K$ から $U(\mathfrak{a}_c) \otimes U(\mathfrak{k}_c)$ への環準同型（または環逆準同型）となり、核は $U(\mathfrak{g}_c)^K \cap U(\mathfrak{g}_c) \mathcal{I}^\top$にひとしい（[9, Corollary 4.5]）。一方 Kはコンパクトだから$\mu_K : U(\mathfrak{g}_c)^K / U(\mathfrak{g}_c)^K \cap U(\mathfrak{g}_c) \mathcal{I}^\top \longrightarrow D(E_\tau)$ は定理 1.3により全射となる。従って $D(E_\tau)$ から $U(\mathfrak{a}_c) \otimes \mathrm{End}_M V$の中への環同型 χ_τで$\chi_\tau \cdot \mu = \omega_\tau$となるものがただ一つ存在する。

Mの既約表現でτ_Mに現れるものの全体をR_τで表す。$\lambda \in \mathfrak{a}_c$に対して、$U(\mathfrak{a}_c)$の元を$\mathfrak{a}_c^*$上の多項式関数とみて、$\lambda \in \mathfrak{a}_c$での値を対応させる写像を$e_\lambda$と書く。$\sigma \in R_\tau$に対して$H_\sigma$で$\mathrm{Hom}_M(V_\sigma, V)$を表す。分解$\mathrm{End}_M V \cong \sum_{\sigma\in R_\tau} \mathrm{End} H_\sigma$による$\mathrm{End}_M V$から$\mathrm{End} H_\sigma$への射影を$\omega_\sigma$とする。

$$\begin{aligned}
\chi_{\tau,\lambda} &= (e_\lambda \otimes Id)\cdot \chi_\tau,\\
\chi_{\tau,\sigma,\lambda} &= (e_\lambda \otimes \omega_\sigma)\cdot \chi_\tau,\\
\omega_{\tau,\lambda} &= \chi_{\tau,\lambda}\cdot \mu,\\
\omega_{\tau,\sigma,\lambda} &= \chi_{\tau,\sigma,\lambda}\cdot \mu
\end{aligned}$$

とおく。

定義 3.1. $\phi \in \mathcal{B}(F_{\tau,\lambda})$に対して

$$(\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi)(g) = \int_K \tau(k)\phi(gk)dk \quad (g \in G)$$

と定義し$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}$をポアソン変換と呼ぶ。

容易に

$$(\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi)(g) = \int_K e^{-(\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))}\tau(\kappa(g^{-1}k))\phi(k)dk$$

がわかるので、$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi$は$G$上解析的であり、$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}$は$\mathcal{B}(F_{\tau,\lambda})$から$E_\tau$の解析的切断全体$\mathcal{A}(E_\tau)$への写像であることがわかる。

$\Psi_{\tau,\lambda}(g) = e^{-(\lambda+\rho)(H(g^{-1}))}\tau(\kappa(g^{-1}))$とおく。$\Psi_{\tau,\lambda}$が解析的で$K$がコンパクトであることより次の補助定理を得る。

補助定理 3.2. $D \in U(\mathfrak{g}_c)^K$に対して、$\Psi_{\tau,\lambda}(g;D) = \Psi_{\tau,\lambda}(g)\cdot\omega_{\tau,\lambda}(D)$ $(g \in G)$

$\sigma \in R_\tau$に対し、H_σをG/K上の自明なベクトル束とみなす。この時$F_{\tau,\lambda}$は$\sum_{\sigma\in R_\tau} F_{\sigma,\lambda}\otimes H_\sigma$に同型なので

$$\mathcal{B}(F_{\tau,\lambda}) \cong \sum_{\sigma\in R_\tau} \mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})\otimes H_\sigma \quad (\text{直和})$$

となる。この同型により$\mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})\otimes H_\sigma$を$\mathcal{B}(F_{\tau,\lambda})$の部分空間とみなし、$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}$の$\mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})\otimes H_\sigma$への制限を$\mathcal{P}_{\tau,\sigma,\lambda}$と書く。

$H_{\tau,\sigma}$ $(\sigma \in R_\tau)$で$\mathrm{Hom}_M(V, V_\sigma)$を表す。また$u \in \mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})$で

$$d(\tau)\int_K \overline{\mathrm{tr}(\tau(k))}\pi_{\sigma,\lambda}(k)udk = u$$

を満たすものの全体を$\mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})^\tau$と書く。このとき$V\otimes H_{\tau,\sigma}$は$\mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})^\tau$と同型になる（フロベニウスの相互律)。この同型を$\Gamma_{\sigma,\lambda}$とおく。

さて(χ, H)を$(\chi_{\tau,\sigma,\lambda}, H_\sigma)$の部分表現とすると

$$D(E_\tau)/\ker\chi \cong \chi(D(E_\tau)) \subset \mathrm{End}H \cong H\otimes H^* \subset H_\sigma \otimes H^* \cong (H_{\tau,\sigma}\otimes H)^*$$

となるので、上の包含関係$D(E_\tau)/\ker\chi \subset (H_{\tau,\sigma}\otimes H)^*$の転置として得られる$H_{\tau,\sigma}\otimes H$から$(D(E_\tau)/\ker\chi)^*$の上への写像を$p_\chi$と定める。

補助定理 3.3. (χ, H) を $(\chi_{\tau,\sigma,\lambda}, H_\sigma)$ の部分表現とする。このとき

(i) $\mathcal{P}_{\tau,\sigma,\lambda}$ は $\mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda}) \otimes H$ から $\mathcal{A}(E_\tau)$ への $G-$準同型写像で

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda}) \otimes H & \xrightarrow{Id\otimes\chi(\Delta)} & \mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda}) \otimes H \\ \big\downarrow \mathcal{P}_{\tau,\sigma,\lambda} & & \big\downarrow \mathcal{P}_{\tau,\sigma,\lambda} \\ \mathcal{A}(E_\tau) & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{A}(E_\tau) \end{array}$$

はすべての$\Delta \in D(E_\tau)$ について可換となる。従って

$$\mathcal{P}_{\tau,\sigma,\lambda} : \mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda}) \otimes H \longrightarrow \mathcal{A}(E_\tau, \chi),$$
$$\mathcal{P}_{\tau,\sigma,\lambda} : \mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})^\tau \otimes H \longrightarrow \mathcal{A}(E_\tau, \chi)^\tau.$$

(ii) 第 2 節で定義された s_χについて次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})^\tau \otimes H & \xleftarrow{\Gamma_{\sigma,\lambda}\otimes Id} & V \otimes H_{\tau,\sigma} \otimes H \\ \big\downarrow \mathcal{P}_{\tau,\sigma,\lambda} & & \big\downarrow Id \otimes p_\chi \\ \mathcal{A}(E_\tau, \chi)^\tau & \xrightarrow{s_\chi} & V \otimes (D(E_\tau)/\ker\chi)^*. \end{array}$$

定理 2.5, 補助定理 3.3と p_χが全射であることから次の定理が得られる。

定理 3.4. G を連結な中心有限の半単純リー群とし Kを G の極大コンパクト部分群とし、τを Kの有限次元既約表現とする。E_τを G/K 上のτに同伴する等質ベクトル束とする。(χ, H) を $(\chi_{\tau,\sigma,\lambda}, H_\sigma)$ の部分表現とする ($\sigma \in R_\tau$、$\lambda \in \mathfrak{a}_c^*$)。このとき

(i) 写像 s_χは $\mathcal{A}(E_\tau, \chi)^\tau$から $V \otimes (D(E_\tau)/\ker\chi)^*$の上への同型である。

(ii) $\mathcal{B}(F_{\sigma,\lambda})^\tau \otimes H$と $V \otimes H_{\tau,\sigma} \otimes H$ を同一視すると

$$\mathcal{P}_{\tau,\sigma,\lambda}(V \otimes H_{\tau,\sigma} \otimes H) = \mathcal{A}(E_\tau, \chi)^\tau,$$
$$\ker \mathcal{P}_{\tau,\sigma,\lambda} \cap V \otimes H_{\tau,\sigma} \otimes H = V \otimes \ker p_\chi.$$

(iii) 次の条件は互いに同値である：

1) $\chi_{\tau,\sigma,\lambda}$は既約.

2) $\dim \mathcal{A}(E_\tau, \chi_{\tau,\sigma,\lambda})^\tau = d(\tau)[\tau : \sigma]^2$.

3) $\mathcal{P}_{\tau,\sigma,\lambda}$は $V \otimes H_{\tau,\sigma} \otimes H_\sigma$の上で単射的.

参考文献

1. BOURBAKI, N., *Éléments de Mathématique, Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 1, Hermann, Paris, 1960.

2. CASSELMAN, W. and D. MILICIČIČ, *Asymptotic behavior of matrix coefficients of admissible representatios*, Duke Math. J., **49** (1982),869-930.

3. DIXMIER, J., *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villards, Paris, 1974.

4. HARISH-CHANDRA, *Representatios of a semisimple Lie groups on a Banach space*, I, Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953), 185-243.

5. HARISH-CHANDRA, *Spherical functions on a semisimple Lie group*, I, II, Amer. J. Math., **80** (1958), 241-310, 553-613.

6. HARISH-CHANDRA, *Harmonic analysis on real reductive groups*, I, J. Funct. Anal., **19** (1975), 104-204.

7. HELGASON, S., *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1962.

8. HELGASON, S., *Invariant differential operators on homogeneous manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc., **83** (1977), 751-774.

9. LEPOWSKY, J., *Algebraic results on representations of semisimple Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **176** (1973), 1-44.

10. LEPOWSKY, J. and G. W. McCOLLUM, *On the determination of irreducible modules by restriction to a subalgebra* , Trans. Amer. Math. Soc., **176** (1973), 45-57.

11. MINEMURA, K., *Invariant differential operators and spherical sections on a homogeneous vector bundle* , to appear in Tokyo Journal of Mathematics.

12. OKAMOTO, K., *Harmonic analysis on homogeneous vector bundles*, Lecture Notes in Math. **266**, Springer, 1972, 255-271.

13. RADER, C., *Spherical functions on a semi-simple Lie group*, Lecture Notes in Representation Theory, Unviversity of Chicago, 1976.

14. SATO, M., *Theory of hyperfunctions*, I, II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, **8** (1959), 139-193, **8** (1960), 387-437.

15. SATO, M., T. KAWAI and M. KASHIWARA, *Microfunctions and pseudo-differential equations*, Lecture Notes in Math., **287**, Springer, 1973.

16. WALLACH, N. R., *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Marcel Dekker, New York, 1973.