数理解析研究所講究録
第781巻 1992年 118-121

無限直積測度の絶対連続性に関連する積分不等式

東北学院大学教養学部　渡利　千波 (Chinami WATARI)

1988 年の実解析セミナーで、次の問題が佐藤坦氏によって提出された。この問題の確率論的な意義（それが本稿の表題の理由である）は引用文献 [2] およびこの稿の直前に所載の佐藤氏の報告を見られたい。

問題　$f \in C^1 \cap L^1(-\infty,\infty)$, $f' \in AC$, $f''^2/f \in L^1(-\infty,\infty)$, $f > 0$ a.e. (dx) とする。　この仮定から　$f'^2/f \in L^1(-\infty,\infty)$　が結論できるか。

§1.　問題の解決

佐藤氏[3]は「f が ∞ の近傍で単調である」という付帯条件のもとでこの問題を肯定的に解かれたが、次の定理は、この問題を付帯条件なしに解決する。

定理 1.　問題の条件の下で

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f'^2/f)\,dx \leqq (3/2)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f\,dx\right\}^{1/2}\cdot\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(f''^2/f)\,dx\right\}^{1/2}.$$

証明の核心は、(有限と限らない)区間 (a, b) において成立する次の補題である。

補題 1.　閉区間 [a, b](無限区間を許す)上で定義された非負関数 f が
$f \in C^1$, $f' \in AC$, $f'(a) = f'(b) = 0$, $f(x) \neq 0$ $(a < x < b)$, $f''^2/f \in L^1(a,b)$
をみたしているとする。このとき次の等式・不等式が成立する。

$$(1)\qquad \int_a^b \frac{f'^4}{f^3}\,dx = \frac{3}{2}\int_a^b \frac{f'^2\ f''}{f^2}\,dx,$$

$$(2)\qquad \int_a^b \frac{f'^4}{f^3}\,dx \leqq \frac{9}{4}\int_a^b \frac{f''^2}{f}\,dx,$$

証明　f は非負という仮定だけで、正であるとは仮定されていないが、区間 (a, b) の内部で 0 になることはない。(もし 2 点で 0 になれば、Rolle の定理からその中間に　$f'(x) = 0$ となる点があるし、ただ1点で 0 になればその点で f は極小で、やはり $f'(x) = 0$　となり、仮定に反~~する~~。)

端点 a, b では　f も 0 になる可能性があり、議論は若干微妙になるが、次のようにすれば、すべて正当化される。

① 自然数 n をとり、まず f 自身のかわりに $f_n(x)=(1/n)+f(x)$ で定義される関数 $f_n(x)$ を考える。 $f_n'=f'$, $f_n''=f''$ であるし、f_n は 補題 1 のすべての条件をみたし、しかも $f_n(x)>0$ である。
② 積分範囲を「少し」切り落として、コンパクト区間 $[c,\ d]\subset(a,\ b)$ を考える。 この区間はすぐに現れるように、「十分大きく」定める。
さて、区間 $(a,\ b)$ の内部では f' での除算も自由に行なうことができるから、 $[(1/f')'=-f''/f'^2$ に注意して]、

$$\int_c^d \frac{f'^2 f''}{f_n^2}dx=\int_c^d \frac{f''}{f'^2}\cdot\frac{f'^4}{f_n^2}dx$$ から部分積分で

$$=\left[-\frac{1}{f'}\cdot\frac{f'^4}{f_n^2}\right]_c^d+\int_c^d\frac{1}{f'}\cdot\left(\frac{f'^4}{f_n^2}\right)'dx$$

$$=4\int_c^d\frac{f'^2 f''}{f_n^2}dx-2\int_c^d\frac{f'^4}{f_n^3}dx$$

を見て、移項して整理すれば

$$(*)\qquad \int_c^d\frac{f'^4}{f_n^3}dx=\frac{3}{2}\int_c^d\frac{f'^2 f''}{f_n^2}dx+\frac{1}{2}\left[\frac{f'^3}{f_n^2}\right]_c^d$$

が得られる。 ここで左辺の積分値は正であり、右辺第２項は $[c,\ d]$ を十分大きく $[(a,\ b)$ に近く] とっておけば、絶対値において たとえば左辺の積分値の 1/4 をこえないと考えてよい。 したがって (*) から

$$(**)\qquad \int_c^d\frac{f'^4}{f_n^3}dx\leqq 2\int_c^d\frac{f'^2 f''}{f_n^2}dx$$

が成立し、Schwarz の不等式で上式の右辺は

$$2\left\{\int_c^d\frac{f'^4}{f_n^3}dx\right\}^{1/2}\cdot\left\{\int_c^d\frac{f''^2}{f_n}dx\right\}^{1/2}$$

をこえないから、(*) の左辺の積分は $c\downarrow a,\ d\uparrow b$ とするとき有限確定値に収束する。 つまり、(*) において $c\downarrow a,\ d\uparrow b$ とすることが許されて、 f のかわりに f_n とした形で (1) が成立する。 自然数 n は任意に大きくとっておけるから、左辺で単調収束定理、右辺で優収束定理を適用しながら $n\to\infty$ とすると、(1) の成立することがわかる。

(2) は (1) を用いて

$$\int_a^b\frac{f'^4}{f^3}dx=\frac{3}{2}\int_a^b\frac{f'^2}{f^{3/2}}\ \frac{f''}{f^{1/2}}dx$$

の右辺に Schwarz の不等式を適用し、簡約・平方 で得られる。

補題 2. さらに $f \in L^1(a, b)$ であれば

$$(3) \quad \int_a^b \frac{f'^2}{f}\, dx \leqq \frac{3}{2}\left\{\int_a^b f\, dx\right\}^{1/2}\left\{\int_a^b \frac{f''^2}{f}\, dx\right\}^{1/2}.$$

証明 $\displaystyle\int_a^b \frac{f'^2}{f}\, dx = \int_a^b f^{1/2} \cdot \frac{f'^2}{f^{3/2}}\, dx$ に Schwarz の不等式と補題 1. (2) を用いればよい。 (以上)

定理の証明を完結するには、開集合 $\{x ; f'(x) \neq 0\}$ を 開区間 (a, b) の和として表しておいて、各 (a, b) 上での積分 (3) を、補題 2. を利用して評価し、加え合わせる。 因数 (3/2) を別にすれば、積分の平方根の積を加え合わせることになるが、級数論の (Cauchy-)Schwarz の不等式で自然に処理される。

§2. 若干の拡張 (その 1)

f'^{p+2}/f^{p+1} の積分を $f'^{p}f''/f^{p}$ $(p > -1,\ p \neq 0)$ の積分で表示する等式が成立する。 その際の「比例定数」は $(p+1)/p$ である。 証明のためには、補題 1.(1)に相当するものを部分積分で証明すればよい。 $f \neq 0$ と仮定しても一般性を失わないこと、f' での除算ができること、等は補題 1. の証明と同じである。

f'^{p+1}/f^{p} の可積分性は p が大きいほど強い性質である。 このことは直接に (Holder の不等式で) 検証することができる。 実際、$0<r<s$ のとき、$(s+1)/(r+1)$ と $(s+1)/(s-r)$ が一組の共役指数であるから、$r=\{s(r+1)/(s+1)\}-(s-r)/(s+1)$ に注意して、この共役指数について Holder の不等式 を適用すればよい。 したがって次の定理は 定理 1 の拡張であると同時に、精密化にもなっている。

定理 2. $p>0$, $f \in C^1 \cap L^1(-\infty, \infty)$, $f' \in AC$, $f''^{p+1}/f^{p} \in L^1(-\infty, \infty)$, $f > 0$ a.e.(dx) とすると $f'^{2p+2}/f^{2p+1} \in L^1(-\infty, \infty)$ である。

証明 補題 1. に相当するものを $f'^{2p}\cdot f''/f^{2p}$ から出発して作り、f の可積分性と Holder の不等式とを利用する。 その際、自明な等式

$$2p = \{p/(p+1)\}(2p+1) + p/(p+1)$$

に注意せよ。 この結果が「ほとんど最良」であることは、次の例でわかる。

例.
$$g(x) = \begin{cases}(1-x^2)^{\alpha} & (|x| \leqq 1)\\ 0 & (|x| > 1)\end{cases}$$ から

$$f(x) = \Sigma\ c_k\, g(|x-2k|)$$

(和は $-\infty<k<\infty$ でとり、$\{c_k\}$ は正規化定数列 : $c_k > 0$, $\|f\|_1 = 1$)

を作る。 $r>2p+1$ に対して α を $2p+1<\alpha<r$ と採れば、

$|f''|^{p+1}/f^p \in L^1(-\infty,\infty)$ かつ $|f'|^{r+1}/f^r \not\in L^1(-\infty,\infty)$ である。

実際、区間 [0, 1]（特に $x=1$ の近傍）での可積分性（右辺）・積分不能性（左辺）が容易に検証できる。 全区間に拡張するには単に繋ぎ合わせればよい。

この例を修正して、α を $3<\alpha<4$ となるように採れば、

「定理 1. は成立するが ∞ の近傍で単調でない f 」の例も得られる。

§3. 若干の拡張（その２）（古田孝之氏 [1] による）

補題 1. の段階では f の可積分性は要求されていない。補題 1. と f の可積分性を組み合わせて 補題 2. ひいては 定理 1. が証明されたのであった。f の可積分性のかわりに、f の２乗可積分性を仮定して（補題 1. ないしそれを修正したものと）組み合わせると、一連の積分不等式が得られる。たとえば、

定理 3. $f \in C^1 \cap L^2(-\infty,\infty)$, $f' \in AC$, $f''^2/f \in L^1(-\infty,\infty)$, $f>0$ a.e. とする。 このとき $f'^2/\sqrt{f} \in L^1(-\infty,\infty)$.

証明 補題 1. から $f'^4/f^3 \in L^1(-\infty,\infty)$ だから、 $f \in L^2(-\infty,\infty)$ と組み合わせて Schwarz の不等式を用いればよい。

最後に、関連した１つの結果（佐藤 坦氏による）を紹介しておこう。

定理 4. $f''^2/f \in L^1(-\infty,\infty)$ であれば、f''^2/f の積分と $(\sqrt{f})''$ の積分とは「ほぼ同じ大きさ」である。 つまり、一方は他方の定数倍を超えない。

注意. $(\sqrt{f})''$ が２乗可積分ということから f'^4/f^3 の可積分性は出ない（前出の例で $\alpha=2$ とせよ）。 その条件から f'^2/f が自動的に可積分になるか否かは、目下のところわかっていない。

文献

[1] 古田孝之 private communication, March 1991.

[2] K. Kitada and H. Sato :
On the absolute continuity of infinite product measure and its convolution, Prob. Theory and Related Fields, 81(1989), 607-627.

[3] 佐藤 坦 $\int(f''^2/f)<\infty \Rightarrow \int(f'^2/f)<\infty$?
実解析セミナー 1988, 44-48.