

Multifractal Measures and Martingales

岡田 達也 (Tatsuya Okada) 関口 健 (Takeshi Sekiguchi)
福島県立医大 東北学院大・教養

塩田 安信 (Yasunobu Shiota)
秋田大学・教育

1 Multifractal とは

この節では Falconer の本 [2] に従って Multifractal に関する基礎的なことを簡単に説明する. 詳しいことは [2] あるいは Feder [3] を参照せよ.

1.1 $f(\alpha)$ と $\tau(q)$ の定義

μ をサポートが有界な \mathbf{R}^d 上の p.m. とし, $\{B_i\}$ で \mathbf{R}^d の δ -mesh cubes を表す. このとき

$$N_\delta(\alpha) = \#\{i: \mu(B_i) \geq \delta^\alpha\}, \quad -\infty < \alpha < \infty \quad (1)$$

$$S_\delta(q) = \sum_{\mu(B_i) > 0} \mu(B_i)^q, \quad -\infty < q < \infty \quad (2)$$

とおく. $N_\delta(\alpha)$ が α の単調増加関数となり, $S_\delta(q)$ が q の単調減少関数となることは容易にわかるであろう. 次に

$$f(\alpha) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\log \{N_\delta(\alpha + \varepsilon) - N_\delta(\alpha - \varepsilon)\}}{-\log \delta}, \quad 0 \leq \alpha < \infty \quad (3)$$

$$\tau(q) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\log S_\delta(q)}{-\log \delta} \quad (4)$$

と定義する. ただし, (3) では $\log 0 = -\infty$ とする. $f(\alpha)$ のことを multifractal spectrum, $\tau(q)$ のことを mass exponent という.

上の定義において $\delta \downarrow 0$ の代わりに $\delta_{k+1}/\delta_k > \exists C > 0$ を満たす $\delta_k \downarrow 0$ を考えれば十分であることに注意する.

1.2 $f(\alpha)$ と $\tau(q)$ の関係

十分小さい ε に対して

$$\begin{aligned} N_\delta(\alpha + \varepsilon) - N_\delta(\alpha - \varepsilon) &= \#\{i : \delta^{\alpha+\varepsilon} \leq \mu(B_i) < \delta^{\alpha-\varepsilon}\} \\ &\sim \#\{i : \mu(B_i) \simeq \delta^\alpha\} \end{aligned}$$

であり, 十分小さい δ に対しては

$$N_\delta(\alpha + \varepsilon) - N_\delta(\alpha - \varepsilon) \sim \delta^{-f(\alpha)}$$

となるから

$$\begin{aligned} S_\delta(q) &= \sum_{\mu(B_i) > 0} \mu(B_i)^q \\ &\sim \int_0^\infty (\delta^\alpha)^q \cdot \delta^{-f(\alpha)} d\alpha \\ &\sim \int_0^\infty \delta^{-(f(\alpha)-q\alpha)} d\alpha \\ &\sim \delta^{-\sup_{0 \leq \alpha < \infty} \{f(\alpha)-q\alpha\}} \quad (\delta \downarrow 0) \end{aligned}$$

即ち

$$\tau(q) = \sup_{0 \leq \alpha < \infty} \{f(\alpha) - q\alpha\}, \quad -\infty < q < \infty \quad (5)$$

の成り立つことが予想される. もちろんこの議論は厳密ではないからつねに (5) が成り立つとはいえないが, 次の結果が得られている.

定理 1.1 ([2]) $f(\alpha)$ が存在すれば $\tau(q)$ も存在して (5) が成り立つ.

[2] には $q > 0$ のときだけ証明してある. $q < 0$ のときにも同様の方法で示せるとあるが, $\exists q' < q : \tau(q') < \infty$ という条件が必要と思われる (次節参照).

1.3 Legendre 変換

以下 f が存在して (5) 式が成り立っているとし, さらに f は α について微分可能で, strictly convex であるとしよう. このとき各 q に対して (5) 式を attain する α を $\alpha(q)$ で表すと

$$\tau(q) = f(\alpha(q)) - q\alpha(q) \quad (6)$$

が成り立つ. ここでもし α が q で微分可能ならば

$$\frac{d}{dq} \tau(q) = \frac{d}{d\alpha} f(\alpha(q)) \frac{d}{dq} \alpha(q) - q \frac{d}{dq} \alpha(q) - \alpha(q) \quad (7)$$

となる. 一方, $\alpha(q)$ が

$$\frac{d}{d\alpha}(f(\alpha) - q\alpha) = 0$$

の解となることより

$$q = \frac{d}{d\alpha}f(\alpha(q)) \quad (8)$$

だから, これを (7) に代入して

$$\frac{d}{dq}\tau(q) = -\alpha(q) \quad (9)$$

が得られる.(6), (9) は, Legendre 変換と呼ばれているものである.

μ が具体的に与えられている場合は, Legendre 変換を用いて次の手順で $f(\alpha)$ のグラフを描ける場合が多い.

1. $\tau(q)$ を求める
2. (9) 式を用いて $\alpha(q)$ を求める
3. (6) 式を用いて $f(\alpha(q))$ を求める
4. パラメーター q を動かして $(\alpha(q), f(\alpha(q)))$ のグラフを描く

なお (8) より $f(\alpha)$ のグラフは $\alpha = \alpha(q)$ で傾き q をもつことに注意しておく.

1.4 Box-counting 次元と情報量次元

特に $q = 0, 1$ のとき $f(\alpha(q))$ がどのような量となるのか考える.

1) $q = 0$ のとき.

$$f(\alpha(0)) = \tau(0) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\sum_{\mu(B_n) > 0} 1}{-\log \delta}$$

ここで最終項は $\text{supp}(\mu)$ の box-counting 次元 $\dim_B \text{supp}(\mu)$ を表す. f は $\alpha = \alpha(0)$ で傾き 0 となるから, f が $\alpha = \alpha(0)$ で最大値 $\dim_B \text{supp}(\mu)$ を取ることもわかる.

2) $q = 1$ のとき. このとき $S_\delta(1) = 1$ より $\tau(1) = 0$ だから

$$f(\alpha(1)) = \alpha(1) = -\frac{d\tau}{dq}(1) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\sum_{\mu(B_n) > 0} \mu(B_i) \log \mu(B_i)}{\log \delta}$$

ここで最終項は μ の情報量次元 $\dim_I \mu$ を表す. また f の $\alpha = \alpha(1)$ での傾きは 1 となる. さらに, 任意の $h > 0$ に対して, $\delta \rightarrow 0$ のとき

$$\mu \left\{ \cup B_i : \delta^{\alpha(1)+h} < \mu(B_i) < \delta^{\alpha(1)-h} \right\} \rightarrow 1$$

が成り立つ. これは $\mu(B_i)$ の値が $\delta^{\alpha(1)}$ に近い $\delta^{-\alpha(1)}$ 個の δ -mesh cubes の上に μ が集中していると解釈される.

1.5 3 進 Cantor 集合をサポートにもつ p.m. の例

$0 < p < 1$, とする. $I = I_{0,0} = [0, 1]$ とおき, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} I_{n,j} &= \left[\frac{j}{3^n}, \frac{j+1}{3^n} \right), \quad j = 0, 1, \dots, 3^n - 2 \\ I_{n,3^n-1} &= \left[\frac{3^n-1}{3^n}, 1 \right] \end{aligned}$$

とおく. このとき I 上の p.m. μ で

$$\begin{aligned} \mu(I_{n+1,3j}) &= p\mu(I_{n,j}), \\ \mu(I_{n+1,3j+1}) &= 0, \\ \mu(I_{n+1,3j+2}) &= (1-p)\mu(I_{n,j}), \end{aligned}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, $j = 0, 1, \dots, 3^n - 1$, を満たすものが一意に決まる. μ はサポートとして 3 進 Cantor 集合をもつ p.m. である. この μ に対して $f(\alpha)$ の存在を仮定して, 上に述べた方法で $f(\alpha)$ を求めてみよう. $\delta = 3^{-k}$ のときを考えることにより

$$\tau(q) = \frac{\log(p^q + (1-p)^q)}{\log 3} \quad (10)$$

がわかる. (9) より

$$\alpha(q) = -\frac{p^q \log p + (1-p)^q \log(1-p)}{(p^q + (1-p)^q) \log 3} \quad (11)$$

が得られ, (6) を用いると

$$f(\alpha(q)) = \frac{\log(p^q + (1-p)^q) - \frac{q(p^q \log p + (1-p)^q \log(1-p))}{p^q + (1-p)^q}}{\log 3} \quad (12)$$

が得られる. (10), (11), (12) より

$$\begin{aligned} \dim_B \text{supp}(\mu) &= \tau(0) = \frac{\log 2}{\log 3}, \\ \dim_I \mu &= \alpha(1) = -\frac{p \log p + (1-p) \log(1-p)}{\log 3}, \end{aligned}$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \alpha(q) = -\frac{\log p \wedge (1-p)}{\log 3}, \quad \lim_{q \rightarrow -\infty} \alpha(q) = -\frac{\log p \vee (1-p)}{\log 3},$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} f(\alpha(q)) = 0, \quad \lim_{q \rightarrow -\infty} f(\alpha(q)) = 0$$

の成り立つこともすぐわかる。

この方法では $f(\alpha)$ の存在を示すことがキーポイントとなる。[2] では large deviation の理論における Chernoff の定理を用いて存在を示している。

定理 1.2 (Chernoff の定理の a variant cf.[1],[2]) X_1, X_2, \dots が i.i.d. で

$$E[\log X_1] < \log \gamma, \quad P[X_1 > \gamma] > 0$$

を満たすならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_1 X_2 \cdots X_n \geq \gamma^n]^{1/n} = \sup_{0 \leq q < \infty} E[X_1^q] \gamma^{-q}$$

が成り立つ。

この結果を $P[X_1 = p] = P[X_1 = 1-p] = 1/2$ なる i.i.d. X_1, X_2, \dots に適用することにより, $f(\alpha)$ の存在が導ける。

2 Martingale による定式化

この節では前節で述べた multifractal の理論を martingale の概念を用いて書き直す。

2.1 定義

$I = [0, 1]^d$ とし, 整数 $r(\geq 2)$ に対して

$$I_{n,j_1,\dots,j_d} = \prod_{k=1}^d \left(\frac{j_k}{r^n}, \frac{j_{k+1}}{r^n} \right)$$

$$F_n = \sigma \{ I_{n,j_1,\dots,j_d} : j_1, \dots, j_d = 0, \dots, r^n - 1 \}$$

($n = 0, 1, 2, \dots, j_1, \dots, j_d = 0, \dots, r^n - 1$) とおく。P を I 上の Lebesgue 測度, μ を I 上の p.m. とし, P に関する期待値を $E[\cdot]$ で表す。

$$Z_n = \sum_{j_1, \dots, j_d=0}^{r^n-1} \frac{\mu(I_{n,j_1,\dots,j_d})}{P(I_{n,j_1,\dots,j_d})} 1_{I_{n,j_1,\dots,j_d}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

と定める。

命題 2.1

- 1) (Z_n, F_n) は P に関する martingale となる.
- 2) $E[Z_n] = 1, n = 0, 1, 2, \dots$
- 3) $0 \leq Z_n \leq r^{nd}$

この (Z_n, F_n) を用いて multifractal の理論に現れる諸量を定義し直そう. $-\infty < \alpha < \infty, -\infty < q < \infty$ に対して

$$\begin{aligned}
N_{r^{-n}}(\alpha) &= r^{nd} P[Z_n \geq r^{n(d-\alpha)}] \\
&= \#\{I_{n,j_1, \dots, j_d} : \mu(I_{n,j_1, \dots, j_d}) \geq (r^{-n})^\alpha\}, \\
S_{r^{-n}}(q) &= r^{nd(1-q)} E[Z_n^q : Z_n > 0] \\
&= \sum_{\mu(I_{n,j_1, \dots, j_d}) > 0} \mu(I_{n,j_1, \dots, j_d})^q, \\
\bar{f}(\alpha) &= \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \{N_{r^{-n}}(\alpha + \varepsilon) - N_{r^{-n}}(\alpha - \varepsilon)\}}{-\log r^{-n}} \\
&= d + \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log P[r^{n(d-\alpha+\varepsilon)} > Z_n \geq r^{n(d-\alpha-\varepsilon)}]}{n \log r} \\
&= d + \bar{f}_0(\alpha), \\
\underline{f}(\alpha) &= \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \{N_{r^{-n}}(\alpha + \varepsilon) - N_{r^{-n}}(\alpha - \varepsilon)\}}{-\log r^{-n}} \\
&= d + \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log P[r^{n(d-\alpha+\varepsilon)} > Z_n \geq r^{n(d-\alpha-\varepsilon)}]}{n \log r} \\
&= d + \underline{f}_0(\alpha), \\
\bar{\tau}(q) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log S_{r^{-n}}(q)}{-\log r^{-n}} \\
&= d(1-q) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log E[Z_n^q : Z_n > 0]}{n \log r} \\
&= d(1-q) + \bar{\tau}_0(q), \\
\underline{\tau}(q) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log S_{r^{-n}}(q)}{-\log r^{-n}} \\
&= d(1-q) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log E[Z_n^q : Z_n > 0]}{n \log r} \\
&= d(1-q) + \underline{\tau}_0(q)
\end{aligned}$$

とおく. $\bar{f}(\alpha) = \underline{f}(\alpha), \bar{\tau}(q) = \underline{\tau}(q)$ のとき各々共通の値を $f(\alpha), \tau(q)$ で表す.

2.2 基本的な結果

命題 2.2

- 1) $-\infty \leq \underline{f}(\alpha) \leq \bar{f}(\alpha) \leq d$, $\underline{f}(\alpha) \neq -\infty$ ならば $\underline{f}(\alpha) \geq 0$, $\bar{f} \neq 0$
 2) $\tau(1) = 0$, $\tau(0) \geq 0$, $\bar{\tau}(q) \leq d$ ($q \geq 0$) で, 特に $\bar{\tau}(q) \leq d(1-q)$ ($0 \leq q \leq 1$)

命題 2.3 $-\infty < q < \infty$ に対して

$$\bar{\tau}(q) \geq \sup_{0 \leq \alpha < \infty} (\bar{f}(\alpha) - q\alpha),$$

$$\tau(q) \geq \sup_{0 \leq \alpha < \infty} (\underline{f}(\alpha) - q\alpha)$$

命題 2.4 $\exists q' < q: \tau(q') < \infty$ ならば

$$\bar{\tau}(q) \leq \sup_{0 \leq \alpha < \infty} (\bar{f}(\alpha) - q\alpha)$$

$q > 0$ のときこの条件は自然に満たされる.

定理 2.1 $\exists f, \exists q': \bar{\tau}(q') < \infty$ ならば $\forall q > q'$ に対して

$$\exists \tau(q) = \sup_{0 \leq \alpha < \infty} (f(\alpha) - q\alpha)$$

$\bar{\tau}(0) < \infty$ だから $q > 0$ のときはつねに成り立つ.

定理 2.2 $\exists f$ strictly concave, continuous on $\{f > -\infty\}$, $\exists q': \bar{\tau}(q') < \infty$ ならば $\forall q > q', \forall \varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[Z_n^q : Z_n > 0] - E[Z_n^q : r^{n(d-\alpha(q)+\varepsilon)} > Z_n \geq r^{n(d-\alpha(q)-\varepsilon)}]}{r^{n\tau_0(q)}} = 0$$

特に $q = 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[Z_n : r^{n(d-\alpha(q)+\varepsilon)} > Z_n \geq r^{n(d-\alpha(q)-\varepsilon)}] = 1$$

$\alpha_{-\infty}, \alpha_{\infty}$ を

$$\alpha_{-\infty} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \operatorname{ess. sup}_{Z_n > 0} \left(d - \frac{\log Z_n}{n \log r} \right),$$

$$\alpha_{\infty} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \operatorname{ess. inf}_{Z_n > 0} \left(d - \frac{\log Z_n}{n \log r} \right) \geq 0$$

で定義すると $[\alpha_{\infty}, \alpha_{-\infty}]$ の外で $f = -\infty$ だから, f の存在は $[\alpha_{\infty}, \alpha_{-\infty}]$ だけで考えればよい.

2.3 i.i.d. の積から生成される Martingale について

$X \geq 0$ を F_1 -可測で $E[X] = 1$ なる r.v. とすると X は次のように表せる:

$$X = r^d p(j_1, \dots, j_d) \text{ on } I_{1, j_1, \dots, j_d} \quad (j_1, \dots, j_d = 0, \dots, r-1)$$

ここで $p(j_1, \dots, j_d) \geq 0$ ($j_1, \dots, j_d = 0, \dots, r-1$) で

$$\sum_{j_1, \dots, j_d} p(j_1, \dots, j_d) = 1$$

を満たす. X_n ($n \geq 1$) を F_n -可測, X_1 と同分布で F_{n-1} とは独立な r.v. とし, P に関する martingale を

$$\begin{aligned} Z_0 &= 1, \\ Z_n &= \prod_{k=1}^n X_k, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

で定義する. このとき

$$\begin{aligned} D_{\min} &= \min_{p(j_1, \dots, j_d) > 0} \log \frac{1}{p(j_1, \dots, j_d)} / \log r (\geq 0), \\ D_{\max} &= \max_{p(j_1, \dots, j_d) > 0} \log \frac{1}{p(j_1, \dots, j_d)} / \log r (\geq 0) \end{aligned}$$

とおくと

定理 2.3

1) $D_{\min} < D_{\max}$ のとき (即ち, $p(j_1, \dots, j_d)$ が同じでないとき). このとき

$$\begin{aligned} \tau(q) &= d(1-q) + \frac{\log E[X^q : X > 0]}{\log r} \\ &= \frac{\log \sum_{p(j_1, \dots, j_d) > 0} p(j_1, \dots, j_d)^q}{\log r}, \end{aligned}$$

$$f(\alpha(q)) = \tau(q) + q\alpha(q), \quad -\infty < q < \infty$$

ここで

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= -\frac{d}{dq} \tau(q) \\ &= -\frac{\sum_{p(j_1, \dots, j_d) > 0} p(j_1, \dots, j_d)^q \log p(j_1, \dots, j_d)}{\sum_{p(j_1, \dots, j_d) > 0} p(j_1, \dots, j_d)^q \cdot \log r} \end{aligned}$$

で $\alpha : (-\infty, \infty) \rightarrow (D_{\min}, D_{\max})$ は decreasing で onto ある.

$$f(\alpha) = -\infty, \quad \alpha \notin [D_{\min}, D_{\max}]$$

$$\tau(q) = \sup_{D_{\min} < \alpha < D_{\max}} (f(\alpha) - q\alpha)$$

f は

$$\alpha(0) = -\frac{\sum_{p(j_1, \dots, j_d) > 0} \log p(j_1, \dots, j_d)}{\sum_{p(j_1, \dots, j_d) > 0} 1 \cdot \log r}$$

で最大値

$$f(\alpha(0)) = \frac{\log \sum_{p(j_1, \dots, j_d) > 0} 1}{\log r} (= \dim_B \text{supp}(\mu))$$

を取る. また

$$f(D_{\min}) = \frac{\log \sum_{p(j_1, \dots, j_d) = r^{-D_{\min}}} 1}{\log r},$$

$$f(D_{\max}) = \frac{\log \sum_{p(j_1, \dots, j_d) = r^{-D_{\max}}} 1}{\log r}$$

で

$$f(\alpha(1)) = -\frac{\sum_{p(j_1, \dots, j_d) > 0} p(j_1, \dots, j_d) \log p(j_1, \dots, j_d)}{\log r} = \dim_I \mu$$

は f の唯一の fixed point である.

2) $D_{\min} = D_{\max}$ のとき (即ち, $p(j_1, \dots, j_d)$ がすべて同じとき).

このとき $D_{\min} = \min_{p(j_1, \dots, j_d) > 0} 1/\log r$ で

$$f(\alpha) = \begin{cases} D_{\min} & \alpha = D_{\min}, \\ -\infty & \alpha \neq D_{\min}, \end{cases}$$

$$\tau(q) = (1 - q)D_{\min}, \quad -\infty < q < \infty$$

となる.

この場合も前節の例のときと同様に f の存在を示すことがキーポイントとなり, ここでも Chernoff の定理が用いられる.

2.4 同じ $f(\alpha)$ をもつ p.m. について

$[0, 1]^d$ 上で定義された p.m. が $f(\alpha)$ によりどの程度特徴付けられるのか, 特別な場合に考えてみる.

$i = 1, 2$ に対して $d^{(i)} (\geq 1)$ および $r^{(i)} (\geq 2)$ を正の整数とする. このとき $I^{(i)} = [0, 1]^{d^{(i)}}$ 上に確率ベクトル $p^{(i)}(j_1, \dots, j_{d^{(i)}})$ ($j_1, \dots, j_{d^{(i)}} = 1, 2, \dots, r_i$) から 2.3 節のようにして作られる p.m. を $\mu^{(i)}$ とし, 対応する multifractal spectrum を $f^{(i)}$ とする. さらに $p^{(i)}(j_1, \dots, j_{d^{(i)}})$ のうち 0 でないものを $p_j^{(i)}$ ($j = 1, 2, \dots, r_{N_i}$) とする. このとき, 次の結果が得られる.

定理 2.4 $p_j^{(i)}$ ($j = 1, 2, \dots, r_{N_i}$) が定数でないとする. $f^{(1)} = f^{(2)}$ ならば, 整数 $r (\geq 2)$, $m^{(i)} (\geq 1)$ ($i = 1, 2$), および各要素が 0 でない確率ベクトル p_j , ($j = 1, 2, \dots, r^{d_B}$) が一意に存在して $r^{(i)}$ ($i = 1, 2$) は

$$r^{(i)} = r^{m_i}, \quad (m_1, m_2) = 1$$

と表され, $p_j^{(i)}$ ($j = 1, 2, \dots, r_{N_i}$) と $p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_{m_i}}$ ($j_1, j_2, \dots, j_{m_i} = 1, 2, \dots, r^{d_B}$) が一致する. ここで $d_B = f^{(i)}(\alpha(0))$ は 2 つの p.m. の support の box-counting 次元である.

この結果の証明には複素関数論を使う. 逆の成り立つことは $f^{(i)}$ の定義からすぐにわかる. また $p_j^{(i)}$ ($j = 1, 2, \dots, r_{N_i}$) が定数のときは, support の box-counting 次元が同じことを意味するだけである.

2.5 補足

今まで考えてきたような multifractal spectrum では負の値として $-\infty$ 以外取らないことはすでに述べた. 最近 Mandelbrot (例えば [4]) はランダムな multifractal の研究において負の multifractal spectrum というものを導入している. ここで multifractal がランダムとは, p.m. μ が 1 つに固定されているのではなく, ある確率空間 (Ω, Q) を動くパラメーター ω をもっていることを意味する. もちろん, このような場合でもサンプル ω ごとの multifractal spectrum を考える限り, $-\infty$ 以外に負の値を取ることはあり得ない. しかし multifractal spectrum を

$$f(\alpha) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\log E_Q[N_\delta(\omega, \alpha + \varepsilon) - N_\delta(\omega, \alpha - \varepsilon)]}{-\log \delta}$$

と定義すると, ある α に対しては $-\infty$ と正の値が平均されて有限な負の値を取るというのが Mandelbrot の考えのようである.

参考文献

- [1] P. Billingsley, *Probability and Measure*. John Wiley, 1979.
- [2] K. J. Falconer, *Fractal Geometry*. John Wiley, 1990.
- [3] J. Feder, *Fractals*. Plenum Press, 1988.
- [4] B. B. Mandelbrot, A class of multinomial multifractal measures with negative (latent) values for the "dimension" $f(\alpha)$. *Fractals' Physical Origin and Properties* (L. Pietronero ed.), Plenum Press, 1989.