

相対論的 Schrödinger 作用素のスペクトル・散乱理論

姫路工大理 榎田登美男 (Tomio Umeda)

1. 序

相対論的 Schrödinger 作用素は相対論的なスピンなし粒子の状態を記述する作用素である。この粒子の classical Hamiltonian は

$$\sqrt{|\xi - a(x)|^2 + m^2} + V(x)$$

( $x, \xi \in \mathbf{R}^n$ ,  $m > 0$ . また, 電荷  $e = 1$  とした.) であり, 量子力学へ移行するには Weyl 量子化 Hamiltonian

$$(1.1) \quad H = h^w(x, D) + V(x)$$

を採用するのが自然であると考えられる。ここで  $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$  は magnetic potential,  $V(x)$  は electric potential である。相対論的なスピンなし粒子の状態を調べるには歴史的には Klein-Gordon 方程式が用いられてきたようであるが, 相対論的 Schrödinger 作用素は Klein-Gordon 方程式に比していくつかの利点を持っている。このことについては Herbst[3] 見られたい。

相対論的 Schrödinger 作用素  $H$  に対する数学的に厳密な取扱いは筆者の知る限りでは Weder[13] が最初である。Weder が扱ったのは磁場がない場合 ( $a(x) \equiv 0$ ) であるが, この場合にはその後多くの研究がなされている。例えば Carmona-Masters-Simon[1]

の References を見られたい。磁場がある場合の研究は Ichinose-Tamura[5] が最初であろう。その後、相対論的 Schrödinger 作用素  $H$  の自己共役性に関して研究が進み、Nagase-Umeda[10], Ichinose[4] によってほぼ満足できる結果がえられている。

ここでの目的は磁場がある場合に作用素  $H$  のスペクトルを調べることである。この場合にはスペクトルに関する結果はまだ皆無と言ってよく、したがって以下に述べる結果は未だ初歩的段階である。

## 2. $H$ の本質的スペクトル

はじめに  $H$  の自己共役性とその自己共役実現の定義域について考察する。方法は摂動論的である。

$$(2.1) \quad \begin{cases} H_0 = \sqrt{-\Delta + m^2}, \\ \text{Dom}(H_0) = H^1(\mathbf{R}^n). \end{cases}$$

により  $L^2(\mathbf{R}^n)$  での作用素  $H_0$  を定義すると、 $H_0$  は自己共役である。ただし

$$H^l(\mathbf{R}^n) = \{u \in S' \mid \int (1 + |\xi|^2)^l |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty\}$$

$S$  急減少函数族。

さて、 $a(x)$ ,  $V(x)$  に対する仮定を述べよう。

(A)  $a_j(x)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) は有界な実数値  $C^\infty$ -函数で、任意の  $\alpha \neq 0$  について

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha a_j(x) \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty).$$

(V)  $V(x)$  は実数値可測函数であって

$$V(-\Delta + 1)^{-1/2} : L^2(\mathbf{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}^n)$$

は compact 作用素である. 但し  $V = V(x) \times$ .

仮定 (A) の下  $h(x, \xi)$  は  $S^1(= S^1_{1,0})$  クラスの symbol と見なせ, このとき  $h(x, \xi)$  を Weyl symbol にもつ擬微分作用素

$$h^w(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi$$

は  $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  上本質的自己共役になる. このことはすでにしられている事実である. しかし, 次の補題の証明を見ればわかるように仮定 (A) の下では  $h^w(x, D)$  on  $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  の自己共役実現の定義域を調べる際に, いわば「おまけ」として得られる.

**補題 2.1** 仮定 (A) の下

- (i)  $h^w(x, D)$  は  $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  上本質的自己共役である.
- (ii)  $H_1$  を  $h^w(x, D)$  on  $C_0^\infty$  の自己共役実現とすると

$$\text{Dom}(H_1) = H^1(\mathbf{R}^n.)$$

**証明.**  $s(x, \xi) = \sqrt{|\xi|^2 + m^2} - h(x, \xi)$  と置くと  $s(x, \xi) \in S^0$  である. したがって  $S := s^w(x, D)$  は  $L^2(\mathbf{R}^n)$  上の自己共役な有界作用素に拡張できる. このとき (2.1) を用いると  $H_0 + S$  は  $H^1(\mathbf{R}^n)$  を定義域とする自己共役作用素であることがわかる.  $H_0$  は

$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  上本質的自己共役であるから, 加藤-Rellich の定理により  $H_0 + S$  も  $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

上本質的自己共役である.  $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  に対して

$$h^w(x, D)u = (H_0 + S)u$$

であることに注意すると主張 (i) が成り立つことがわかる. このとき  $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  を定義域

として考えた  $h^w(x, D)$  の自己共役拡張は一意的となるので,  $H_1 = H_0 + S$ . したがって

主張 (ii) が成り立つ.

(証明終わり)

(1.1) の作用素  $H$  の自己共役性は仮定 (V) と補題 2.1(ii) から容易に示される. 実際

$$(2.2) \quad V(H_1 + i)^{-1} = V(-\Delta + 1)^{-1/2} \cdot (-\Delta + 1)^{1/2}(H_1 + i)^{-1}$$

と分解すると (2.2) の右辺は compact となる. そこで

$$H := H_1 + V$$

と定義すると  $H$  は  $H^1(\mathbf{R}^n)$  を定義域とする自己共役作用素となって, 作用素 (1.1) の自

己共役実現がえられる.

主定理を述べるために magnetic potential  $a(x)$  を持つ Schrödinger 作用素  $T$  を導入

しよう. 即ち, 自己共役作用素  $T$  を

$$(2.3) \quad \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial}{i\partial x_j} - a_j(x) \right)^2 + m^2 \quad \text{on } C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$$

の closure とする (cf. Ikebe-Kato[6]). 主定理は次の通り.

定理 1. 仮定 (A), (V) の下

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \sqrt{\sigma_{\text{ess}}(T)}.$$

注意.  $\Sigma \subset [0, \infty)$  に対し  $\sqrt{\Sigma} := \{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \Sigma\}$ .

定理 1 から  $H$  および  $H_1$  の本質的スペクトルに関していくつかの結果が導かれる.

ただし  $n \geq 4$  の場合には, 仮定 (A), (V) に加えて, 次の仮定を置く:

(G) 次の条件 (i), (ii) を満たすような滑らかな magnetic potential  $b(x)$  が存在する:

(i)  $\text{curl } a(x) = \text{curl } b(x),$

(ii)  $|x| \rightarrow \infty$  のとき  $b(x) \rightarrow 0.$

これは magnetic Schrödinger 作用素のゲージ不変性に関する仮定である. 詳しくは

Leinfelder[9], Cycon-Froese-Kirsch-Simon[2] を見られたい.

定理 2. 仮定 (A), (V), (G) の下

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [m, \infty).$$

定理 3.  $n = 2$ , または  $3$  とする. 仮定 (A), (V) の下

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [m, \infty).$$

作用素  $H_1$  に関しては

定理 4. 仮定 (A), (V) の下

$$\sigma(H_1) = \sigma_{\text{ess}}(H_1) = [m, \infty).$$

定理 5.  $n = 2$ , または  $3$  とする. 仮定 (A) の下

$$\sigma(H_1) = \sigma_{\text{ess}}(H_1) = [m, \infty).$$

### 3. 証明

この節では定理 1 の証明の概略について述べる. 定理 2, 3 は定理 1 と既によく知られている結果 [9], [2] を組み合わせたものである. 定理 4, 5 は Ichinose[4] による美しい結果

$$(3.1) \quad H_1 \geq m$$

と定理 2, 3 を組み合わせたものである. 実は 定理 1 の証明にも (3.1) を使う.

以下で用いる記号について:

$$p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta p(x, \xi).$$

補題 3.1 仮定 (A) の下

$$|h_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq \begin{cases} C_\alpha \langle \xi \rangle^{1-|\alpha|} & (\beta = 0) \\ C_{\alpha\beta}(x) \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} & (\beta \neq 0). \end{cases}$$

ここで  $C_{\alpha\beta}(x)$  は  $\mathbf{R}^n$  上有界な連続関数で  $|x| \rightarrow \infty$  のとき  $C_{\alpha\beta}(x) \rightarrow 0$ .

証明  $\psi(\xi) = \sqrt{|\xi|^2 + m^2}$  と置くと  $h(x, \xi) = \psi(\xi - a(x))$  となる.

$$\left| \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha \psi(\xi) \right| \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{1-|\alpha|}$$

であることと

$$(3.2) \quad h^{(\alpha)}(x, \xi) = \psi^{(\alpha)}(\xi - a(x))$$

に注意すると

$$(3.3) \quad |h^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_\alpha \langle \xi - a(x) \rangle^{1-|\alpha|}$$

となる. 仮定 (A) により

$$(3.4) \quad c_0 \langle \xi \rangle \leq \langle \xi - a(x) \rangle \leq c_1 \langle \xi \rangle$$

だから (3.3) と (3.4) を合わせて  $\beta = 0$  の場合の評価を得る.  $|\beta| = 1$  のとき (3.2) より

$$h_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} \right)^{(\alpha)} (\xi - a(x)) \left( - \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta a_j(x) \right)$$

上の式と (3.3), (3.4) を合わせると

$$|h_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_\alpha \left( \sum_{j=1}^n \left| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta a_j(x) \right| \right) \langle \xi \rangle^{-|\alpha|}$$

となり, これと仮定 (A) を合わせて  $|\beta| = 1$  のときには求める性質を持つ  $C_{\alpha\beta}(x)$  が取れ

ることがわかる.  $|\beta| \geq 2$  のときも同様である.

(証明終わり)

定理 1 の証明の鍵となるのはつぎの補題である.

補題 3.2 仮定 (A) の下

$$[h^w(x, D)]^2 = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial}{i\partial x_j} - a_j(x) \right)^2 + m^2 + r^w(x, D) \quad \text{on } S.$$

ここで  $r(x, \xi) \in \dot{S}^{-1}$ .

泥縄式であるが symbol class を導入しよう.

定義.  $p(x, \xi) \in \dot{S}^\mu$  とは, 任意の  $\alpha, \beta$  に対して  $\mathbf{R}^n$  上有界な函数  $C_{\alpha\beta}(x)$  で次の

(i), (ii) を満たすものが存在するときをいう:

$$(i) \quad C_{\alpha\beta}(x) \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty),$$

$$(ii) \quad \left| p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha\beta}(x) |\xi|^{\mu-|\alpha|}.$$

定理 1 の証明においては次の性質を用いる:

(3.5)  $p \in \dot{S}^\mu$ ,  $\mu < 0$  のとき  $p^w(x, D)$  は  $L^2(\mathbf{R}^n)$  で compact である.

これについては熊ノ郷 [8] を見られたい.

補題 3.2 の証明の概略.  $[h^w(x, D)]^2$  の symbol を  $h \circ h(x, \xi)$  とかく. Iwasaki-

Iwasaki[7, §A.2] によれば

$$h \circ h = h^2 + \frac{1}{2i} \{h, h\} + r,$$

ただし

$$r(x, \xi) = \int_0^1 (1-\theta) q(x, \xi, \theta) d\theta,$$



$$(3.6) \quad q(x, \xi, \theta) = -\frac{1}{4} \sum_{|\alpha+\beta|=2} (-1)^{|\alpha|} \frac{2!}{\alpha!\beta!} \times \\ \times (2\pi)^{-2n} \text{Os-} \iint e^{-i\zeta \cdot z} h_{(\beta)}^{(\alpha)} \left( x + \frac{z_2}{2}, \xi - \theta\zeta_1 \right) h_{(\alpha)}^{(\beta)} \left( x - \frac{z_1}{2}, \xi - \theta\zeta_2 \right) dz d\zeta,$$

$$z = (z_1, z_2), \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2).$$

ところで

$$\{h, h\} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial h}{\partial \xi_j} \frac{\partial h}{\partial x_j} - \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial \xi_j} \right) = 0$$

だから、補題を証明するためには  $r \in \dot{S}_{1,0}^{-1}$  を示せばよい。これは補題 3.1 を用いて (3.6)

式の右辺を評価すればよい。

(証明終わり)

定理 1 の証明にはつぎの抽象的な補題も必要である。

**補題 3.3**  $H, T$  を Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  における自己共役作用素,  $R$  を  $\mathcal{H}$  における  $T$ -compact な対称作用素とする。  $H \geq 0$  かつ  $H^2 = T + R$  ならば

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \sqrt{\sigma_{\text{ess}}(T)}.$$

補題 3.3 はスペクトル写像定理と本質的スペクトルに関する Weyl の定理の組み合わせである。

**定理 1 の証明.**  $T$  を (2.3) で定めた作用素,  $H_1$  を  $h^w(x, D)$  on  $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  の自己共役実現 (cf. 補題 2.1),  $R$  を補題 3.2 の  $r(x, \xi)$  を Weyl symbol に持つ擬微分作用素

とする。このとき補題 3.2 から

$$H_1^2 = T + R$$

が従うので, (3.1), (3.5) に注意して補題 3.3 を適用すればよい。 (証明終わり)

#### 4. $H$ の絶対連続スペクトル

この節では  $a(x)$ ,  $V(x)$  に対する仮定を強めて  $H$  の絶対連続スペクトルについて調べよう。方法は散乱理論における時間依存的方法, いわゆる Enss method によるものである。

( $\tilde{A}$ )  $\epsilon > 0$  が存在して, 任意の  $\alpha$  について

$$\left| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha a_j(x) \right| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-1-\epsilon}.$$

( $\tilde{V}$ )  $\epsilon' > 0$  が存在して,  $|V(x)| \leq C \langle x \rangle^{-1-\epsilon'}$ .

作用素  $S$  を補題 2.1 の証明の中で定義したものとする

$$H = H_0 + S + V$$

が成り立つ。仮定 ( $\tilde{A}$ ), ( $\tilde{V}$ ) により  $H$  を  $H_0$  の短距離型の摂動と見なせる。

補題 4.1 仮定 ( $\tilde{A}$ ) の下,  $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$  に対し

$$\left\| S \langle D \rangle^{-n-1} u \right\|_{L^2} \leq C \left\| \langle x \rangle^{-1-\epsilon} u \right\|_{L^2}.$$

証明は  $S\langle D \rangle^{-n-1}$  を積分作用素に書き直して積分核の評価をすればよい。さて

$$F_R := \chi_{\{|x| \geq R\}}(x) \times$$

とおくと

$$(4.1) \quad \|S\langle D \rangle^{-n-1} F_R\| + \|V F_R\| \leq C(1+R)^{-1-\epsilon''}$$

(ただし  $\epsilon'' = \min(\epsilon, \epsilon')$ ) が成り立つ。(4.1) はいわゆる Enss Condition であり, routine work により次の 2 つの定理を得る (cf. Simon[11], Umeda[12]) .

定理 6. 仮定  $(\tilde{A})$ ,  $(\tilde{V})$  の下

(i) 波動作用素

$$W_{\pm} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}$$

が存在して完全性が成り立つ, 即ち  $\text{Ran}(W_{\pm}) = \mathcal{H}_{ac}(H_0)$ .

(ii)  $\mathcal{H}_{sc}(H) = \{0\}$ .

定理 7. 仮定  $(\tilde{A})$ ,  $(\tilde{V})$  の下

(i)  $\sigma_{ac}(H) = [m, \infty)$ ,  $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$

(ii)  $\sigma_p(H)$  の集積点は高々  $m$  のみであって, しかも  $(m, \infty)$  に存在する  $H$  の固有値は重複度有限である.

## References.

- [1] R. Carmona, W.C. Masters and B. Simon, Relativistic Schrödinger operators: Asymptotic behavior of the eigenfunctions, *J. Funct. Analysis* **91**(1990), 117-142.
- [2] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch and B. Simon, Schrödinger operators, Springer-Verlag, 1987.
- [3] I.W. Herbst, Spectral theory of the operators  $(p^2 + m^2)^{1/2} - Ze^2/r$ , *Commun. Math. Phys.* **53**(1977), 285-294.
- [4] T. Ichinose, Essential selfadjointness of the Weyl quantized relativistic hamiltonian, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. théor.* **51**(1989), 265-298.
- [5] T. Ichinose and H. Tamura, Imaginary-time path integral for a relativistic spinless particle in an electromagnetic field, *Commun. Math. Phys.* **105**(1986), 239-259.
- [6] T. Ikebe and T. Kato, Uniqueness of the self-adjoint extension of singular elliptic differential operators, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **9**(1962), 77-92.
- [7] C. Iwasaki and N. Iwasaki, Parametrix for a degenerate parabolic equation and its application to the asymptotic behavior of spectral functions for stationary problems, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **17**(1981), 577-655.
- [8] 熊ノ郷 準, 擬微分作用素, 岩波書店, 1974.
- [9] H. Leinfelder, Gauge invariance of Schrödinger operators and related spectral properties, *J. Op. Theory* **9**(1983), 163-179.
- [10] M. Nagase and T. Umeda, On the essential self-adjointness of quantum Hamilto-

- nians of relativistic particles in magnetic fields, *Sci. Rep. Col. Gen. Educ. Osaka Univ.* **36**(1987), 1-6.
- [11] B. Simon, Phase space analysis of simple scattering system: Extensions of some work of Enss, *Duke Math. J.* **46**(1979), 119-168.
- [12] T. Umeda, Scattering theory for pseudo-differential operators II. The completeness of wave operators, *Osaka J. Math.* **19** (1982), 511-526.
- [13] R. Weder, Spectral properties of one-body relativistic spin 0 Hamiltonians, *Ann. Inst. Henri Poincaré Ser. A.2* (1974), 211-220.