

流動化現象における非線形波動

京大 理 佐々 真一 (Shin-ichi Sasa)
東北大 理 早川尚男 (Hisao Hayakawa)

§1 Introduction

多孔質の底板を持つ箱の中に粉体を入れ、下から気体（液体）を速度 u_0 で流入する。この時、流体の粉体を引きずる力が重力より小さいと粉体は充填されており、粉体間の接触圧力がその差を補うように働くが、 u_0 を大きくしていくと、流体の粉体を引きずる力と重力が釣り合うようになる。この状態では粉体は自由に動くことが出来るので、この現象は流動化現象 (fluidization) と呼ばれる。fluidization は、戦後、化学工学において化学反応を促進させる技術として、その研究がなされてきた。ところで、工学的には好ましくないことであるが、流動状態はしばしば不安定になる。不安定な流動状態では、粉体と気体が相分離して、気体が泡を作って上昇するなどのパターンの変化が見られる。しかし、流動化現象に関する多くの今までの理論的な研究は流動床の線形安定性を議論するに留まっている^[3~9]。そこで、不安定な流動床の興味深い現象を理解するためには非線形解析が必要になる。我々はこの報告で、線形安定性解析を超えて流動化現象を議論することを試みる。

§2 モデル

流動化現象を研究するのにどのモデルが適しているかという問題は議

論の余地があるが、この報告では Batchelor^[3]の議論に基づいて構成された 1次元連続モデルから出発する。一次元モデルは水平方向について平均化する事によって得られるので、粉体の体積占有率 ϕ と粉体及び流体の巨視的な速度（それぞれ v, u と記す。）が力学変数として考えられる。この時、空隙率は $1 - \phi$ で表される。粉体と流体が非圧縮だと仮定すると、

$$R = \phi v + (1 - \phi)u \quad (1)$$

によって定義される平均流は鉛直方向 z で一定である。さらに、この平均流は定常であると仮定する。体積占有率 ϕ の時間発展は連続方程式

$$\partial_t \phi = -\partial_z(\phi v) \quad (2)$$

によって記述される。一方、慣性、重力、流体との摩擦、粉体間の衝突による散逸、化学ポテンシャルによる熱力学的力を粉体に対する力として考えて、粉体の運動量バランスに対する考察から v に対する方程式を次の形で得る。^[3]

$$\partial_t v + v \partial_z v = F(u - v, \phi) - \tilde{g} - \frac{D(\phi)}{\phi B(\phi)} \partial_z \frac{\delta A}{\delta \phi} + \frac{1}{\phi} \partial_z (\phi \nu_s(\phi) \partial_z v) \quad (3)$$

ここで、粉体の拡散係数 $D(\phi)$ 、粉体の動粘性係数 $\nu_s(\phi)$ が導入された。 $B(\phi)$ は単位質量当りの外力に対する粉体の速度の割合として定義される易動度を表す。混合エネルギー A は流体の流入速度と関係した平均体積占有率 ϕ_0 を使って、

$$A = \int dz \left[\frac{1}{2} (\phi - \phi_0)^2 + \frac{1}{2} K(\phi) (\partial_z \phi)^2 \right] \quad (4)$$

と書ける。重力加速度 g 、粉体の密度 ρ_s 、流体の密度 ρ_f によって浮力の効果も含めた重力は $\tilde{g} = g(\rho_s - \rho_f)/\rho_s$ と表される。流動化状態では流体との摩擦力 $F(u - v, \phi)$ と（正味の）重力が釣りあっているので、 $F(u - v, \phi)$

を相対速度 $u - v$ に関してその平衡値 $U_r(\phi)$ の周りで展開することができるだろう。この展開が摩擦力 $F(u - v, \phi)$ の近似形

$$F(u - v, \phi) = \tilde{g} + \frac{\gamma \tilde{g}}{U(\phi)} (R - v - U(\phi)) \quad (5)$$

を与える。但し、 γ は ϕ 依存性が鈍感だと考えられている^[3]無次元量で $\gamma = (\partial F / \partial u) U_r(\phi) / \tilde{g}$ によって定義されている。また、(1)式から導かれる関係式 $v = R - (u - v)(1 - \phi)$ より、 $U(\phi) = U_r(\phi)(1 - \phi)$ で定義される $U(\phi)$ は、 $R = 0$ という座標系での粉体の平衡沈降速度であることがわかる。即ち、 $U(\phi)$ は自然な座標系で $R = 0$ がなりたう粉体の沈澱実験によって測定することが出来る。実験データは経験的に

$$U(\phi) = U_0 Q(\phi) = U_0 (1 - \phi)^p \quad (6)$$

という形 fitting される。^[11]ここで、べき指数 p は一個の粉体に対するレイノルズ数 Re に依存しており、 Re が非常に小さい所でののおおよそ 5 から、 Re が大きいところで約 2.5 までの値をとる。

易動度 $B(\phi)$ は (5) 式から $B(\phi) = U(\phi) / \gamma \tilde{g}$ と表される。次元解析は a を粉体の半径として

$$D(\phi) = \alpha a U(\phi), \quad \nu_s(\phi) = \beta a U(\phi), \quad K(\phi) = \kappa a^2 \quad (7)$$

を示唆する。但し、 α, β, κ は一般には ϕ の関数であるが、簡単のため定数とする。(4)-(7) 式を (3) 式に代入して、全ての次元量を $(v, R) \rightarrow (v, R) U_0$, $z \rightarrow za$, $t \rightarrow ta / U_0$ のように、 U_0 と a で無次元化すると、

$$\dot{v} + v \partial_z v = \frac{1}{\xi} \left(\frac{R - v - Q(\phi)}{Q(\phi)} - \frac{\alpha}{\phi} \partial_z \phi + \frac{\kappa}{\phi} \partial_z^3 \phi \right) + \frac{1}{\phi} \partial_z (\phi \beta Q(\phi) \partial_z v) \quad (8)$$

を得る。ここで、 $\xi = U_0^2 / \tilde{g} a \gamma$ はオーダー 1 のファクター γ を除いてフルード数に対応する。

方程式(2)と(8)が流動化状態を記述する基礎方程式の最終的な形である。Batchelorはこの方程式を用いて、流動化状態の線形安定性を議論した。我々の目的は、線形安定性を超えて、非線形現象を議論することである。その第一歩として、次の§で空隙率のダイナミクスを議論する。

§3 空隙率のダイナミクス

空隙率は保存量なので、その時間スケールは速度場の時間スケールに比べてずっと遅い。そこで、速度 v を断熱的に消去して空隙率のダイナミクスを導くことを考える。この方法は流動化現象の(速度の緩和時間に比べて)長い時間スケールの振舞いを論じる時には有効である。

基礎方程式(2),(8)は一様定常解

$$v = v_0(\phi_0) = R - Q(\phi_0), \quad \phi = \phi_0 \quad (9)$$

を持つ。速い変数 v を消去するために、次の仮定をおく。

$$v = v([\phi]), \quad \text{and} \quad \dot{\phi} = \Omega([\phi]). \quad (10)$$

ここで、 $f([\phi]) = f(\phi, \partial_z \phi, \partial_z^2 \phi, \dots)$.

長距離の振舞いに興味があるので、微分展開を行う。即ち、 $\partial_z \rightarrow \mu \partial_z$ と置き換えて、小さいパラメータに関する摂動論を展開する。この時、未知の関数 Ω 、 v は μ によって

$$v([\phi]) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n v^{(n)}([\phi]), \quad \text{and} \quad \Omega([\phi]) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \Omega^{(n)}([\phi]) \quad (11)$$

と展開される。(10),(11)式を(2),(8)式に代入して μ のべきで整理すると、逐次的に $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$, $\Omega^{(3)}$, $\Omega^{(4)}$, ... を得る。 $O(\mu^4)$ まで求めた ϕ の方程式は、 $\mu = 1$ と置いて再規格化して次の形になる。

$$\begin{aligned} \partial_t \phi = \partial_z [& -\phi v_0(\phi) + C_2(\phi) \partial_z \phi + C_3(\phi) \partial_z^2 \phi + C_4(\phi) \partial_z^3 \phi \\ & + C_5(\phi) (\partial_z \phi)^2 + C_6(\phi) (\partial_z^2 \phi) (\partial_z \phi) + C_7(\phi) (\partial_z \phi)^3]. \end{aligned} \quad (12)$$

C_5, C_6, C_7 の項は適当な非線形変換で消すことが出来るので、ダイナミクスには影響を及ぼさない。^[12]。それ故、 C_2, C_3, C_4 の ϕ 依存性だけ分かればよい。計算を実行すると、

$$\begin{aligned} C_2(\phi) &= (\alpha - \xi Q'(\phi)^2 \phi^2) Q(\phi), \\ C_3(\phi) &= \phi(\beta Q(\phi) - 2C_2(\phi)) \xi Q'(\phi) Q(\phi), \\ C_4(\phi) &= (-\kappa + \beta Q(\phi) C_2(\phi) \xi - C_2(\phi)^2 \xi - 2Q'(\phi) C_3(\phi) \phi \xi) Q(\phi) \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。短波長不安定性を抑制するために、 $C_4(\phi)$ が負でなければならないが、以下ではこの条件を満たす様にパラメータを選ぶとする。

条件(13)を伴う方程式(12)が空隙率のダイナミクスを表す。この方程式は相分離も含めた強い非線形現象をも記述することが期待できるが、ここでは一様流動化状態の線形安定性を議論し、さらに、不安定点近傍で弱非線形解析を実行することにより、そこで現われる非線形波動の性質について紹介する。

§4 一様流動化状態の線形安定性

一様状態 ϕ_0 に擾乱 φ を加えて、 $\phi = \phi_0 + \varphi$ を(12)式に代入して、 φ について線形化する事により、

$$\partial_t \varphi = C_1(\phi_0) \partial_z \varphi + C_2(\phi_0) \partial_z^2 \varphi + C_3(\phi_0) \partial_z^3 \varphi + C_4(\phi_0) \partial_z^4 \varphi \quad (14)$$

を得る。但し、 $C_1(\phi_0) = -(v_0(\phi_0) + v_0'(\phi_0)\phi_0)$ 。これより、一様解 $\phi = \phi_0$ は $C_2(\phi_0)$ が負の時に不安定であることが分かる。条件 $C_2(\phi_0) < 0$ はBatchelorの結果を再現するのでここでは詳しく論じない。ただ、相分離を議論するとき重要になる「 $C_2(\phi)$ がもし負になるならば、 $\phi_1 < \phi < \phi_2$ という範囲で負になる。」という事実だけを述べておく。

§5 弱非線形解析と非線形波動

流体の流入速度が大きくなるにつれて、平均の体積占有率 ϕ_0 は下がってきて、それが ϕ_2 に到達すると、一様流動化状態は不安定になる。不安定点

近傍でのダイナミクスを調べるために小さいパラメータ $\varepsilon = -C_2(\phi_0) > 0$ を導入する。十分小さい ε に対して、解 ϕ の次のスケーリングを仮定する。

[13]

$$\phi = \phi_0 + \varphi(z, t) = \phi_0 + \varepsilon^\delta \Phi(Z, T). \quad (15)$$

ここで、スケールされた座標 $(Z, T) = (\varepsilon^\zeta(z + C_1(\phi_2)t), \varepsilon^\theta t)$ を導入した。また、指数 δ, ζ, θ は負でない定数であり、その値は無次元パラメータ β の大きさに応じて3通りの場合に分類されて決められる。

Case(i) : $\beta \sim O(1)$

不安定項 $\varepsilon \partial_z^2 \phi \sim O(\varepsilon^{2\zeta+\delta+1})$ が散逸項 $C_4(\phi_2) \partial_z^4 \phi \sim O(\varepsilon^{4\zeta+\delta})$ と釣り合わなければならない、という要請が長さのスケール $\zeta = 1/2$ を決める。この時、分散項 $C_3(\phi_2) \partial_z^3 \phi \sim O(\varepsilon^{3/2+\delta})$ は不安定項や散逸項よりずっと大きいので、最低次の非線形項 $\partial_z \phi^2 \sim O(\varepsilon^{\zeta+2\delta})$ は分散項と釣り合うはずである。この考察から、振幅と時間のスケール $(\delta, \theta) = (1, 3/2)$ が決まる。これらのスケーリング指数とスケーリング形(15)式を(12)式に代入し、 ε についての最低次までの寄与を取り出すと、K-dV 方程式

$$\partial_T \Phi + \lambda \partial_Z \Phi^2 = C_3(\phi_2) \partial_Z^3 \Phi \quad (16)$$

を得る。ここで、 $\lambda = v'_0(\phi_2) + \phi_2 v''_0(\phi_2)/2$ である。即ちこの場合、振幅が $O(\varepsilon)$ のソリトンが間隔 $O(\varepsilon^{-1/2})$ でならんだソリトン列が観測されることが予想できる。

Case(ii) : $\beta \sim O(\varepsilon^{1/2})$

$\beta = \tilde{\beta} \varepsilon^{1/2}$ と置くことにより、不安定項は非線形項、散逸項、分散項の全てと釣り合う。この時、スケーリング指数は $(\delta, \zeta, \theta) = (3/2, 1/2, 2)$ の様に計算され、スケーリング仮定(15)式の下で、次の方程式を得る。

$$\partial_T \Phi + \lambda \partial_Z \Phi^2 = -\partial_Z^2 \Phi + \tilde{C}_3(\phi_2) \partial_Z^3 \Phi + C_4(\phi_2) \partial_Z^4 \Phi. \quad (17)$$

ここで $\tilde{C}_3(\phi_2) = \phi_2 \tilde{\beta} Q^2 Q' \xi$, $C_4(\phi_2) = -\kappa Q$. この方程式は薄膜粘性流で現われる波の議論で導かれ^[14]、その解も詳しく調べられている。^[15]

Case(iii) : $\beta \ll \varepsilon^{1/2}$

この場合は(ii)で $\tilde{\beta} = 0$ と置くことによって、Kuramoto-Sivashinsky (KS) 方程式^[16~18]

$$\partial_T \Phi + \lambda \partial_Z \Phi^2 = -\partial_Z^2 \Phi + C_4(\phi_2) \partial_Z^4 \Phi \quad (18)$$

を得る。この方程式は化学乱流^[16]や燃焼面乱流^[17]で最初に導かれた。KS方程式の数値シミュレーションを実行すると、変調した周期パターンが時空欠陥を生成しながらカオティックに時間発展する事が分かる。

§6 結論と議論

我々は流動化現象において空隙率のダイナミクスを Batchelor のモデル方程式から導き、不安定点近傍での非線形波動を議論した。そして、粉体の衝突による散逸の相対的な大きさに応じて、ソリトンのような波動からカオス的な波動まで現われることがわかった。

ところで、実際の流動化現象との関連で言えば、我々の研究は出発した基礎方程式の正否に依存している。いままで提案された多くのモデルの中で、我々にとって最も分かりやすかったのが Batchelor のモデルというだけであって、決してそのモデルが流動化現象の標準的なモデルとして認められている訳ではないし、また、標準的なモデルは、現在、存在していないと思われる。即ち、流動化現象を研究するなら、混相流体の基礎に戻ることが必要であるように思える。しかしながら、将来、混相流体の基礎方程式が提案された時、その方程式に対して我々の処方は適用できるであろう。そして、不安定な流動化状態への転移点近傍での非線形波動の性格が普遍的であることは十分期待できる。この様な場合、我々の結論は正しいことになる。

参考文献

- [1] *Fluidization*, edited by J.F. Davidson, R. Clift and D. Harrison, (Academic Press, London)1971.
- [2] Gidaspow D.,*Appl.Mech.Rev.*,**39** (1986) 1 .
- [3] Batchelor G.K.,*J.Fluid Mech.*,**193** (1988) 75 .
- [4] Jackson R., in *Fluidization*, edited by J.F. Davidson, R. Clift and D. Harrison, (Academic Press, London)1971, p.65.
- [5] Garg S.K. and Pritchett J.W.,*J.Appl.Phys.*,**46** (1975) 4493 .
- [6] Fanucci J.B., Ness N. and Yen R.,*J.Fluid Mech.*,**94** (1979) 353 .
- [7] Liu J.T.C.,*Proc.R.Soc.Lond.A*,**380** (1982) 229 .
- [8] Needham D.J. and Merkin J.H.,*J.Fluid Mech.*,**131** (1983) 427 .
- [9] Homsy G.M., in *Theory of Dispersed Multiphase Flow*, edited by R.E. Meyer, (Academic Press, London)1983, p57.
- [10] Ding J. and Gidaspow D.,*AIChE J.*,**36** (1990) 523 .
- [11] Buscall R., Goodwin J.W., Ottewill R.H. and Tadros T.F.,*J. Colloid Interface Sci.*,**85** (1982) 78 .
- [12] Details of the proof are available upon request.
- [13] Kuramoto Y.,*Prog.Theor.Phys.*,**71** (1984) 1182 .
- [14] Benny D.J.,*J. Math. and Phys.*,**45** (1966) 150 ;
Topper J. and Kawahara T.,*J.Phys.Soc.Jpn.*,**44** (1978) 663 .
- [15] Kawahara T.,*Phys.Rev.Lett.*,**51** (1983) 381 ;
Kawahara T. and Toh S.,*Phys.Fluids*,**31** (1988) 2103 .
- [16] Kuramoto Y. and Tsuzuki T.,*Prog.Theor.Phys.*,**55** (1976) 356 .
- [17] Sivashinsky G.I.,*Acta Astronautica*,**4** (1977) 1177 .
- [18] Hyman J.M., Nicolaenko B. and Zaleski S.,*Physica D*,**23** (1986) 265 .