数理解析研究所講究録
第783巻 1992年 176-186

Tangent sequence of r.v.'s について
－Hitczenko らの martingale 不等式への応用－

富山大理 菊池万里 (Masato Kikuchi)

Kwapień－Woyczyński (cf. [6]) によって導入された確率変数の tangent sequence の概念は、その後、主に P. Hitczenko によって martingale 不等式の研究に用いられている。([1]〜[4])。その中で、tangent sequence を用いて martingale 不等式を独立増分の場合に帰着させる方法は、大変興味深くまた、有用(?)と思われるので、ここに紹介したい。

まず、tangent sequence の定義を与える。以下、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及び σ-field の増大列 $(\mathcal{F}_n)$ が与えられているものとし、便宜上 $\mathcal{F}_0$ は trivial σ-field とする。

定義 1 (Kwapień－Woyczyński)

$(\mathcal{F}_n)$-adapted な 2つ確率変数列 (X_n), (Y_n) が tangent とは

$$(1) \qquad \mathbb{P}(X_n \geq \lambda \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{P}(Y_n \geq \lambda \mid \mathcal{F}_{n-1}) \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}.$$

となることである。また，(X_n) と $(-X_n)$ が tangent のとき，(X_n) は conditionally symmetric であるという。

確率変数 X の $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ に関する conditional distribution を $Q(X|\mathcal{G})$ と書くことにすれば (1) は，次のようになる。

$$Q(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = Q(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) \quad n \in \mathbb{N}$$

<u>定義 2</u> (Kwapień - Woyczyński)

$(\mathcal{F}_n)$-adapted な確率変数列 (Y_n) が condition (CI) をみたすとは，

$$\begin{cases} Q(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) = Q(Y_n|\mathcal{G}) & \text{for every } n \in \mathbb{N} \\ (Y_n) \text{ is } \mathcal{G}\text{-conditionally independent.} \end{cases}$$

となる $\mathcal{F}$ の sub-σ-field $\mathcal{G}$ が存在することである。

P. Hitczenko (1990 [3]) は，これら 2 つの概念をうまく使って，独立な確率変数列に対して Rosenthal が示した moment inequality を martingale の場合に拡張している。つまり

定理１（Hitczenko）

すべての martingale $f=(f_n)$ と $2\leq p<\infty$ に対し

(2) $$\|f^*\|_{L^p} \leq \frac{Kp}{\mathrm{Log}\, p}\{\|s(f)\|_{L^p}+\|d^*\|_{L^p}\}$$

が成立する．ただし $\mathrm{Log}\, p=\max\{\ln p, 1\}$ で，$\frac{Kp}{\mathrm{Log}\, p}$ は best possible．

定理１において，$f^*=\sup_n|f_n|$，$d^*=\sup_n|d_n|$，$d_n=f_n-f_{n-1}$ 及び $s(f)=(\sum_{n=1}^{\infty}E[d_n^2|\mathcal{F}_{n-1}])^{1/2}$ である。以下，記号はすべてこれらに準ずるものとする．また，$Kp/\mathrm{Log}\, p$ が best possible とは (2) で $Kp/\mathrm{Log}\, p$ の代りに C_p とおいたとき，$C_p\geq kp/\mathrm{Log}\, p$ となる $k>0$ が存在するということである．

さて，(2) は，本質的には Rosenthal によって (d_n) が独立の場合にはじめて示され，その後，Johnson－Schechtman－Zinn [5] によって，正確な growth rate $Kp/\mathrm{Log}\, p$ が計算された．martingale 不等式との関連は，歴史的な背景も含めて Hitczenko [3] に詳しい．尚 (2) と逆向きの不等式も，もち論成立するがその場合の constant の growth rate は，多数の著者によって知られていて，$\sqrt{p}$ である．

以下に定理1の証明の概略を、tangent sequences の応用を中心に、Hitczenko に従って述べる：(2) の growth rate $Kp/\operatorname{Log} p$ が best possible であることについては、Johnson－Schechtman－Zinn によって（(d_n) が独立の場合に）既に示されているので、ここでは省略する。

証明の方針は次の通りである：martingale $f=(f_n)$ を2つの martingale g, h の和に分解する。$f=g+h$，ここに g はその difference sequence が condition (CI) をみたすもの，h はその difference sequence が conditionally symmetric となるものである。次に、g については Johson－Schechtmann－Zinn の結果 (i.e. independent case) に帰着させ、h については、いわゆる "good λ 不等式" に帰着させる。以上の方針のもとに、次の手順で証明を進める。① g の処理 ② h の処理 ③ 分解の存在。

まず、g の処理から始める。

命題 1.

$g=(g_n)$ は martingale で difference sequence $(e_n)=(g_n-g_{n-1})$ が condition (CI)（定義2）をみたすとする。このとき

$$\|g^*\|_{L^p} \leq \frac{Kp}{\operatorname{Log} p}\{\|s(g)\|_{L^p}+\|e^*\|_{L^p}\} \qquad p\geq 2$$

が成立する。（Kは$\mathcal{G}$によらない定数>0）.

証明：Johson − Schechtman − Zinn の結果をあらためて書くと
(ξ_n)が独立，$E[|\xi_n|]<\infty$，$E[\xi_n]=0$ ならば

$$(3) \qquad \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \right\|_{L^p} \leq \frac{Kp}{\operatorname{Log} p} \left\{ \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \right\|_{L^2} + \| \xi^* \|_{L^p} \right\}$$

ということである。さて，(e_n)は condition (CI) をみたすから，
ある sub-σ-field $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を取ると

$$\begin{cases} Q(e_n | \mathcal{F}_{n-1})(\cdot, B) = Q(e_n | \mathcal{G})(\cdot, B) \text{ a.s} & \text{for } {}^\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ (e_n) \text{ は } \mathcal{G}\text{-conditionally independent.} \end{cases}$$

とできる。(e_n)の$\mathcal{G}$−cond. independentness より，$N \in \mathbb{N}$に対し

$$Q((e_n)_{n=1}^N | \mathcal{G})(\cdot, dx) = \bigotimes_{n=1}^{N} Q(e_n | \mathcal{G})(\cdot, dx) \quad \text{a.s.}$$

つまり，projection $P_n((x_1, \cdots, x_N)) = x_n$ は $Q((e_n)_{n=1}^N | \mathcal{G})(\cdot, dx)$ に関して独立で

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q((e_n)_{n=1}^N | \mathcal{G})(\cdot, dx) P_n(x) = \int_{\mathbb{R}} x \, Q(e_n | \mathcal{G})(\cdot, dx)$$

$$= E[e_n | \mathcal{G}] = E[e_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0.$$

従って、Johnson − Schechtman − Zinn の結果(3)より

$$E[|\sum_{n=1}^{N} e_n|^p \mid \mathcal{G}]^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} Q((e_n)_{n=1}^N \mid \mathcal{G})(\cdot, dx) \,|\sum_{n=1}^{N} p_n(x)|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq \frac{Kp}{\operatorname{Log} p}\Big\{\Big(\int_{\mathbb{R}^N} Q((e_n)_{n=1}^N \mid \mathcal{G})(\cdot, dx)\,|\sum_{n=1}^{N} p_n(x)|^2\Big)^{1/2}$$

$$+\Big(\int_{\mathbb{R}^N} Q((e_n)_{n=1}^N \mid \mathcal{G})(\cdot, dx) \sup_{1\leq n\leq N} |p_n(x)|^p\Big)^{1/p}\Big\}$$

$$\leq \frac{Kp}{\operatorname{Log} p}\Big\{ E[|\sum_{n=1}^{N} e_n|^2 \mid \mathcal{G}]^{1/2} + E[e^{*p} \mid \mathcal{G}]^{1/p}\Big\} \qquad (p \geq 2)$$

となる。ここで、$E[|\sum_{n=1}^{N} e_n|^2 \mid \mathcal{G}]^{1/2} = \sum_{n=1}^{N} E[e_n^2 \mid \mathcal{G}]^{1/2} = s(g)$ ($\because (e_n)$ は $\mathcal{G}$-cond. indep) に注意して、

$$E[|\sum_{n=1}^{N} e_n|^p \mid \mathcal{G}]^{1/p} \leq \frac{Kp}{\operatorname{Log} p}\{ s(g) + E[e^{*p} \mid \mathcal{G}]^{1/p}\} \qquad p \geq 2$$

となる。両辺の L^p-norm を取って、$N \to \infty$ とすれば求む結論を得る。□

次に h の処理にかかる。それは、Burkholder, Davis, Garsia, Gundy らによって、既に大変よく知られている、分布不等式に帰着させる方法であり、目新しいものではない。従ってここでは、本質的な部分に触れるだけにとどめ、詳細は省略する。

命題2

$h = (h_n)$ は martingale で、その difference sequence (d_n) は conditionally symmetric (定義1) であるとする。このとき、

$$\|h^*\|_{L^p} \leq \frac{Kp}{\mathrm{Log}\,p}\{\|s(h)\|_{L^p} + \|d^*\|_{L^p}\} \quad p \geq e^2$$

が成立する.（K は f によらない）

補題（Hitczenko）

$f=(f_n)$ は martingale で，各 $n\geq 1$ に対し，$|d_n|=|f_n-f_{n-1}|\leq$ $\leq W_n$ なる $\mathfrak{F}_{n-1}$-measurable r.v.'s W_n が存在すると仮定する．このとき，分布不等式

$$\mathbb{P}(f^*>\beta\lambda,\ s(f)\vee W^*\leq\delta\lambda)\leq 2\varepsilon(\alpha)\,\mathbb{P}(f^*>\lambda),\quad \delta>0,\ \beta>1+\delta,\ \lambda>0$$

が成立する．ただし，$\alpha=(\beta-1-\delta)/\delta$，$\varepsilon(\alpha)=\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\log\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\right)$.

この分布不等式から，（少々細かい計算が必要であるが）通常の方法により，$p\geq e^2$ に対し

(4) $\quad \|f^*\|_{L^p}\leq\frac{Kp}{\mathrm{Log}\,p}\|s(f)\vee W^*\|_{L^p}\leq\frac{Kp}{\mathrm{Log}\,p}\{\|s(f)\|_{L^p}+\|W^*\|_{L^p}\}$

となる。これを用いて，命題２は次のように示される．

命題２の証明：(d_n) が conditionally symmetric だから，任意の bounded Borel function $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に対し

(5) $$E[\Phi(d_n, d_{n-1}^*) | \mathcal{F}_{n-1}] = E[\Phi(-d_n, d_{n-1}^*) | \mathcal{F}_{n-1}] \quad a.s$$

である．従って

$$d_n' = d_n I_{\{|d_n| \leq 2d_{n-1}^*\}}, \quad d_n'' = d_n I_{\{|d_n| > 2d_{n-1}^*\}}$$

とおくと，(d_n')，(d_n'') は martingale difference seq. である．(Davis の分解)．また，$|d_n| + 2d_{n-1}^* \leq 2|d_n| \leq 2d_n^*$ on $\{|d_n| > 2d_{n-1}^*\}$ だから，$|d_n''| \leq 2(d_n^* - d_{n-1}^*)$．故に

(6) $$\|(h'')^*\|_{L^p} \leq \|\sum_{n=1}^{\infty} |d_n''|\|_{L^p} \leq 2\|d^*\|_{L^p}$$

他方，$W_n = 2d_{n-1}^*$ として h' に I の補題 (5) を用いると

(7) $$\|(h')^*\|_{L^p} \leq \frac{Kp}{\mathrm{Log}\,p}\{\|s(h')\|_{L^p} + 2\|d^*\|_{L^p}\}$$
$$\leq \frac{Kp}{\mathrm{Log}\,p}\{\|s(h)\|_{L^p} + \|d^*\|_{L^p}\} \quad (p \geq e^2)$$

(ただし，K は行ごとに異なる．) (6)，(7) より容易に命題2を得る。

かくの如く，命題1 又は 2 の条件をみたす martingale g，h については，目的の不等式が得られた．従って，あとは任意の martingale $f = (f_n)$ が，このような g と h の和に分解できる

ことを示せばよい。以下に、その方法を述べるが、ここが Hitczenko の論文の essential な部分といえそうである。

命題３

$p_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ を n-th projection，$\mathcal{B}_n = \sigma(p_1, \cdots, p_n)$，$\mathcal{B} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$，とし，$\bar{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$，$\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$，$\bar{\mathcal{F}}_n = \mathcal{F}_n \otimes \mathcal{B}_n$ $n = 1, 2, \cdots$ とおく．任意の $(\mathcal{F}_n)$-adapted sequence (d_n) に対し

$$\bar{P}(H) = \int_\Omega P(d\omega) \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \bigotimes_{n=1}^{\infty} Q(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})(\omega, dx)\, I_H(\omega, x)$$

$$(H \in \bar{\mathcal{F}})$$

$$\bar{d}_n(\omega, x) = d_n(\omega), \quad \bar{e}_n(\omega, x) = p_n(x)$$

とおくとき，次が成立：

i) $(\bar{d}_n)$ と $(\bar{e}_n)$ は（$\bar{P}$ と $(\bar{\mathcal{F}}_n)$ に関して）tangent.

ii) $(\bar{e}_n)$ は $\mathcal{G} = \mathcal{F} \otimes \{\phi, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$ に関して condition (CI) をみたす

iii) (d_n) と $(\bar{d}_n)$，及び $(E[\Phi(d_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}])$ と $(\bar{E}[\Phi(\bar{d}_n) \mid \bar{\mathcal{F}}_{n-1}])$ の有限次元分布は等しい．ただし，Φ は bounded Borel function，$\bar{E}[\ \mid \bar{\mathcal{F}}]$ は $\bar{P}$ に関する conditional expectation である．

iv) $\bar{d}_n$ と $\bar{e}_n$ は $\bar{\mathcal{F}}_{n-1}$-conditionally indep. $(n = 1, 2, \cdots)$ である。

この補題の証明は簡単なので略す.

定理1の証明: $p \geqq e^2$としてよい. 与えられたmartingale $f = (f_n)$のdifference sequence (d_n)に対し, 命題3の条件をみたす$(\bar{d}_n)$, $(\bar{e}_n)$をある確率空間$(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$上にとり

$$\bar{f}_n = \sum_{k=1}^{n} d_k, \quad \bar{g}_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{e}_n, \quad \bar{h}_n = \sum_{k=1}^{n} (\bar{d}_k - \bar{e}_k)$$

とおく. $(\bar{d}_n)$と$(\bar{e}_n)$はtangentだから

$$\bar{E}[\bar{e}_n \mid \bar{\mathcal{F}}_{n-1}] = \bar{E}[\bar{d}_n \mid \bar{\mathcal{F}}_{n-1}] \underset{d}{=} E[d_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0,$$

i.e. $(\bar{d}_n)$, $(\bar{e}_n)$は共にmartingale differenceである。また.

$$\Delta_N(\bar{g}) \equiv \Big(\sum_{k=1}^{N} \bar{E}[\bar{e}_k^2 \mid \bar{\mathcal{F}}_{k-1}]\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{k=1}^{N} \bar{E}[\bar{d}_k^2 \mid \bar{\mathcal{F}}_{k-1}]\Big)^{1/2}$$

$$\underset{d}{=} \Big(\sum_{k=1}^{N} E[d_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}]\Big)^{1/2} \equiv \Delta_N(f)$$

両辺のL^p-normをとって$N \to \infty$とすると$\|\Delta(\bar{g})\|_{L^p} = \|\Delta(f)\|_{L^p}$.
次に, $(\bar{d}_n)$と$(\bar{e}_n)$がtangentだから

$$\bar{P}(\bar{e}^* > \lambda) \leqq 2\bar{P}(\bar{d}^* > \lambda) = 2P(d^* > \lambda) \qquad \lambda > 0$$

となる。最初の不等号は, 2つのtangent sequencesの間に常に成立するもので証明は容易である. (Hitczenko [1] or [2])

$$s(\bar{h}) = (s(\bar{f})^2 + s(\bar{g})^2)^{1/2} \leq s(\bar{f}) + s(\bar{g})$$

であることより従う. (8) と (9) を合せると容易に定理 1 が得られる.

□

参 考 文 献

[1] P. Hitczenko, Comparision of moments for tangent sequences of random variables, Prob. Th. Rel. Fields 78 (1988), 223-230.

[2] ____________, Best constants in the decoupling inequality for non-negative random variables, Stat. Probab. Lett. 9 (1990), 327-329.

[3] ____________, Best constants in martingale version of Rosenthal's inequality, Ann. Probab. 18 (1990), 1656-1668.

[4] ____________, Upper bounds for the L_p-norms of martingales, Prob. Th. Rel. fields 86 (1990), 225-238.

[5] W.B. Johnson, G. Schechtman, and J. Zinn, Best constants in moment inwqualities for linear combination of independent and exchangeable random variables, Ann. Probab. 13 (2985), 234-253.

[6] S. Kwapien and W.A. Woyczynski, Tangent sequences of random variables: Basic inequalities and their applications. Proc. Conf. on Almost Everywhere Convergence in Probab. and ergodic Theory, Academic, New - York, (1989), 237-265.