

## 浅海域を伝播する不規則波浪のスペクトル変化

京都大学工学部 間瀬 肇 (Hajime Mase)

### 1. はじめに

Boussinesq 方程式は弱い分散性と有限振幅性を含んだ理論式であり, Peregrine<sup>1)</sup>が任意海底海浜に対する Boussinesq 方程式を導いて以来多くの実験的研究がなされ, さらに理論が発展させられてきた。岸からの反射が無視でき, 岸方向のみへ波が伝播するという条件においては Boussinesq 方程式から KdV 方程式が得られる。Freilich and Guza<sup>2)</sup>は Boussinesq 方程式から任意スペクトルを有する風波の浅水変形理論(ただし汀線に直角入射する場合), Liu et al.<sup>3)</sup>は屈折・回折を考慮した非線形波の浅水変形理論を導いた。ここでは, KdV 方程式を用いて不規則波浪の成分波に対する浅水変形式を導き, 得られた浅水変形式の特徴を考察し, 適用範囲が広げられるよう修正する。また, 水理実験結果と計算結果の比較・検討を行なう。

### 2. スペクトル成分波の浅水変形式

次式で表される非線形性と分散性を含む Boussinesq 方程式は, 浅海での波動理論として有用であることが知られている<sup>1), 2)</sup>。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \varepsilon \zeta) \mathbf{u}] = O(\varepsilon^2, \varepsilon \mu^2, \mu^4) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \varepsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \zeta \\ = \mu^2 \left\{ \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla [\nabla \cdot (h \mathbf{u})] - \frac{h^2}{6} \frac{\partial}{\partial t} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\} + O(\varepsilon^2, \varepsilon \mu^2, \mu^4) \end{aligned} \quad (2)$$

この式は、代表周波数  $\omega_0$ 、代表振幅  $a_0$ 、代表水深  $h_0$  を用いて以下のように無次元化されており（ダッシュがついた変数が次元量）,

$$\begin{aligned} t = \omega_0 t', \quad (x, y) = k_0 (x', y') = \frac{\omega_0}{\sqrt{gh_0}} (x', y'), \\ h = \frac{h'}{h_0}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}'}{\left[ \frac{a_0}{h_0} \sqrt{gh_0} \right]}, \quad \zeta = \frac{\zeta'}{a_0} \end{aligned} \quad (3)$$

二つの無次元パラメータ

$$\varepsilon = \frac{a_0}{h_0}, \quad \mu^2 = \frac{\omega_0^2 h_0}{g} \quad (4)$$

が  $O(\varepsilon) = O(\mu^2) < 1$  であることが条件である。水深変化が波長に比べて小さく

$$O(|\nabla h|) \leq O(\mu^2) \quad (5)$$

であり、波は  $x$  の正方向（岸方向）にのみ伝播するものとし、次の変数を導入して、

$$\xi = \int \frac{dx}{C} - t, \quad \tau = \varepsilon t, \quad \chi = \varepsilon x \quad (6)$$

式(1),(2)を変形すると次式を得る。

$$\zeta_\tau + C \zeta_\chi + \frac{1}{4C} h_\chi \zeta + \frac{3}{2C^2} \zeta \zeta_\xi + \frac{\mu^2 h^2}{6\varepsilon C^2} \zeta_{\xi\xi\xi} \cong 0 \quad (7)$$

これは任意海底地形に対する KdV 方程式である。固定座標系の表示に直せば次のようになる。

$$\zeta_t + \sqrt{h} \zeta_x + \frac{h_x}{4\sqrt{h}} \zeta + \frac{3\varepsilon}{2\sqrt{h}} \zeta \zeta_x + \frac{h^{5/2} \mu^2}{6} \zeta_{xxx} = 0 \quad (8)$$

波は基本周波数  $\omega_1$  に対して周期的であるとし、その調和成分の重ね合わせとして Fourier 級数表示する。

$$\zeta' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n' e^{i(k_n dx - \omega_n t')} + \text{c. c.} \quad (9)$$

$$\omega_n^2 = g k_n^2 h \quad (10)$$

ここで、c.c. は式(9) 右辺第1項の共役複素数であり、 $\omega_n = n\omega_1$ 、 $k_1$  を波数の基本成分とすると  $k_n = nk_1$  である。式(9) を  $a_0, \omega_0, k_0$  を用いて無次元化する。

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n e^{in \left( \bar{k}_1 dx - \bar{\omega}_1 t \right)} + \text{c. c.} \quad (11)$$

ここで、 $\bar{k}_1 = k_1/k_0$ 、 $\bar{\omega}_1 = \omega_1/\omega_0$  である。複素振幅  $A_n$  は水深  $h$  の変化と同程度にゆっくり変化するものとする。

$$\frac{dA_n}{dx} \sim \frac{dh}{dx} \sim O(\varepsilon, \mu^2) \quad (12)$$

条件(12)のもとで、式(11)を式(8)に代入して

$$\begin{aligned} & \frac{dA_n}{dx} + \frac{h_x}{4h} A_n - \frac{\mu^2}{6} i n^3 \bar{k}_1^3 A_n \\ & + \frac{3\varepsilon i \bar{k}_1}{8h} \sum_l \sum_m \left[ (l+m) A_l A_m e^{i(l+m-n)\psi_1} \right. \\ & + (l-m) A_l A_m^* e^{i(l-m-n)\psi_1} - (l-m) A_l^* A_m e^{i(-l+m-n)\psi_1} \\ & \left. - (l+m) A_l^* A_m^* e^{i(-l-m-n)\psi_1} \right] = 0 ; \quad n = 1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (13)$$

が得られる。ここで、\* は共役複素数であり、 $\psi_1$  は次式の基本成分に対する位相関数である。

$$\psi_1 = \int \bar{k}_1 dx - \bar{\omega}_1 t \quad (14)$$

式(13) の非線形項で  $n$  次成分に寄与するのは次の共鳴条件を満たす場合である。

$$\pm \bar{\omega}_l \pm \bar{\omega}_m - \bar{\omega}_n = 0 \quad (15)$$

$$\pm \bar{k}_l \pm \bar{k}_m - \bar{k}_n = 0 \quad (16)$$

すなわち、

$$\pm l \pm m - n = 0 \quad (17)$$

$$l, m, n \geq 1 \quad (18)$$

成分波の個数を  $N$  として共鳴条件を用いることにより、式(13) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dA_n}{dx} + \frac{h_x}{4h} A_n - \frac{1}{6} i n^3 k_1^3 h^2 A_n \\ + \frac{3 i n k_1}{8 h} \left[ \sum_{l=1}^{n-1} A_l A_{n-l} + 2 \sum_{l=1}^{N-n} A_l^* A_{n+l} \right] = 0 ; \\ n = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、上式は次元量に直してあるが、ダッシュは省略してある。式(19) の左辺第2項は浅水変形、第3項は波の分散性、第4項は波の非線形干渉を表すものである。

式(19) における浅水変形項を次式に基づいて考察する。

$$\frac{dA_n}{dx} = - \frac{h_x}{4h} A_n \quad (20)$$

式(20)を  $x=0$  から  $x$  まで積分すると,

$$\frac{A_n(x)}{A_n(0)} = \left\{ \frac{h(x)}{h(0)} \right\}^{-1/4} \quad (21)$$

が得られる。これは Green の式である。すなわち、式(19)では成分波の振幅変化を Green の式により算定することになる。そのため、低周波成分の振幅算定に対しては妥当であるが、高周波成分に対しては振幅を過大に算定することになる。ここで、以下の式を考える。

$$\frac{dA_n}{dx} + \frac{(C_{g_n})_x}{2C_{g_n}} A_n = 0 \quad (22)$$

ここで、 $C_{g_n}$  は次式で示される群速度である。

$$C_{g_n} = \frac{1}{2} \frac{\omega_n}{k_n} \left( 1 + \frac{2k_n h}{\sinh 2k_n h} \right) \quad (23)$$

式(22)を積分すると,

$$\frac{A_n(x)}{A_n(0)} = \left\{ \frac{C_{g_n}(x)}{C_{g_n}(0)} \right\}^{-1/2} \quad (24)$$

が得られる。これは微小振幅波理論の浅水変形式であり、長波領域では Green の式となる。すなわち、浅水変形を正しく表すには式(22)がよい。

次に、分散項について考える。一定水深における線形波に対しては、式(19)は次のようになる。

$$\frac{dA_n}{dx} - \frac{1}{6} i n^3 k_1^3 h^2 A_n = 0 \quad (25)$$

水位変動は

$$\zeta = \frac{1}{2} A_n e^{i(n k_1 x - n \omega_1 t)} + \text{c.c.} \quad (26)$$

で表される。ここで、

$$A_n = a_n e^{i \psi_n} \quad (27)$$

と表す。ただし、 $a_n$  は実数とする。式(26)と(27)を式(25)に代入して、実数部と虚数部をそれぞれ整理すると次のようになる。

$$a_{nx} = 0 \quad (28)$$

$$\psi_{nx} = \frac{1}{6} n^3 k_1^3 h^2 \quad (29)$$

したがって、

$$a_n = \text{constant} \quad (30)$$

$$\psi_n = \frac{1}{6} n^3 k_1^3 h^2 x \quad (31)$$

である。式(30)と式(31)を用いて式(26)を書き直すと、

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2} a_n e^{i(\frac{1}{6} n^3 k_1^3 h^2 x)} e^{i(n k_1 x - n \omega_1 t)} + \text{c.c.} \\ &= \frac{1}{2} a_n e^{i\{(nk_1 + \frac{1}{6} n^3 k_1^3 h^2)x - n \omega_1 t\}} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (32)$$

となる。式(32)より波速は次のようになる。

$$C_n = \frac{\omega_1}{k_1} \frac{1}{\left\{1 + \frac{(n k_1 h)^2}{6}\right\}} \quad (33)$$

ここで  $\omega_1/k_1$  は浅海長波の波速  $\sqrt{gh}$  であり、 $nk_1$  を改めて  $k$  とおくと、式(33)は

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{1 + \frac{(kh)^2}{6}} \quad (34)$$

となる。微小振幅波理論では次のとおりである。

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{\tanh kh}{kh}} \quad (35)$$

式(34)の関係式は  $kh \leq 1.0$  では式(35)の関係式の良い近似になっているが、 $kh$  が大きくなると近似精度が悪くなる。分散項を以下のようにすると式(35)の分散関係を表すことができる。

$$\frac{dA_n}{dx} - i n k_1 \left( \sqrt{\frac{n k_1 h}{\tanh n k_1 h}} - 1 \right) A_n = 0 \quad (36)$$

以上のことから、式(19)の浅水変形項を式(22)におけるそれに置き換え、また式(19)の分散項を式(36)のそれに変えた次式の修正 KdV 方程式を提案する。

$$\begin{aligned} \frac{dA_n}{dx} + \frac{(C_{g_n})_x}{2C_{g_n}} A_n - i n k_1 \left( \sqrt{\frac{n k_1 h}{\tanh n k_1 h}} - 1 \right) A_n \\ + \frac{3 i n k_1}{8 h} \left[ \sum_{l=1}^{n-1} A_l A_{n-l} + 2 \sum_{l=1}^{N-n} A_l^* A_{n+l} \right] = 0 ; \\ n = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (37)$$

### 3. 不規則波浪の浅水変形実験

実験は長さ27m、幅50cm、深さ75cmの両面ガラス張り水槽で行なった。この水槽の一端には電気油圧式不規則波発生装置が設置されている。水槽の他端には海底勾配が1/20の一樣勾配の模

型海浜を設置した。一様水深部の水深は 47cm とした。実験に用いた不規則波は、ピーク周波数が 0.6Hz の Pierson-Moskowitz 型スペクトルを有するもので、波群度係数 (Groupiness Factor) は 0.73 である。

#### 4. 実験結果と計算結果の比較・検討

Fig.1 は各地点のエネルギースペクトルの実測値 (実線) と式 (19) による計算結果 (点線) を示したものである。水深の大きい領域 ( $h \geq 25\text{cm}$ ) ではピーク周波数の2倍調和周波数周辺のエネルギーピークは見られないが、水深 15cm の地点では2倍調和成分のエネルギーピークがはっきり現われ、また3倍調和周波数周辺のエネルギーピークも若干現われている。水深 15cm の地点はすでに最大波高が減少している地点である。水深 12.5cm の地点におけるスペクトルは、水深 47cm 地点のそれに比べてピーク周波数周辺のエネルギー密度が減少しており、また高周波領域のエネルギー密度が全体に増加している。水深が 5cm と浅くなるとエネルギー分布は平坦になってくる。水深が 2.5cm の地点ではピーク周波数であった 0.6Hz のエネルギー密度が小さくなり、低周波成分のエネルギー密度の方が大きくなっている。

計算結果は、実測結果と同様、水深が浅くなるにつれて2倍調和周波数周辺のエネルギー密度が増加する。計算結果の変化傾向は実測結果のそれをよく表しているが、値自体は計算結果が大きい。これは、すべての成分波の浅水変形式として Green の式を用いていることおよび砕波によるエネルギー減衰を考慮していないことによる。

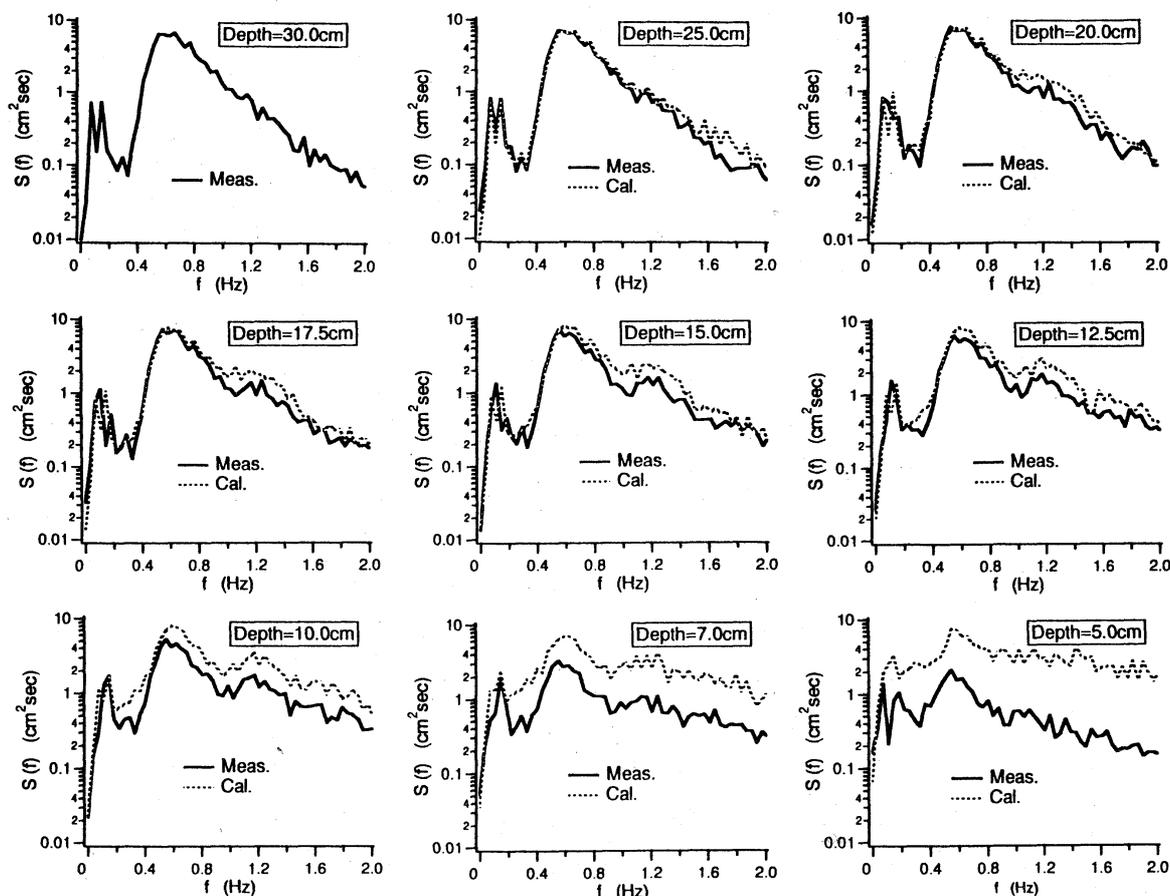


Fig.1 スペクトル変化の実測値と式(19) による計算結果

式(37) を用いた計算結果と実測結果を比較したものが Fig.2 である。この Fig.2 と Fig.1 を比べると、明らかに修正式を用いた計算結果の方が実験結果に近づいたのがわかる。実験結果と計算結果の対応は水深が 10cm まで良好であるが、 $h=10\text{cm}$  の地点では  $1/10$ 最大波高、有義波高および平均波高が減少しエネルギーの減衰が生じているので、エネルギー減衰を考慮していない計算結果は実験結果より若干大きくなっている。これより水深が小さくなると理論モデルにエネルギー減衰項を導入しなければなら

ない。

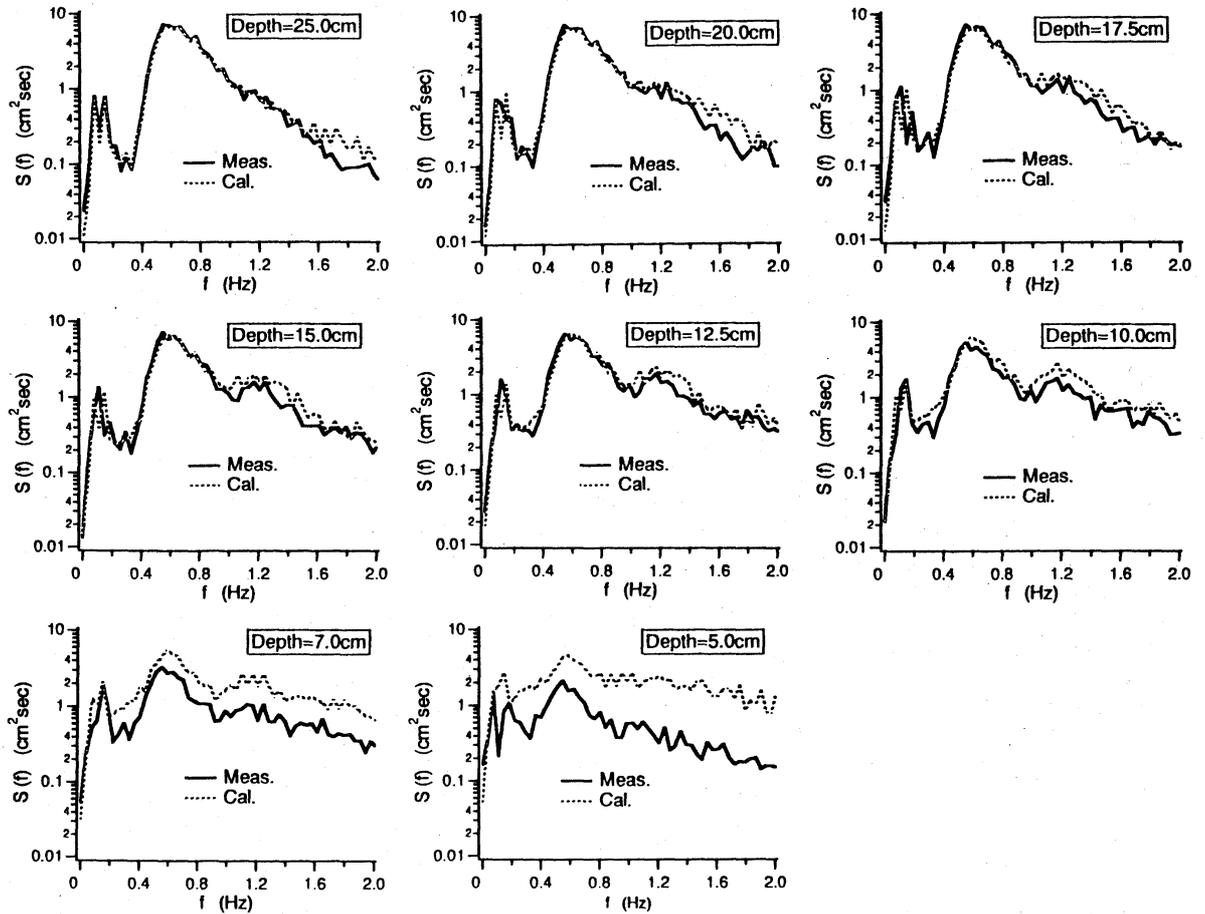


Fig.2 スペクトル変化の実測値と式(37) による計算結果

### 5. あとがき

本研究は、不規則波浪の成分波に対する浅水変形式を KdV 方程式から導き、水理実験を実施してその適用性を検討した。この浅水変形モデルは、KdV 方程式の適用範囲内（長波領域）における不規則波浪に対して厳密に適用できるものである。実験による不規則波はすべての成分波に対して長波近似が適用できないので、浅水変形が Green の法則に基づくこのモデルは成分波の振幅変

化を過大評価する。そこで、線形波に対し浅水変形と分散関係を厳密に表せる修正 KdV 方程式を提案した。この修正 KdV 方程式モデルを用いると、砕波帯にいたる不規則波のスペクトルの変化をかなりうまく表すことができる。この予測モデルは厳密に波動理論に基づくものではないが、使いやすく、実用的である。計算された複素振幅を用いれば水位変動を求めることができるので、波の時系列、代表波高、波高分布も得ることができる。

#### 参考文献

- 1) Peregrine, D.H.: Long waves on a beach, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.27, 1967, pp.815-827.
- 2) Freilich, M.H. and Guza, R.T.: Nonlinear effects on shoaling surface gravity waves, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A 311, 1984, pp.1-41.
- 3) Liu, P.L.-F., Yoon, S.B. and Kirby, J.T.: Nonlinear refraction-diffraction of waves in shallow water, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.153, 1985, pp.185-201.