数理解析研究所講究録
第 780 巻 1992 年 157-164

S^2-値の Harmonic maps について

名古屋大学理学部　　笹原康浩

1.Introduction

B, S^2 を $\mathbf{R}^3$ の単位球, 及び単位球面とする. この時, 与えられた滑らかな境界値 $\phi : S^2 \to S^2$ に対し, ソボレフ空間 $H^1_\phi(B;S^2) := \left\{ v \in H^1(B;\mathbf{R}^3); v(x) \in S^2 \quad \text{for a.e. } x \in B. \right\}$ とする. エネルギー汎関数 $E(v) := \int |\nabla v|^2 \, dx$ の $H^1_\phi(B;S^2)$ における停留点を Harmonic map と呼ぶ. すなわち, $u \in H^1_\phi(B;S^2)$ が harmaonic map であるとは, 任意の $v(\cdot,t) : [-1,1] \to H^1_\phi(B;S^2)$ が

$$
(1) \qquad \begin{cases} v(\cdot,0) = u, \\ \dfrac{dv(\cdot,t)}{dt} \in C([-1,1]; H^1_0 \cap L^\infty(B;\mathbf{R}^3)) \end{cases}
$$

を満たすとき

$$
\left. \frac{dE(v)}{dt}(\cdot,t) \right|_{t=0} = 0
$$

が成立することである. この Harmonic map は, 次の方程式の弱解である.

$$
(2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u|\nabla u|^2 & \text{in } B \\ u = \phi & \text{on } \partial B \end{cases}
$$

エネルギー汎関数 E の Minimizer は, Harmonic map であり, [6,Schoen-Uhlenbeck] の結果を用いて正則性について次のようなことがいえる.

Corollary 1. u は E の $H^1_\phi(B;S^2)$ における *Minimizer* とする．このとき，u は有限個の特異点を除いて滑らかである．さらに特異点 $x_0 \in B$ が存在すれば，その近傍で

$$(3)\qquad u(x) \simeq \omega\left(\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\right) \qquad \textit{for some Harmonic map } \omega \textit{ from } S^2 \textit{ onto itself.}$$

である．すなわち，十分小さい正の数 μ に対して $u_\mu(x) := u(x_0+\mu x)$ *for* $x \in B$ とすると $u_\mu \to \omega(x/|x|)$ *in* H^1 *strongly as* $\mu \to 0$ である．

Remark 1. S^2 から S^2 への *Harmonic map* は *meromorphic* または *anti-meromorphic* なものに限られることが知られている．S^2 から S^2 への *Harmonic map* ω に対し，

$$u(x) = \omega\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

と定めると，u は B から S^2 への *Harmonic map* となる．このように動径方向の微分が消えているものを，本稿では *Tangential harmonic map* とよぶ．

しかし，Harmonic map はエネルギー汎関数の Minimizer だけとは限らない．実際，

$$(4)\qquad \begin{cases} v(\cdot,0)=u_0, \quad v(\cdot,1)=u_1 \\ \dfrac{dv(\cdot,t)}{dt} \in C([0,1];H^1_0 \cap L^\infty(B;\mathbf{R}^3)) \end{cases}$$

となるような $v(\cdot,t):[0,1] \to H^1_\phi(B;S^2)$ が存在するとき，$u_0 \equiv u_1$ として同値関係を定めると，各同値類における Minimizer は，もし存在すれば Harmonic map であることが (1) から容易にわかる．

ただし，Target manifold が S^2であるため各同値類での Minimizing sequence が強収束するとは限らない．(Target manifold の曲率が非正であれば，各ホモトピー類ごとに Harmonic map が存在することが知られている．) エネルギー汎関数の Minimizer 以外

の Harmonic map の存在については, [1,Bethuel-Brezis] によって, 境界値 ϕ が定数でないときには, 無限個の Harmonic map が存在することがわかっている.

次節では, エネルギー汎関数の Minimizer 以外の Harmonic map について知る上で重要な役割を果たす Relaxed Energy を紹介する. 三節では, Tangential harmonic map の性質を用いて, Relaxed Energy の Minimizer の特異点に関する主結果をを示す.

2.Relaxed Energies

前節で定めたような同値類を直接扱うことは出来ないので, ここであらためて同値関係を定義する. まず最初に

$$R_\phi(B;S^2) := \{v \in H^1_\phi(B;S^2);\ \text{有限個の点を除いて } C^2.\ \}$$

とする. この時, 特異点 x_0に対し, 十分小さい r をとれば $v|_{\partial B_r(x_0)}$ は連続で, その写像度は一定である. 特異点の degree を この写像度によって定める. $u, v \in R_\phi(B;S^2)$ に対し u, v の特異点とその degree が一致するとき u と v は同値であるとする. u_0 と u_1 が同値でないとき, (4) を満たす v が存在しないことは容易にわかる.

この同値関係を次のように $H^1_\phi(B;S^2)$ に拡張する. まず, $D : H^1_\phi(B;S^2) \to L^1(B;\mathbf{R}^3)$ を次のように定める.

$$D(v) := \begin{pmatrix} v \cdot v_y \wedge v_z \\ \\ v \cdot v_z \wedge v_x \\ \\ v \cdot v_x \wedge v_y \end{pmatrix} \tag{5}$$

この $D(v)$ は次を満たす.

$$\mathrm{div} D(v) = 4\pi d_i \delta_{x_i} \tag{6}$$

ここで x_i は v の特異点で, d_i はその degree, δ は Dirac のデルタ関数である. さらに, $u, v \in H^1_\phi(B; S^2)$ に対し,

$$L(u,v) := \frac{1}{4\pi} \sup_{\substack{\zeta : B \to \mathbf{R} \\ \|\nabla\zeta\|_\infty \le 1}} \left\{ \int_B \nabla\zeta \cdot (D(u) - D(v))\, dx \right\} \tag{7}$$

とし, $L(u,v) = 0$ の時 $u \equiv v$ とする. この L を $R_\phi(B; S^2)$ に制限すると

$$L(u,v) = \frac{1}{4\pi} \sup_{\substack{\zeta : B \to \mathbf{R} \\ \|\nabla\zeta\|_\infty \le 1}} \left\{ \int_B \zeta\, (\mathrm{div} D(u) - \mathrm{div} D(v))\, dx \right\}$$

であり, $L(u,v) = 0$ となるための必要十分条件は, u, v の特異点とその degree が一致することである. これは前述の同値関係の自然な拡張である.

しかし前節でも述べたように, 各同値類での Minimizing sequence が強収束するとは限らない. ここでその例を示しておく.

Example 1. [2, Brezis-Coron-Lieb] 境界値 $\phi \equiv (0,0,-1)$ とし, 正の整数 d を適当に定める.

$$R_{\pm a} := \{v \in R_\phi(B; S^2); a_\pm = (0,0,\pm 1/2) \text{ で degree } \pm d \text{ の特異点を持つ.}\}$$

とすると $R_{\pm a}$ において 強収束しない Minimizing sequence が存在する.

$\omega : \bar{\mathbf{C}} \to S^2$ を次のように定める.

$$\omega(z) := \Pi(\chi z^{-d}) \tag{8}$$

ここでΠ は $(0,0,1)$ を極とする $\mathbf{R}^2$ から S^2 への立体射影, χ を $0 \le \chi \le 1$ で supp$\chi \subset B_{1/2}$, $\chi \equiv 1$ on $B_{1/4}$ なる滑らかな関数とする. この ω を用いて

$$\begin{cases} v_n(x,y,z) := \omega\left(\dfrac{nx}{1/4 - z^2}, \dfrac{ny}{1/4 - z^2}\right) & \text{if } |z| \le 1/2; \\ v_n(x,y,z) := (0,0,-1) & \text{if } |z| > 1/2. \end{cases} \tag{9}$$

とすると $v_n \in R_{\pm a}$ であり, $E(v_n) \to 8d\pi$. v_n が強収束しないことは明らかである.

つぎに

$$\inf_{v \in R_{\pm a}} E(v) \geq 8d\pi \tag{10}$$

を示して v_n が $R_{\pm a}$における Minimizing sequence であることを証明する.

一般に $|L(v)|_1 \leq \frac{1}{2}|\nabla v|^2$ であるから

$$\int_B |L(v) \cdot \mathrm{e}| \leq \frac{1}{2} E(v)$$

が成立する. ただし, $\mathrm{e} = (0,0,1)$ である. (6) と Gauss の定理から $v \in R_{\pm a}$ に対し

$$\int_{B \cap \{z=t\}} L(v) \cdot \mathrm{e} = 4d\pi, \qquad \text{for } |t| < 1/2. \tag{11}$$

これから

$$\begin{aligned}\int_B |L(v) \cdot \mathrm{e}| &\geq \int_{-1/2}^{1/2} \left| \int_{B \cap \{z=t\}} L(v) \cdot \mathrm{e} \right| dt \\ &= 4d\pi\end{aligned}$$

を得る. よって任意の $v \in R_{\pm a}$ に対し, $E(v) \geq 8d\pi$ であり, v_n は $R_{\pm a}$ での Minimizing sequence である.

前述の $L : H^1_\phi(B; S^2) \to L^1(B; \mathbf{R}^3)$ を用いて Relaxed Energy を次のように定める. 適当に与えられた$\eta \in R^1_\phi(B; S^2)$ に対し

$$E_\eta(v) := \int_B |\nabla v|^2 + 8\pi L(\eta, v) \tag{12}$$

とする. このとき

$$\min_{v \in H^1_\phi(B; S^2)} E_\eta(v) = \inf_{\substack{v \in H^1_\phi(B; S^2) \\ L(\eta, v) = 0}} E(v) \tag{13}$$

が成立する．これは 任意の $v_0 \in R_\phi(B;\mathbf{R}^3)$ に対し Example 1. の関数列を用いて，

$$
(14) \qquad \begin{cases} L(\eta, u_n) = 0, \\ \lim_{n\to\infty} E(u_n) = E(v_0) + 8\pi L(\eta, v_0), \end{cases}
$$

となるような u_n が構成できることと，$R_\phi(B;\mathbf{R}^3)$ が $H^1_\phi(B;\mathbf{R}^3)$ で稠密であることから導かれる．

この汎関数 E_η は下に弱半連続であり，その Minimizer v_0 は自身が属する同値類でのエネルギー汎関数 Eの Minimizer でもあることから，Harmonic map となる．

Bethuel-Brezis は Non-constant な Harmonic map u_0 に対して

$$
\inf E_\eta(v) < E_\eta(u_0)
$$

となるような Relaxed Energy E_η が構成できることを示して境界値 ϕ が定数でないとき無限個の Harmonic maps が存在することを証明した．

3.Tangential harmonic maps

$H^1_\phi(B;S^2)$ での Harmonic maps の構造をより精密に知るために E_η の Minimizer の $B \setminus \operatorname{supp}\operatorname{div}D(\eta)$ 上での正則性は重要な問題であるが未だ解決に至っていない．ここでは，Tangential harmonic map に関する次の結果を用いて $B \setminus \operatorname{supp}\operatorname{div}D(\eta)$ 上の特異点の性質について述べる．

Proposition 1. $\phi : S^2 \to S^2$ を *Harmonic map*, $\eta \in R_\phi(B;\mathbf{R}^3)$ は $0 \notin \operatorname{supp}\operatorname{div}D(\eta)$ なるものとする．このとき

$$
(15) \qquad \inf_{v\in H^1_\phi(B;\mathbf{R}^3)} E_\eta(v) < E_\eta\left(\phi\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)
$$

が成立する.

Sketch of Proof. $u_0 := \phi(x/|x|)$ とし u_0 が E_η の Minimizer であると仮定して矛盾を導く. ϕ の degree が ± 1 のときは容易であるから, ϕ の degree $d \geq 2$ とし, η は重複度もこめてちょうど d 個の特異点を持つものとする. (この仮定によって一般性が失われることはない.) さらに $\nu_1 \ldots \nu_d$ を与えられた特異点の S^2 への射影とする.

このとき任意の $a \in B$ に対し $u_a(x) := \phi(a+t(x-a))$ (ただし $t>0$ は $|a+t(x-a)|=1$ となるようにとる.) とすると $E_\eta(u_0) \leq E_\eta(u_a)$ であることから

$$\begin{aligned} M &:= \sum_{i=1}^{d} \nu_i \\ &= -\frac{1}{8\pi}\int_{S^2} |\nabla_{S^2}\phi|^2 \sigma \, d\sigma \end{aligned} \tag{16}$$

を得る.

また, ν_i は ϕ の分岐点上にあってその重複度は高々その分岐点の分岐度であることもわかる. このとき, (16) が成立するためには $|M|^2 \leq d(d-2)$ でなければならない.

ところが, [2, §7.C] の結果を用いて $|M|^2 \leq d(d-2)$ ならば

$$\min_{v \in H^1_\phi(B;\mathbf{R}^3)} E_\eta(v) < E_\eta(u_0)$$

を得ることができる. これは, u_0 が Minimizer であるという仮定に反する.

この Proposition 1. から次のことが得られる.

Corollary 2. *u を E_η の Minimizer とし, $x_0 \in B \setminus \operatorname{supp} \operatorname{div} D(\eta)$ をその孤立特異点とする. このとき, 十分小さい正の数 μ に対して $u_\mu(x) := u(x_0+\mu x)$ for $x \in B$ とすると, $u_\mu \to C$ in H^1 weakley as $\mu \to 0$ である.*

参考文献

1. F.Bethuel and H.Brezis, *Regularity of minimizers of relaxed problems for Harmonic maps* (to appear).
2. H.Brezis, J.M.Coron and E.Lieb, *Harmonic maps with defects*, Comm. Math. Phys. **107** (1986), 649-705.
3. M.Giaquinta, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, Princeton Univ. Press.
4. R.Hardt and F.H.Lin, *A remark on H^1 mappings*, Manuscripta Math. **56** (1986), 1-10.
5. R.Hardt, D.Kinderlehrer and F.H.Lin, *Stable defects of minimizers of constrained variational principles*, Ann. IHP, Analyse Nonlineaire **5** (1988), 297-322.
6. R.Schoen and K.Uhlenbeck, *A regularity theory for Harmonic maps*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 307-335.
7. ——, *Boundary regularity and the Dirichlet problem for Harmonic maps*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 253-268.