数理解析研究所講究録
第 781 巻 1992 年 6-17

Introduction to generalized character theory

京大理　田辺　理正　(Michimasa Tanabe)

M.Atiyahは[1]において，有限群 G の分類空間 BG の複素K理論 $K(BG)$ が G の複素表現環 $R(G)$ の augmentation ideal $I(G)=$(virtual dim0 representations) における完備化 $\widehat{R(G)}=\varprojlim_i R(G)/I(G)^i$ に環同型であることを示した。最近このAtiyahの結果がM.Hopkins, N.Kuhn, D.Ravenel [2]によってある種の v_n-周期的コホモロジー論にまで "generalized group character" (ここでは高次元群指標と呼ぶことにする。) という形で拡張されたが，以下これについて簡単な紹介をする。

1. Morava K 理論と高次元指標　p を素数とし E を Baas-Sullivan 構成によって得られるコホモロジー論でその mod p reduction が p における n 番目の Morava K 理論 $K(n)$ になっているものとする。E の p における完備化 $\varprojlim_i E^*(\cdot;\mathbb{Z}/p^i)$ を $\widehat{K(n)}^*(\cdot)$ と書き p 進 Morava K 理論と呼ぶことにする。以下では v_n-周期的コホモロジーと

しては，このMorava K理論だけを考えることにする。$\mathbb{C}_p$をp進数体$\mathbb{Q}_p$の代数的閉包のp進付値に関する完備化とし，$\mathbb{C}_p$の付値環を$\mathcal{O}_p$，付値イデアルを$\mathfrak{m}_p$とする。$\widehat{K(n)}^* = \widehat{K(n)}^*(pt) = \mathbb{Z}_p[v_n, v_n^{-1}]$の$\mathcal{O}_p$への埋め込みを一つ決めておいて$\widehat{K(n)}^*$を$\mathcal{O}_p$の部分環とみなすことにする。$G$を有限群，$H$をその部分群とするとtransfer map $\widehat{K(n)}^*(BH) \to \widehat{K(n)}^*(BG)$を定義できるが，これをinductionとして対応$G \longmapsto \widehat{K(n)}^*(BG)$は有限群の圏Groupから環の圏RingへのMackey関手になる。

次に$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^n, G)$を$\mathbb{Z}_p^n$から$G$への連続準同型（$G$は離散群と考える。）の全体とし，共役作用により$G$集合と考える。このとき

$$(1.1)\qquad Cl_{n,p}(G) = \mathrm{Map}_G(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^n, G), \mathbb{C}_p)$$

$$= \mathrm{Map}(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^n, G)/G, \mathbb{C}_p)$$

とすると$Cl_{n,p}(G)$は$\mathbb{C}_p$の和と積を用いて環になる。さらにHをGの部分群とするとき，

$$(1.2)\qquad \mathrm{ind}_H^G : Cl_{n,p}(H) \longrightarrow Cl_{n,p}(G)$$

を

$$(1.3)\qquad \mathrm{ind}_H^G(f)(\alpha)=\sum_{gH\in(G/H)^{\mathrm{Im}\,\alpha}} f(c_g\alpha)$$

によって定義することができる。ただし $f\in Cl_{n,p}(H)$, $\alpha\in Hom(\mathbb{Z}_p^n, G)$ で, $\mathrm{Im}\,\alpha$ は G/H に左から G の積によって作用するものとする。また c_g は g によって定まる G の内部自己同型とする。上の ind_H^G を induction として対応 $G\mapsto Cl_{n,p}(G)$ は Mackey 関手になる。

以上の定義のもとに Hopkins, Kuhn, Ravenel [2] の主結果（p 進 Morava K 理論に対する）は次のように述べられる。

定理1.4（[2]） Mackey 関手の間の自然変換

$$\chi_G : \widehat{K(n)}^*(BG)\longrightarrow Cl_{n,p}(G)$$

で，同型

$$\chi_G\otimes\mathbb{C}_p : \widehat{K(n)}^*(BG)\otimes_{\widehat{K(n)}^*}\mathbb{C}_p \xrightarrow{\cong} Cl_{n,p}(G)$$

を誘導するものが存在する。

上の定理のχが高次元群指標であるが，次の節でその構成について述べる。

2. 高次元指標の構成　まず通常の群指標について考える。Gを有限群，

$$(2.1)\qquad \mathcal{C}l(G) = \mathrm{Map}_G(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G), \mathbb{C})$$

とすると$\mathcal{C}l(G)$はGから$\mathbb{C}$への類関数全体と同一視でき，通常の群指標はMackey関手の間の自然変換

$$(2.2)\qquad \chi_G : R(G) \longrightarrow \mathcal{C}l(G)$$

を与える。$\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$とすると$\alpha$は

$$(2.3)\qquad \alpha : \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_N} \mathbb{Z}/N \xrightarrow{\alpha_N} G$$

なる分解を持つ。($\pi_N : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N$ は自然な射影。)従ってその自然性より任意の$x \in R(G)$に対して

$$(2\text{-}4)\qquad \chi_G(x)(\alpha) = (\chi_{\mathbb{Z}/N}(R(\alpha_N)x))(\pi_N)$$

が成立することが容易にわかる。

$\mathbb{Z}/N$ の $\mathbb{C}$ への作用

(2.5) $$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/N \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (m, a) & \longmapsto & e^{2\pi\sqrt{-1}m/N}a \end{array}$$

が定める $R(\mathbb{Z}/N)$ の元を t とすると

(2.6) $$R(\mathbb{Z}/N) = \mathbb{Z}[t]/(t^N - 1)$$

で，環準同型

(2.7) $$\epsilon_N : R(\mathbb{Z}/N) \longrightarrow \mathbb{C}$$

を $\epsilon_N(t) = e^{2\pi\sqrt{-1}/N}$ で定義すると，$\chi_{\mathbb{Z}/N}(t)(\pi_N) = \epsilon_N(t)$ であるから，2.4 より

(2.8) $$\chi_G(x)(\alpha) = \epsilon_N(R(\alpha_N)x)$$

を得る。従って通常の群指標は $R(G)$ の関手性と様々な N に対する環準同型 $\epsilon_N : R(\mathbb{Z}/N) \longrightarrow \mathbb{C}$ とから構成することができる。そこでこれの類似を $\widehat{K(n)}^*(BG)$ と $Cl_{n,p}(G)$ に対して考える。

まず$\alpha\in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^n, G)$とすると$\alpha$は分解

(2.9) $$\alpha : \mathbb{Z}_p^n \to (\mathbb{Z}/p^N)^n \xrightarrow{\alpha_N} G$$

を持つから，$R(\mathbb{Z}/N)$に対応するのは$\widehat{K(n)}^*(B(\mathbb{Z}/p^N)^n)$であるが，これについては次の結果が成立する。

定理2.10 (cf [4]) $\widehat{K(n)}^*$-代数の同型

$$\widehat{K(n)}^*(B(\mathbb{Z}/p^N)^n) \cong \widehat{K(n)}^*[[x_1, \cdots, x_n]]/([p^N](x_1), \cdots, [p^N](x_n))$$

が存在する。ただし$[p^N](x_i) = x_i +_{F_n} \cdots +_{F_n} x_i$ (p^N個)でF_nは$\widehat{K(n)}$に付随する形式群とする。

次に環準同型$\varepsilon_N : \widehat{K(n)}^*(B(\mathbb{Z}/p^N)^n) \longrightarrow \mathbb{C}_p$を定義することを考える。ここで1の原始N乗根$e^{2\pi\sqrt{-1}/N}$に対応するものは$[p^N](X)=0$の$m_p$における"原始"根である。これに関してはLubin-Tate [3]の結果が存在するが，それを述べるために可換群$F_n(m_p)$を導入する。任意の$a, b\in m_p$に対して$a +_{F_n} b$はm_pの元を与えるからm_pに$+_{F_n}$を加法とする可換群の構造が入るが，この群を$F_n(m_p)$と書くことにする。このとき$[p^N](X)=0$のm_pにおける根

は$F_n(\mathfrak{m}_p)$の位数p^νの元に他ならない。いま$\mathrm{Tor}\,F_n(\mathfrak{m}_p)$を$F_n(\mathfrak{m}_p)$のねじれ部分群とすると，$F_n$の$p$級数$[p](X)$が合同式$[p](X)\equiv v_n X^{p^n} \bmod (p)$（すなわち$F_n$の高さが$n$）を満たすことから次を得る。

定理2.11（[3]）可換群の同型

$$\mathrm{Tor}\,F_n(\mathfrak{m}_p) \cong (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^n$$

が成立する。

上の定理の同型を一つ固定し，その同型で$(0,\cdots,0,\overset{j}{\frac{1}{p^i}},0,\cdots,0)\in(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^n$に対応する$F_n(\mathfrak{m}_p)$の元を$e_{ij}$と書くことにすると明らかに

(2.12)
$$\begin{cases} [p^i](e_{ij}) = 0 \\ [p](e_{i+1,j}) = e_{ij} \end{cases}$$

が成立する。そこで環準同型

(2.13)
$$\varepsilon_N : \widehat{K(n)}^*(B(\mathbb{Z}/p^N)^n) \longrightarrow \mathbb{C}_p$$

を $\varepsilon_N(x_i) = e_{N,i}$ で定義する。ただし 2.10 により，$\widehat{K(n)}^*(B(\mathbb{Z}/p^N)^n)$ を $\widehat{K(n)}^*[[x_1, \cdots, x_n]]/([p^N](x_1), \cdots, [p^N](x_n))$ と同一視した。この ε_N を用いて

(2.14) $$\chi_G : \widehat{K(n)}^*(BG) \longrightarrow Cl_{n,p}(G)$$

を次で定義する。$x \in \widehat{K(n)}^*(BG)$，$\alpha \in Hom(\mathbb{Z}_p^n, G)$，$\alpha : \mathbb{Z}_p^n \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^N)^n \xrightarrow{\alpha_N} G$ に対して，

(2.15) $$\chi_G(x)(\alpha) = \varepsilon_N((B\alpha_N)^* x) \in \mathbb{C}_p$$

$((B\alpha_N)^* : \widehat{K(n)}^*(BG) \longrightarrow \widehat{K(n)}^*(B(\mathbb{Z}/p^N)^n))$ とする。まず $\chi(x)(\alpha) \in \mathbb{C}_p$ が α の分解のしかたによらないことを示す。いま $\alpha : \mathbb{Z}_p^n \to (\mathbb{Z}/p^M)^n \xrightarrow{\alpha_M} G$ ($M > N$ と仮定する) と書けたとすると，$\alpha_M : (\mathbb{Z}/p^M)^n \xrightarrow{\pi_{NM}} (\mathbb{Z}/p^N)^n \xrightarrow{\alpha_N} G$ (π_{NM} は自然な射影) であって，さらに次の補題が成立する．

補題 2.16 $(B\pi_{NM})^* : \widehat{K(n)}^*(B(\mathbb{Z}/p^N)^n) \longrightarrow \widehat{K(n)}^*(B(\mathbb{Z}/p^M)^n)$ は $(B\pi_{NM})^* x_i = [p^{M-N}](\lambda_i)$ で与えられる。ただし，$\widehat{K(n)}^*(B(\mathbb{Z}/p^N)^n) = \widehat{K(n)}^*[[x_1, \cdots, x_n]]/([p^N](x_1), \cdots, [p^N](x_n))$，$\widehat{K(n)}^*(B(\mathbb{Z}/p^M)^n) = \widehat{K(n)}^*[[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]]/([p^M](\lambda_1), \cdots, [p^M](\lambda_n))$ とする。

一方 2.12 の第二式より

$$(2.17)\qquad [p^{M-N}](\varepsilon_M(a_i)) = \varepsilon_N(x_i)$$

が成立する。2.16，2.17 及び $\alpha_M = \alpha_N \pi_{NM}$ を用いれば，簡単な計算により，任意の $x \in \widehat{K(n)}^*(BG)$ に対して

$$(2.18)\qquad \varepsilon_M((B\alpha_M)^* x) = \varepsilon_N((B\alpha_N)^* x)$$

が示せるから，従って $\chi(x)(\alpha) \in \mathbb{C}_p$ は α の分解のしかたによらず定まる．また任意の $g \in G$ に対して $\chi(x)(c_g\alpha) = \chi(x)(\alpha)$ は $Bc_g \simeq 1_{BG} : BG \to BG$ より明らかに成り立つので，2.14 の写像は確かに定義される。この写像が環準同型で，G に関して自然であることは容易にわかるので次を得る。

命題2.19 Group から Ring への関手の自然変換

$$\chi_G : \widehat{K(n)}^*(BG) \longrightarrow Cl_{n,p}(G)$$

が存在する。

ここで定義したχが induction と可換，すなわち Mackey 関手の間の自然変換になっていること，及びχが同型$\chi_G \otimes \mathbb{C}_p : \widehat{K(n)}^*(BG) \otimes \mathbb{C}_p \to Cl_{n,p}(G)$を誘導することの証明には，ここでは立ち入らないことにするが，いずれもGが可換p群の場合に帰着させて証明することを注意しておく。$\chi \otimes \mathbb{C}_p$が同型であることの証明を$G$が可換群の場合に帰着させるのに次の結果が用いられる。

定理2.20（[2]）Eを任意の複素向き付けられたコホモロジー理論，Gを有限群とすると，自然な写像

$$E^*(BG) \otimes \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{|G|}\right] \longrightarrow \lim_{\mathcal{A}(G)} E^*(BA) \otimes \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{|G|}\right]$$

は同型。ただし$\mathcal{A}(G)$はGの可換部分群を対象とし，制限写像とGの共役作用により生成される射を持つ圏とする。

3. 高次元指標に関する問題　最後に高次元指標に関する問題を二つ上げることにする。まず第一のものは，$\chi_G : \widehat{K(n)}^*(BG) \to Cl_{n,p}(G)$が単射であるかどうかということであるがこれについては次の予想がある。

予想3.1 (cf[2]) 任意の有限群Gに対して$\widehat{K(n)}^*(BG)$のねじれ部分加群は自明である。すなわち$\chi_G: \widehat{K(n)}^*(BG) \to Cl_{n,p}(G)$は単射。

上の予想はGが可換群，対称群，またはある種のLie型の有限群等について正しいことが確かめられているが，現在までのところ一般のGに対する証明は得られていない。

予想3.1が正しいと$\widehat{K(n)}^*(BG)$は$Cl_{n,p}(G)$のある最大$\widehat{K(n)}^*$格子と同一視できるが，$Cl_{n,p}(G)$の部分$\widehat{K(n)}^*$代数で最大$\widehat{K(n)}^*$格子になっているものの環構造が一意的でないことはすぐにわかるので，次の問題を考えることに意味がある。

問題3.2 $\mathrm{Im}\,\chi_G < Cl_{n,p}(G)$の$\widehat{K(n)}^*$代数としての構造を代数的に記述すること。(例えば，$R(G)$の構成に比較しうるような$\mathrm{Im}\,\chi_G$の構成法を与えること。)

上記問題を考えることはMorava K理論を理解する上で重要なことのように思われる。

参考文献

[1] M. Atiyah: Characters and cohomology of finite groups. Publ. Math. IHES 9

(1961), 23-64.

[2] M. Hopkins, N. Kuhn, D. Ravenel : Generalized group characters and complex oriented cohomology theories. Preprint 1989.

[3] J. Lubin, J. Tate : Formal complex multiplication in local fields. Ann. of Math. 81 (1965), 296-302.

[4] D. Ravenel, S. Wilson : The Morava K-theories of Eilenberg-MacLane spaces and the Conner-Floyd conjecture. Amer. J. Math. 102 (1980), 691-748.