

無限アーベル化と特異ホモロジー群のファクター

江田 勝哉 (Katsuya Eda)

筑波大学数学系

よく知られているように弧連結ハウスドルフ空間 X の基本群 $\pi_1(X, x)$ のアーベル化、つまり $\pi_1(X, x)/\pi_1(X, x)'$ は特異ホモロジー群 $H_1(X)$ と同型です。筆者は何年か前から、もう 10 年位になるのですが、Hawaiian earring $H = \{(x, y) : (x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n^2, n \in \mathbb{N}\}$ に興味をもっています。H は原点で局所単連結ではないので基本群はちょっと複雑な表現になり特異ホモロジー群 $H_1(H)$ はなかなか複雑であるという状態です。けれども直感的には H の 1 次ホモロジー群はその各々の輪への巻き付きの数を数えることにより無限積 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ となるのが自然な感じであると思います。実際 Čech ホモロジー群は $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ になりますし、また $\pi_1(H, o)$ から $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ に自然な全射がありますから $H_1(H)$ から $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ に自然な全射があります。では何故 $H_1(H)$ は $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ にならないのでしょうか。

アーベル化するということは積の順序を無視することです。つまり積の順序を無視することで同値関係をいれて G を割ることがアーベル化 G/G' を与えます。ところで $\pi_1(H, o)$ から $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ に自然な全射は積の順序を無視して巻き付きの数を数えることにより得られているわけですからおおざっぱな直感をおしすすめれば $\pi_1(H, o)$ のアーベル化は $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ なのです。けれども H には巻き付きが無限個あるので順序を入れ換えようとする無限回入れ換える必要があります。一方 交換子群の元は有限回の入れ換えをしてくれるだけなので特異ホモロジー群 $H_1(H)$ がなかなか複雑であるという状態が生まれるのです。

一般に群 G を与えたとき、自由群 F からの全射 $h : F \rightarrow G$ によって $G' = h(F')$ が成立します。とくに 2 次の自由群を F_2 とすると $G' = \langle h(F_2') : h \in \text{Hom}(F_2, G) \rangle$ です。但し、ここで $\langle X \rangle$ は X で生成される G の部分群です。

ここで積の順序を無限回、少なくとも可算無限回無視することを代数的におこなうことを考えます。標語的にいうと 有限 support の代数から可算無限 support の代数へ ということです。その 1 つ頼りは次の Specker の定理です。([3] 参照)

定理 1 (E. SPECKER). $\text{Hom}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ は射影 $p_n (n \in \mathbb{N})$ で生成される可算生成自由アーベル群となる。

つまり、 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ は \mathbb{Z} に関して reflexive であるということです。このようなきれいな定理が成り立つところのそばにうまく機能する体系があるだろうというのがその頼りなのです。さきの標語は可算生成自由アーベル群 $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ へ、自由アーベル群 $\bigoplus_I \mathbb{Z}$ から $\tilde{\mathbb{Z}}^I = \{x \in \mathbb{Z}^I : \{i : x(i) \neq 0\} \text{ は可算}\}$ へ、可算ブーケから Hawaiian earring H へ、非可算ブーケから非可算 Hawaiian earring H_I へ という解釈をします。(ただし H は S^1 のコピーの可算積空間の座標軸全体と考えられるので H_I は S^1 のコピー I 個の積空間の座標軸全体とする。)

$\pi_1(H, o)$ は少し複雑な群になるといいましたが H. B. Griffiths [5] が表現したもので ([6] で証明のギャップが埋まっています)

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} *_{i < n} Z_i * \lim_{\leftarrow} (*_{n \leq k < j} Z_k, p_{ij}^n : n \leq i \leq j \in \mathbb{N}),$$

但し $p_{ij}^n : *_{n \leq k < i} Z_k \rightarrow *_{n \leq k < j} Z_k$ は標準的射影. このような表現は非可算 Hawaiian earring H_I の場合うまくいきません. そこで自由群が語の同値類を使って定義されるので語の長さを可算無限にして同値類を定義すると意外に素直なかたちで表現できます. 可算無限といっても有理数 \mathbb{Q} の順序を思い浮かべて下さい. これが [1] で free σ -product と呼んでいるものの特別な場合です. そこでは $\pi_1(H, o)$ は $\times_{\mathbb{N}} Z$, $\pi_1(H_I, o)$ は $\times_{\mathbb{Q}} Z$ と表現されます. このような背景のもとに σ -無限交換子群 G^{σ} σ -無限アーベル化 $Ab^{\sigma}(G)$ をつぎのように定義します.

C_{σ} を $\times_{\mathbb{N}} Z = \pi_1(H, o)$ の要素で各々の component への射影が 0 となるものからなる部分群とします. そして $G^{\sigma'} = \langle h(C_{\sigma}) : h \in \text{Hom}(\times_{\mathbb{N}} Z, G) \rangle$, $Ab^{\sigma}(G) = G/G^{\sigma'}$ とします.

普通のアーベル化では $Ab(Ab(G)) = Ab(G)$ が成立しますが Ab^{σ} では成立していないようです (完全にはチェックしていません). けれども次が成立します.

定理 2 [1]. 群 G について

$Ab^{\sigma}(G) = G$ が成立することと G が cotorsion-free アーベル群であることは同値.

つまり Ab^{σ} はファンクターになっているのである群に無限回繰り返して適用するといつか動かなくなるのですがそれが cotorsion-free アーベル群となるということです. ですから Ab^{σ} の極限のファンクターを σ -無限アーベル化と呼んだ方がふさわしいかもしれません. アーベル群が cotorsion-free であるとは torsion-free で有理数群 \mathbb{Q} 及び p -進整数群 \mathbb{J}_p を含まないことと同値です. また cotorsion-free 群への準同型写像は制御しやすいといった事情を考慮するとそう筋の悪い話ではなさそうなのです. ただしその結果 Torsion 群はすべて 0 に対応することになりますからそこを頭に入れておくことは必要です. さて Ab は $\pi_1(X, x)$ に対して $H_1(X)$ を与えますが, $Ab^{\sigma}(G)$ は $Ab(G)$ の準同型像になっているのでこれに対応する特異ホモロジー群の準同型像を定義できないだろうか? と考えます.

無論, 単体的複体で特異ホモロジー群に一致していないようなものは位相的には自然に定義できるはずがないので, 局所的によくない空間, 典型的には H において特異チェイン群のバウンダリー作用素によるイメージより大きくなるようなものを定義することをめざします.

$C(\Delta_n, X)$ を単体 Δ_n から空間 X への連続写像全体とし C_n を $C(\Delta_n, X)$ で生成される自由アーベル群とする. バウンダリー作用素 $\partial_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n$ も通常と同じように定義する. ここまでは特異ホモロジー群の定義と同じ道筋です. ただ $C(\Delta_n, X)$ をコンパクト開位相のはいった位相空間と考え, C_n はその空間上の自由位相アーベル群とみなします. 一般に空間 Y 上の自由位相アーベル群は代数的には Y で生成される自由アーベル群であるので C_n に位相が入っていると見なすわけです. すると ∂_n は連続準同型写像になります. 普通どおり $Z_n(X) = \text{Ker}(\partial_n)$,

$B_n(X) = \text{Im}(\partial_{n+1})$ とすると $Z_n(X)$ は閉部分群ですが, $B_n(X)$ は閉とは限りません. そこで $H_n^T(X) = Z_n(X)/\overline{B_n(X)}$ と定義します, ただし閉包は自由位相アーベル群 C_n でとります.

定義自体は極めて自然なものです自由位相アーベル群の位相はなかなか手ごわい相手なので意外に難しい面があります. しかしとにかく

定理 3 [4]. ANR-空間 X に対して $B_n(X)$ は開, よって閉で $H_n^T(X) = H_n(X)$ が成立する.

となります. 興味は $B_n(X)$ の閉包をとるときどのように広がるか? という事です. $Z_n(X)$ の要素はある単体的複体 K から X への写像と考えられますがコンパクト開位相で考えてこの写像のいくらでも近くに K からの null-homotopic な写像がある状態だけ考慮すればよいのだと意外に難しい面というのは現れませんし, 先の話の無限アーベル化ともつながりません. null-homotopic を 0-homologous で置き換わると事情がだいぶ変わります. 主な理由は $\overline{B_n(X)}$ の要素を固定したときでも $B_n(X)$ の要素でいくらでも長さの長いものも考慮しなければならないということです, ただし長さとは C_n の生成元の和で表わしたときの長さ. ともかく $H_1^T(\mathbb{H}) = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $H_1^T(\mathbb{H}_I) = \overline{\mathbb{Z}}^I$ が成立し, また $\text{Ab}^\sigma(\times_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $\text{Ab}^\sigma(\times_I \mathbb{Z}) \simeq \overline{\mathbb{Z}}^I$ が成立します. これはほとんど当り前のようですが少し証明が必要です. それは $(\times_{\mathbb{N}} \mathbb{Z})^{\sigma'} = C_\sigma$ であること, つまり $h: \times_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \rightarrow \times_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ について $h(C_\sigma) \subset C_\sigma$ をいう必要があるからです. このことは $C_\sigma / (\times_{\mathbb{N}} \mathbb{Z})'$ が complete mod-U であることから導かれます [1]. この Hawaiian earring の場合について modulo homotopy でなおかつおおざっぱに言えば次のようにいえます. $Z_1(X)$ は基本群 G , $B_1(X)$ は交換子群 G' , $\overline{B_1(X)}$ は $G^{\sigma'}$, に対応する. このことはもう少し広い範囲の空間で成立しており, このような意味で $\overline{B_1(X)}$ と可算無限アーベル化はつながっています [1].

もう少し H_1^T について述べます.

定理 4 [4]. ハウスドルフ空間 X, Y に対して $X \vee Y$ を 1 点接着空間とする. このとき $H_1^T(X \vee Y) = H_1^T(X) \oplus H_1^T(Y)$ が成立する.

これは $H_1(X \vee Y) = H_1(X) \oplus H_1(Y) \oplus H_1(CX \vee CY)$ [2] という結果と比べると閉包の意味が少し明かとなる材料である. なお $n \geq 2$ のときは n -次元未満のホモトピー群が消えている場合でもこれらが H_n 及び H_n^T について成立するかはわかっていません. これは n -次元のユークリッド空間の連結開集合の境界の複雑さの問題を含んでいてなかなか面白い問題だとも思います.

単純に考えると H_n^T は閉包をとっているだけ情報が落ちていると思えるのですがいちがいにそうもいえません. つまり $H_n(X) \simeq H_n(Y)$ から $H_n^T(X) \simeq H_n^T(Y)$ は導けないのです. 例は次のようなものがあります. $\pi_1(Y) \simeq \mathbb{Q}$ なる単体的複体 Y をとり \mathbb{H} との 1 点接着空間 $\mathbb{H} \vee Y$ を X とします. $H_1(\mathbb{H})$ は \mathbb{Q} の非可算コピーの直和を部分群としてもつ [1] ので, $H_1(X) \simeq H_1(\mathbb{H})$ が成立します. 一方 $H_1^T(X)$ は定理 4 から $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{Q}$ で $H_1^T(\mathbb{H})$ は $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ですから同型にはなりません.

閉包をとることのメリットは $H_n(X)$ の群構造がはっきりしない場合でも閉包のなかに直感的には訳のわからない部分が含まれてしまうために $H_n^T(X)$ の群構造ははっきりするということがあります. Barratt-Milnor の有名な例, 2次元

Hawaiian earring, は H_3 が 0 とならない 2次元の空間ですが H_3^T は 0 になります. この空間に関して Ralph [7] の研究があります. 一見上記のファクターとよく似ているので少し説明します. 彼は特異チェーンのファクターをバナッハ代数を使って定義しそのチェーンからホモロジー群を導入しています. この種の空間の場合は H_n^T と同じ結果になりますが, 一般には H_n^T とは異なります. Ralph [7] の場合チェーンから群を定義するところはホモロジー理論を踏襲するわけで, H_n^T とは異なります. 実際その違いを示す例はそう難しくなく見つかります.

H_1^T には平面の部分集合に関しても興味のある問題があります.

定理 5 [4]. X を \mathbb{R} の任意の有界部分集合とすると, $H_1^T(\mathbb{R}^2 \setminus X) \simeq C(X, \mathbb{Z})$ が成立する.

$C(X, \mathbb{Z})$ の要素は点 $x \in X$ のまわりを何回まわったかを数えているわけなので理解しやすいことです. 次のことが成立する可能性があるのですがどうもわかりません.

問題: \mathbb{R}^2 の任意の部分集合について自然な写像 $\varphi: H_1^T(\mathbb{R}^2 \setminus X) \rightarrow C(X, \mathbb{Z})$ は単射か. この為の十分条件は次のものです.

C をコンパクト局所弧連結でかつ連結な \mathbb{R}^2 の部分集合とします. 任意の $\epsilon > 0$ についてコンパクト局所弧連結でかつ連結な $C^* \subset C$ と連続写像 $r: C \rightarrow C^*$ で次を満たすものをとれるか?

- (1) $\mathbb{R}^2 \setminus C^*$ は有限個の開連結集合の和;
- (2) 任意の $x \in C$ について x と $r(x)$ の距離が ϵ 未満.

$H_n^T(X)$ についてはまだ色々考えるべきであると思われることがあります. $H_n^T(X)$ は位相アーベル群になっています. 定理 3 はその位相を考慮しても離散的となっているということですので, 位相アーベル群としての完全列などを考えることが出来るわけですが (H_n^T の相対版を用意しても完全列には反例があり成立しませんが, そのずれを考察できるということ). またコホモロジーをどう扱うかなども筆者は興味があります. わからないということのついでで言いますと特異ホモロジー群 $H_1(\mathbb{H})$ がなかなか複雑であるという状態のなかで一番こまっていることはこれが torsion-free かどうかかわからないということなのです. もし torsion-free であれば $\overline{\text{Im}(\partial_2)}/\text{Im}(\partial_2) \simeq C_\sigma/(\times_{\mathbb{N}}\mathbb{Z})'$ は complete mod-U であることから algebraically compact となり $H_1(\mathbb{H})$ が $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ と algebraically compact torsion-free 群の直和となるので気持ちがよいのです. これと似た状態はサークル S^1 の可算無限積 $(S^1)^{\mathbb{N}}$ の one point union および one point union $S^1 \vee S^1$ の可算無限積でも起こる. (特に one point union $S^1 \vee S^1$ の可算無限積が torsion-free かどうかは 2 次の自由群の交換子群で定義される rank についてのある性質と同値となる [1, 8] 参照)

REFERENCES

1. K. Eda, *Free σ -products and noncommutatively slender groups*, J. Algebra (to appear).
2. ———, *The first integral singular homology groups of one point unions*, Quarterly J. Math. (to appear).
3. ———, アーベル群への集合論の応用, 数学 43 (1991), 128–138.

4. K. Eda and K. Sakai, *A factor of singular homology*, Tsukuba J. Math. (to appear).
5. H. B. Griffiths, *Infinite products of semigroups and local connectivity*, Proc. London Math. Soc. (3) **6** (1956), 455-480.
6. J. W. Morgan and I. A. Morris, *A Van Kampen theorem for weak joins*, Proc. London Math. Soc. (3) **53** (1986), 562-576.
7. W. J. Ralph, *An extension of singular homology to Banach algebras*, Pacific J. Math. **123** (1986), 391-405.
8. K. Eda, *The number of singular 2-simplexes for boundary*, (preprint).