

Complex Ginzburg-Landau 方程式の渦力学

名大理 松岡千博 (Chihiro Matsuoka)

名大理 野崎一博 (Kazuhiro Nozaki)

我々は漸近的な手法 (matched asymptotic expansion) を用いて 2 次元の Complex Ginzburg-Landau 方程式 (CGLE) の渦の力学を記述する。ゆっくり変化する時間、空間変数を用いて far field における系のふるまいが与えられ、その解を渦近傍での解につなぐことにより、渦の運動方程式が導かれる。特に、二体の渦について、その安定性を調べる。

非平衡系を記述する 2D-CGLE

$$\Delta\psi - (1 + i\delta)|\psi|^2\psi + (1 + i\delta(1 - k^2))\psi = -i\gamma\psi_t, \quad (1)$$

は定常状態において

$$\psi = U(R)\exp[i(n\theta + \theta_0 + f(r))] \equiv U(r)\exp(i\Theta), \quad (2)$$

なる渦解 (spiral wave solution) を持つ。ここで δ は実数 ($\ll 1$) で k は asymptotic な wave number であり、 $\delta \rightarrow 0$ で $k \rightarrow 0$ なる関係がある。また、 $\gamma = \gamma_r + i\gamma_i$ は複素数、 $n \in \mathbb{Z}$ は winding number であり、vortex core において位相 Θ は特異性

$$\oint_C \nabla\Theta \cdot dl = 2\pi n, \quad (3)$$

を持つ。ここで C は core をその中に含む閉じた積分路を表わし、 $|n| = 1$ のときのみ、系は topological な意味で安定である。

さて、outer region における系のふるまいを考えよう。ここではゆっくり変化する時間、空間変数

$$X = \epsilon x, \quad T = \epsilon^2 t; \quad \epsilon \ll \delta \ll 1, \quad (4)$$

を導入し、 ψ を ϵ で展開する：

$$\psi_{\text{outer}} \equiv \Psi = U \exp(i\Theta) = \Psi^0 + \epsilon^2 \Psi^2 + \dots \quad (5)$$

ここで U, Θ は

$$U = U^0(\delta) + \epsilon U^1(\delta) + \epsilon^2 U^2(\delta) + \dots, \quad (6a)$$

$$\Theta = \Theta^0 + \epsilon^2 \Theta^2 + \dots, \quad (6b)$$

と展開されている。(6) 式を (1) 式に代入すると

$$U^0 = 1, \quad \Psi^0 = \exp(i\Theta^0), \quad (7)$$

が得られる。ただし Θ^0 は Burgers 方程式

$$\Delta \Theta^0 + \delta |\nabla \Theta^0|^2 - \eta \Theta_T^0 = 0, \quad (8)$$

を満たす。ここで $\eta = \gamma_i - \delta \gamma_r$ である。今、 $\mathbf{X} = \mathbf{X}_j(T)$ で j 番目の渦の位置を表わし、その速度 $\dot{\mathbf{X}}_j$ ($\ll 1$) は、他の渦との相互作用から決定されるものとする。 $\Theta^0 = \Theta^0(\mathbf{X} - \mathbf{X}_j(T))$ であるから (8) 式は

$$\Delta \Theta^0 + \delta |\nabla \Theta^0|^2 = -\eta \dot{\mathbf{X}}_j \cdot \nabla \Theta^0, \quad (9)$$

と書き換えられる。以下で我々は $\delta = 0$ の場合を考察する。このとき (9) 式は線形であるから

$$\Theta^0 = \Theta_j^0 + \sum_{k \neq j} \Theta_k^0, \quad (10)$$

とおくことができ、(3) 式は

$$\oint_{C_j} \nabla \Theta^0 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n_j, \quad (11)$$

と書ける。ここで C_j は j 番目の渦をその中に含む閉じた積分路である。まず、 j 番目の渦に注目し、これが Y 方向に速度 v ($\ll 1$) で走るものとして一体の問題を解く。 $\eta \dot{\mathbf{X}}_j \cdot \nabla = v$ を使って (9) 式を書き換えると ($\delta = 0$)

$$\Delta \Theta^0 + v \Theta_Y^0 = 0, \quad (12)$$

となる。ここで式が煩雑になるのを避ける為、添え字 j は落とした。(12) 式を (11) 式という境界条件のもとで解く為に

$$\Phi_Y + v\Phi = -\Theta_X^0, \quad \Phi_X = \Theta_Y^0, \quad (13a)$$

$$v\Phi_Y + \Delta\Phi = 2\pi n\delta(X)\delta(Y), \quad (13b)$$

を満たすような補助関数 Φ を導入する。(13) より Φ は

$$\Phi = -n \exp\left(-\frac{vY}{2}\right) K_0\left(\frac{|v|}{2}R\right), \quad (14)$$

で与えられる。ここで $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ である。(13)、(14) より

$$\Theta_X^0 = \frac{n}{2} \exp\left(-\frac{vY}{2}\right) \left[v K_0\left(\frac{|v|}{2}R\right) - |v| \sin\theta K_1\left(\frac{|v|}{2}R\right) \right], \quad (15a)$$

$$\Theta_Y^0 = \frac{n|v|}{2} \exp\left(-\frac{vY}{2}\right) \cos\theta K_1\left(\frac{|v|}{2}R\right), \quad (15b)$$

となり、(10)、(15) より N 体の場合は

$$\begin{aligned} \Theta^0 &= \Theta_j^0 + \sum_{k \neq j} \Theta_k^0 \\ &= \oint_{C_j} (\Theta_{jX}^0 dX + \Theta_{jY}^0 dY) + \sum_{k \neq j} \Theta_k^0 \\ &= n_j \theta_j + \frac{n_j \gamma_i}{2} J \dot{\mathbf{X}}_j \cdot \mathbf{R}_j \left(\log \frac{\gamma_i |\dot{\mathbf{X}}_j| R_j}{4} + C - 1 \right) \\ &\quad + \mathbf{K}_j \cdot \mathbf{R}_j + \sum_{k \neq j} \Theta_k^0(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_k), \end{aligned} \quad (16)$$

となる。ここで $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で C は Euler 定数である。(16) 式の最後の 2 項は $\sum_k \Theta_k^0$ を $\mathbf{X} = \mathbf{X}_j$ で Taylor 展開し、その 1 次までとったもので、

$$\mathbf{K}_j = \left(\sum_{k \neq j} \nabla \Theta_k^0 \right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_j}, \quad \mathbf{R}_j = \mathbf{X} - \mathbf{X}_j, \quad (17)$$

である。(16) 式を (4) 式を用いてもとの座標で書くと

$$\begin{aligned} \Theta &= \sum_j \left[n_j \theta_j + \frac{n_j \gamma_i}{2} J \dot{\mathbf{x}}_j \cdot \mathbf{r}_j \left(\log \frac{\gamma_i |\dot{\mathbf{x}}_j| r_j}{4} + C - 1 \right) + \mathbf{K}_j \cdot \mathbf{r}_j \right] \\ &\quad + \text{higher order}, \end{aligned} \quad (18)$$

となる。ここで

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{x} - \frac{\dot{\mathbf{X}}_j}{\epsilon} = \mathbf{x} - \dot{\mathbf{x}}_j, \quad r_j = |\mathbf{r}_j|$$

である。

次に inner region (core 近傍) における展開を考えよう。 ψ を

$$\psi = \psi^0 + \epsilon\psi^1 + \dots,$$

と展開し、(1) 式に代入すると ψ について

$$\Delta\psi^0 + (1 + i\delta(1 - k^2))\psi^0 - |\psi^0|^2\psi^0 = 0, \quad (19)$$

が得られる。 $\epsilon \ll \delta \ll 1$ を考慮して ψ^0 をさらに δ で展開する：

$$\begin{aligned} \psi^0 &= (\rho_0(r) + \delta^2\rho_2(r) + \dots) \exp[i(n_j\theta_j + \delta\phi_1(r) + \delta^2\phi_2(r) + \dots)] \\ &\equiv \psi_0^0 + \delta\psi_1^0 + \delta^2\psi_2^0 + \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

ここで ψ_0^0 は

$$\Delta\psi_0^0 + \psi_0^0 - |\psi_0^0|^2\psi_0^0 = 0, \quad (21)$$

を満たす。この解 $\psi_0^0 \equiv \psi_G$ は Greengerg の解 [1][2] として知られており、今の場合は

$$\psi_G \sim \left(1 - \frac{1}{2r^2}\right) \exp(in_j\theta_j), \quad (22)$$

である。同様に ψ^1 についても

$$\psi^1 = \psi_0^1 + \delta\psi_1^1 + \dots,$$

と δ で展開してやると ψ_0^1 について

$$\Delta\psi_0^1 + \psi_0^1 - 2|\psi_G|^2\psi_0^1 - \psi_G^2\psi_0^{1*} = i\gamma\dot{\mathbf{x}}_j \cdot \nabla\psi_G, \quad (23)$$

なる方程式が得られる。outer region の解 Ψ^0 と inner region の δ の 0 次、 ϵ の 1 次までの解 $\psi_G + \epsilon\psi_0^1$ が matching するという条件、すなわち

$$\psi_G + \epsilon\psi_0^1 - \Psi^0 = o(\epsilon),$$

より (7)、(22) を用いて ψ_0^1 は

$$\psi_0^1 = i \exp(in_j \theta_j) \left[\frac{n_j \theta_j}{2} J \dot{\boldsymbol{x}}_j \cdot \boldsymbol{r}_j \left(\log \frac{\gamma_j |\dot{\boldsymbol{x}}_j| r_j}{4} + C - 1 \right) + \boldsymbol{K}_j \cdot \boldsymbol{r}_j \right], \quad (24)$$

となる。 ψ_0^1 についての式 (23) は

$$L\psi_0^1 = i\gamma \dot{\boldsymbol{x}}_j \cdot \nabla \psi_G, \quad (25)$$

とも書ける。ただし L は

$$Lu = \Delta u + u - 2|\psi_G|^2 u - \psi_G^2 u^*,$$

なる演算子である。可解条件は

$$\int_D \operatorname{Re}[u(Lw)^* - w(Lu)^*] d\boldsymbol{x} = \int_{\partial D} \operatorname{Re}[u(\partial_n w)^* - w(\partial_n u)^*] dl, \quad (26)$$

で与えられる。ここで D は任意の \mathbf{R}^2 の領域、 dl は ∂D に沿った線素、 \boldsymbol{n} は ∂D に垂直な方向を表わす。今、 u 、 w として

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e} \cdot \nabla \psi_G, \quad w = \psi_0^1 \quad (27)$$

ととると、 \boldsymbol{u} は $L\boldsymbol{u} = 0$ を満たしている。ここで \boldsymbol{e} は任意方向の単位ベクトルである。(27) を (26) に代入し、(22)、(24) 式を考慮すると、渦の運動方程式

$$2\boldsymbol{K}_j = M_j \dot{\boldsymbol{x}}_j, \quad (28)$$

が得られる。ここで

$$M_j = \begin{pmatrix} \gamma_r & n_j \gamma_i \log \frac{|\gamma_i \dot{\boldsymbol{x}}_j|}{|\dot{\boldsymbol{x}}_{j0}|} \\ -n_j \gamma_i \log \frac{|\gamma_i \dot{\boldsymbol{x}}_j|}{|\dot{\boldsymbol{x}}_{j0}|} & \gamma_r \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{j0} = 4 \exp \left(\frac{\alpha_j}{n_j^2} + \frac{1}{2} - C \right),$$

$$\alpha_j = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left[\int_0^{r_0} \left(\rho_G^{\prime 2} + \frac{n_j^2 \rho_G^{\prime 2}}{r^2} \right) r dr - n_j^2 \log r_0 \right],$$

であり、 $|n| = 1$ の時、 $\dot{\boldsymbol{x}}_{j0} \equiv d \sim 3.29[3][4]$ である。(17) を用いると、運動方程式はまた

$$\left(\sum_{k \neq j} \nabla \Theta_k \right)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_j} = \frac{M_j}{2} \dot{\boldsymbol{x}}_j, \quad (30)$$

とも書ける。これは2次元の Euler 方程式の point vortex の運動に類似のものである。ただし、Euler 方程式と違い、運動方程式を Hamilton 形式で書き下すことはできない。(30) において $\gamma_i = 0$ とすると、運動方程式は非線形 Schrödinger 方程式の渦の運動方程式に一致し、 $\gamma_r = 0$ とすると非線形拡散方程式の渦の運動方程式と一致する。[5]

最後に $N = 2$ (二体渦) の場合についてその安定性を議論する。(30) 式で $N = 2$ とすると

$$\tilde{\gamma} v_{1\parallel} + n_1 \log \frac{|\gamma_i \dot{\boldsymbol{x}}_1|}{d} v_{1\perp} = n_2 \exp\left(-\frac{r v_{2\parallel}}{2}\right) K_0\left(\frac{|v_{2\perp}|}{2} r\right) v_{2\perp}, \quad (31a)$$

$$\tilde{\gamma} v_{2\parallel} + n_1 \log \frac{|\gamma_i \dot{\boldsymbol{x}}_2|}{d} v_{2\perp} = n_1 \exp\left(\frac{r v_{1\parallel}}{2}\right) K_0\left(\frac{|v_{1\perp}|}{2} r\right) v_{1\perp}, \quad (31b)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\gamma} v_{1\perp} - n_1 \log \frac{|\gamma_i \dot{\boldsymbol{x}}_1|}{d} v_{1\parallel} \\ &= n_2 \exp\left(-\frac{r v_{2\parallel}}{2}\right) \left[K_1\left(\frac{|v_{2\perp}|}{2} r\right) |v_{2\perp}| - K_0\left(\frac{|v_{2\perp}|}{2} r\right) v_{2\parallel} \right], \end{aligned} \quad (31c)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\gamma} v_{2\perp} - n_2 \log \frac{|\gamma_i \dot{\boldsymbol{x}}_2|}{d} v_{2\parallel} \\ &= -n_1 \exp\left(\frac{r v_{1\parallel}}{2}\right) \left[K_1\left(\frac{|v_{1\perp}|}{2} r\right) |v_{1\perp}| + K_0\left(\frac{|v_{1\perp}|}{2} r\right) v_{1\parallel} \right], \end{aligned} \quad (31d)$$

が得られる。ここで

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \frac{\gamma_r}{\gamma_i}, & r &= |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|, \\ v_{j\parallel} &= \frac{\gamma_i \dot{\boldsymbol{x}}_j \cdot \boldsymbol{r}}{r} & v_{j\perp} &= \frac{\gamma_i \dot{\boldsymbol{x}}_j \cdot \boldsymbol{J} \boldsymbol{r}}{r}, \end{aligned}$$

である。今、我々は $r = \text{const.}$ となるような (31) 式の解を探す。 $n_1 = n_2 = 1$ ($n_1 = n_2 = -1$)、すなわち同符号のとき (31) 式は

$$v_{1\parallel} = v_{2\parallel} = 0, \quad v_{1\perp} = -v_{2\perp} \equiv V \quad (32)$$

なる解を持つ。 $v_{j\parallel}$ は2個の渦を結ぶ線に平行な方向の速度を、 $v_{j\perp}$ はそれに垂直な方向の速度を表わしているから、(32)式はある固定点のまわりに一定速度で回転する解を表わす。また、 $n_1 = -n_2 = 1$ ($n_1 = -n_2 = -1$)、すなわち異符号の場合には(31)式は

$$v_{1\parallel} = v_{2\parallel} = 0, \quad v_{1\perp} = v_{2\perp} \equiv V \quad (33)$$

なる解を持つ。これは一定速度 V で伝播する解を表わす。この二つの解を0次にとって、その線形安定性を調べてみよう。

$$\begin{aligned} r &= r^0 + \tilde{r}, & r &= x_1 - x_2, & |r^0| &\equiv r^0 = \text{const.} \\ \dot{x}_j &= \dot{x}_j^0 + \dot{\tilde{x}}_j, \end{aligned}$$

とおき(31)式に代入する。ここで \sim は摂動を表わす。

同符号の場合には

$$\tilde{v}_{1\parallel} = -\tilde{v}_{2\parallel}, \quad \tilde{v}_{1\perp} = -\tilde{v}_{2\perp}, \quad \tilde{r} = r^0 \exp(\alpha t), \quad (34)$$

$$\tilde{v}_{j\parallel} \propto \tilde{r}, \quad \tilde{v}_{j\perp} \propto \tilde{r}, \quad (35)$$

なる結果が得られる。ここで

$$\alpha = \frac{2z|V|}{Dr^0} [K_1(K_1 - zK_0) - K_1'(1 - zK_1)], \quad (36)$$

$$D = -(K_0^2 + K_1^2)z^2 + zK_1 + K_1^2,$$

$$z = \frac{r^0|V|}{2}, \quad K_j = K_j(z) \quad (j = 0, 1),$$

であり K_j は j 次のベッセル関数である。また、プライムは引数についての微分を表わす。(32)、(33)式を(31)式に代入することにより

$$\log \frac{|V|}{d} = -K_0(z), \quad z = K_1^{-1}(|\tilde{r}|), \quad (37)$$

なる関係が成り立っていることがわかる。(37)を用いて α を z の関数として表わした結果を図1に示す。 $z \rightarrow +0$ で $\alpha \rightarrow +0$ 、 $z \rightarrow \infty$ で $\alpha \rightarrow \frac{2|V|}{r^0}$ であり、 α は常に正、したがって(32)の解は不安定である。また、異符号の場合には

$$\tilde{r} = r^0 \exp(\beta t), \quad \tilde{v}_{j\parallel} \propto \tilde{r}, \quad \tilde{v}_{j\perp} \propto \tilde{r}, \quad (38)$$

$$\beta = -\frac{2z|V|}{Ar^2(K_0 + zK_1)} \left[K_1'(K_1^2 - z^2K_0^2 + zK_1 - zK_0K_1)(zK_1 + 1 - K_0) + (K_0 + zK_1)^2 \right], \quad (39)$$

$$A = -\frac{1}{K_0 + zK_1} \left[[zK_1'(zK_0 - K_1) - (1 - K_0)(zK_1 + 2K_0)] \times (K_1^2 - z^2K_0^2 + zK_1 - zK_0K_1) + (K_0 + zK_1)^2 \right],$$

となる。 β を z の関数として表わした結果を図2に示す。 $z \rightarrow +0$ で $\beta \rightarrow -0$ 、 $z \rightarrow \infty$ で $\beta \rightarrow \infty$ であり、ある z の値で β の正負が変わる。 z は渦間距離 r に比例するから、ある臨界距離が存在し、初期に渦対がその距離以下であれば系は安定であり、それ以上離しておかれているときには系は不安定であるということがわかる。

参考文献

- [1] J.M.Greenberg, SIAM J. Appl. Math. **39**, 301 (1980).
- [2] P.S.Hagan, SIAM J. Appl. Math. **42**, 762 (1982).
- [3] E. Bodenschatz et al, PhysicaD **32**, 135 (1988).
- [4] L. M. Pismen et al, Phys. Rev. A **42**, 2471 (1990).
- [5] J. C. Neu, PhysicaD **43**, 385 (1990).

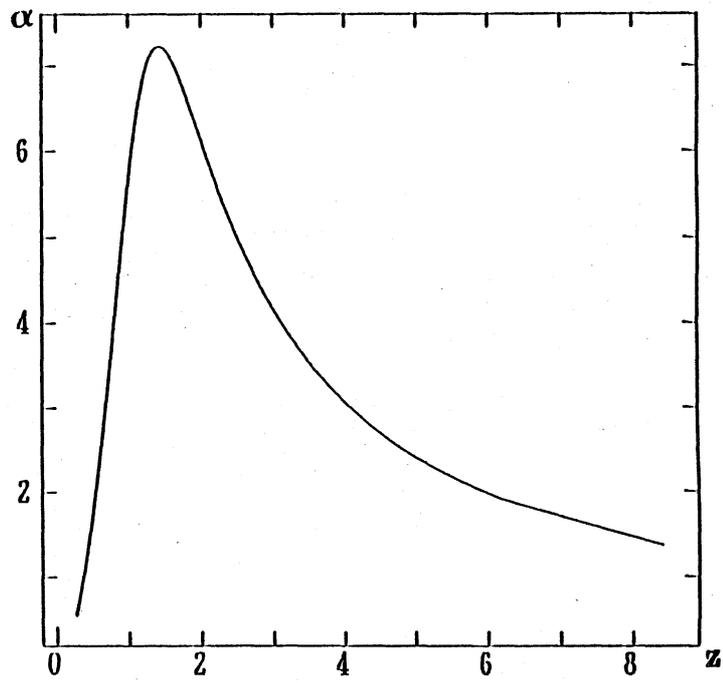


图 1

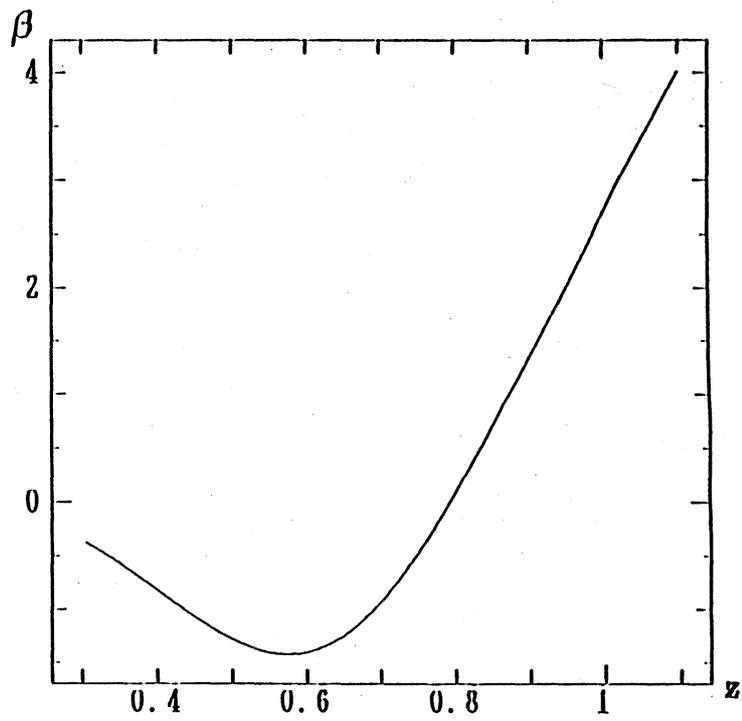


图 2