数理解析研究所講究録
第 786 巻 1992 年 27-31

BCK 代数と BCI 代数の語の問題

静岡大学 理学部 古森 雄一 (Yuichi Komori)

自由 BCK 代数と自由 BCI 代数の語の問題は, これらの代数が定義された当時から問題とされていたが (cf. [Ise66]), 自由 BCK 代数の場合は 1981 年に筆者により ([Kom84]), 自由 BCI 代数の場合は東工大の鹿島亮氏により最近肯定的に解かれた ([KK]).

1 BCK タイプの代数系の公理

まず, 基礎となる体系である BI* 代数の公理系を提示します.

(B) $(y \to z) \to (x \to y) \to x \to z \quad = \quad 1,$

(M) $1 \to x \quad = \quad x,$

(E) $x \to y = 1$ かつ $y \to x = 1$ ならば $x = y.$

ここで, 足りない括弧は右から補うものとします. 例えば, 公理 (B) の左辺は正確は, $(y \to z) \to ((x \to y) \to (x \to z))$ と書くべきものです. また井関先生によるもともとの定義はこれの dual な言語が使われています. 演算記号と常数記号 "$\to, 1$" の代わりに "$*, 0$" が使われています. 公理 (B) は次のように書かれています: $((z * x) * (y * x)) * (z * y) = 0.$

公理 (B) において, $y = 1, x = 1, z = x$ と置いて公理 (M) を使えば次の (I) が導かれます.

(I) $x \to x = 1.$

更に次の二つの公理を考えます.

$$(\mathrm{C}) \quad (x \to y \to z) \to y \to x \to z \quad = \quad 1,$$

$$(\mathrm{K}) \quad x \to y \to x \quad = \quad 1.$$

4 つの代数系の公理をまとめると次のようになります.

BI* 代数の公理 : B, M, E

BCI 代数の公理 : BI* + C

BCK 代数の公理 : BCI + K

BIK* 代数の公理 : BI* + K

BIK* 代数は論文 [Kom84] では BCC 代数とよんでいます. また, その論文では, 自由 BCK 代数と自由 BIK*代数の語の問題を Gentzen 流の定式化により肯定的に解いています.

2 BCK 代数の Gentzen 流の定式化と肯定的解決

まず体系 LBI* を定義する.

公理

$$\alpha \Rightarrow \alpha \quad \text{と} \quad \Rightarrow 1.$$

推論規則

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Delta, \alpha, \Sigma \Rightarrow \beta}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \beta} \; (CUT)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \to \beta} \; (\Rightarrow\to)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Delta, \beta, \Sigma \Rightarrow \gamma}{\Delta, \alpha \to \beta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \gamma} \; (\to\Rightarrow)$$

体系 LBIK* は LBI* に次の推論規則 $(T \Rightarrow)$ を加えたものです.

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \beta}{\Gamma, \alpha, \Delta \Rightarrow \beta}\ (T \Rightarrow)$$

体系 LBCK は LBIK* に次の推論規則 $(I \Rightarrow)$ を加えたものです.

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \Rightarrow \gamma}{\Gamma, \beta, \alpha, \Delta \Rightarrow \gamma}\ (I \Rightarrow)$$

定理 1 $\alpha = \beta$ が *BCK(BIK*)* 代数の公理から出る $\Longleftrightarrow$ $\alpha \Rightarrow \beta$ と $\beta \Rightarrow \alpha$ が *LBCK(LBIK*)* で証明できる.

定理 2 *LBCK* と *LBIK** では *CUT* 除去定理がなりたつ.

定理 3 *LBCK* と *LBIK** は 決定可能な体系である.

定理 4 自由 *BCK* と 自由 *BIK** 代数の語の問題は肯定的に解かれる.

3 BCI 代数の Gentzen 流の定式化と肯定的解決

以下は東工大の鹿島亮氏の方法の紹介である.

定義 5 変数 x, 項 α に対して *balanced number* $B(x, \alpha)$ を次のように定義する.

1 $B(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \equiv y \\ 0 & \text{if } x \not\equiv y \end{cases}$

2 $B(x,1) = 0$

3 $B(x, \alpha \to \beta) = B(x,\beta) - B(x,\alpha)$

$$B(x, x \to x \to y) = -2$$

例 6 $B(y, x \to x \to y) = 1$

$$B(z, x \to x \to y) = 0$$

項の列 Γ が $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ のとき $B(x,\Gamma) = B(x,\alpha_1) + B(x,\alpha_2) + \cdots + B(x,\alpha_n)$ と定義する. 全ての変数 x に対して $B(x,\Gamma) = 0$ のとき 列 Γ は *balanced* であるという.

体系 *LBCI* は *LBI** に 推論規則 $(I \Rightarrow)$ と次の推論規則 (BT) を加えたものである.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Delta, \Gamma \Rightarrow \alpha}\ (BT)$$

ここでΔ は *balanced* な列である.

定理 7 $\alpha = \beta$ が *BCI* 代数の公理から出る $\Longleftrightarrow$ $\alpha \Rightarrow \beta$ と $\beta \Rightarrow \alpha$ が *LBCI* で証明できる.

定理 8 *LBCI* では *CUT* 除去定理がなりたつ.

定理 9 *LBCI* は 決定可能な体系である.

定理 10 自由 *BCI* 代数の語の問題は肯定的に解かれる.

参考文献

[Ise66] *Kiyoshi Iséki. An algebra related with a propositional calculus. Proceedings of the Japan Academy, 42:26–29, 1966.*

[KK] *Ryo Kashima and Yuichi Komori. The word problem for free BCI-algebras is decidable.*

[Kom84] Yuichi Komori. The class of BCC–algebras is not a variety. Mathematica Japonica, 29:391–394, 1984.