

京都大学数理解析研究所
複素WK B法の理論と物理学への応用

変り点問題に対するFedoryuk理論

慶応義塾大学理工学部 中野 実
Minoru NAKANO

§1 変り点問題

y, z を複素数, ϵ を正の小さなパラメータとすると,

$$\epsilon^2 \frac{d^2 y}{dz^2} - \{p_0(z) + \epsilon p_1(z)\} y = 0, \quad |z| \leq z_0, \quad 0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \quad (1)$$

において, $p_0(z)$ の零点を(1)の変り点(転移点)とよぶ。一般に, (1)の解を領域 $D : |z| \leq z_0$ で一度に求めることは困難な場合が多い。そこで, D を外部領域 D_0 と内部領域 D_1 の2つに分け, それぞれの領域において解を求め, それらを matching するのが普通の方法である (matching method)。

D_0 における解 Y_0 (外部解) は容易に求められるが, D_1 における解 Y_1 (内部解) は

$$\tilde{\epsilon}^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - \{p_0(x) + p_1(x)\} y = 0 \quad (\tilde{\epsilon} : \text{小さなパラメータ}) \quad (2)$$

の解であり, $|x| < \infty$ で求めなければならないため, $p_0(x) + p_1(x)$ の零点 (secondary turning points) の分布と Stokes curves をキチンと調べなければならない。そのために, $p_0(x), p_1(x)$ を任意の関数として一般論を語ることはできない。

例で考えてみよう。

(例)

$$\epsilon^2 \frac{d^2 y}{dz^2} - (z^3 - \epsilon) y = 0 \quad (1')$$

($p_0(z) = z^3, p_1(z) = -1$ の場合である。)

Step 1. $z = \epsilon^{1/3} x$ とおく。 $D_0 : C \epsilon^{1/3} \leq |z| \leq z_0$ (C は定数) において

$$Y_0 \sim z^{\frac{3}{4}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^{\left(\frac{1}{\epsilon} \frac{2}{5} z^{5/2} + z^{-1/2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$D_1 : |z| \leq C \epsilon^{1/3}$ 。これは $|x| \leq C$ と同じ。これを $|x| < \infty$ としたものを改めて D_1 とする。 (Stokes curves は §3 の例6)

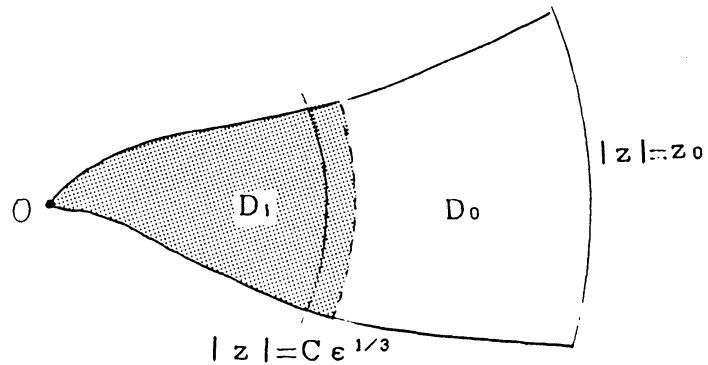
$$\tilde{\epsilon}^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - (x^3 - 1)y = 0 \quad (\tilde{\epsilon} = \epsilon^{1/6}) \quad (2')$$

$$Y_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon^{1/2} \end{bmatrix} (Z^3 - 1)^{\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^{-\frac{1}{6} \int^z \sqrt{Z^3 - 1} dz} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Step 2. $z = \epsilon^{1/3} x$ より, $z = n \epsilon^{1/6}$, $x = n \epsilon^{-1/6}$ ($|n|=1$) とおくと, $\epsilon \rightarrow 0$ のとき, $z \in D_0$, $x \in D_1$ であるから, matching が可能である:

$$Y_0 M = Y_1 \quad \text{とおくと} \quad M \sim \exp(3\pi i/4) \epsilon^{\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} e^c & 0 \\ 0 & e^c \end{bmatrix} \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

である (M は matching matrix とよばれている)。



Ref. Nakano-Nishimoto[9],
Wasow[12],[14].

§2 複素WKB解

前節の(2)または(2')は記号を改めて書くと

$$\epsilon^2 y'' - p(x)y = 0 \quad (|x| < \infty, 0 < \epsilon \leq \epsilon_0) \quad (1)$$

の形であり, 内部解 Y_1 は(1)の漸近解

$$y \sim p(x)^{-1/4} \exp\left[\pm \frac{1}{\epsilon} \int^x p(x)^{1/2} dx\right] \quad (2)$$

で表される。(2)は複素WKB解である。

Fedoryuk は(2)が double asymptotic property をもつことを示した:

$$y^\pm(x, \varepsilon) \sim p(x)^{-1/4} \exp\left[\pm \frac{1}{\varepsilon} \int p(x)^{1/2} dx\right] \dots \begin{cases} x \rightarrow \infty & \text{in } D^\pm \quad (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0), \\ \varepsilon \rightarrow 0 & (x \in D^\pm), \end{cases}$$

D^\pm を決定することが前節の例の場合にも必要である。 $D^+ \cap D^-$ のうち最大のことを Fedoryuk は特性領域 (canonical region) と名付けた。(secondary) turning points の近傍や ∞ の近傍においては région propre (Hukuhara[5]) と一致する。

Ref. Evgrafov-Fedoryuk [2].

§3 特性領域

特性領域は turning point x_0 から出る Stokes curve

$$\operatorname{Re} \int_{x_0}^x p(x)^{1/2} dx$$

によって囲まれたある領域である。

$$\xi = \xi(x) = \operatorname{Re} \int_{x_0}^x p(x)^{1/2} dx \quad (1)$$

とおくと、これは x -平面から ξ -平面への mapping である。特性領域は ξ -平面全体 (cutsが入っている) にうつされるような x -平面上の領域のことである。Stokes curve によって囲まれず x -平面上の領域は、(1) によってうつされる形状によって、次の2つのタイプに分類される。

(i) 半平面タイプ (half-plane type)

(1) によって、 $\operatorname{Re} \xi \geq \xi_0$ または $\operatorname{Re} \xi \leq \xi_0$ ($\xi_0 = \text{const.}$) にうつされる x -平面上の領域。

(ii) 帯状タイプ (strip type)

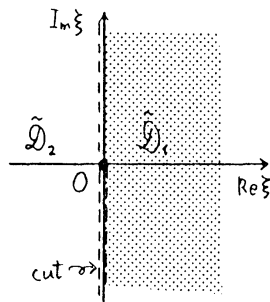
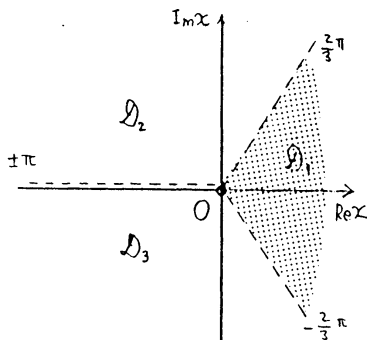
(1) によって、 $\xi_0 \leq \operatorname{Re} \xi \leq \xi_1$ ($\xi_0, \xi_1 = \text{const.}$) にうつされる x -平面上の領域。

これらの2つのタイプの組み合わせでいくつかの特性領域が定められる。

例をあげよう。

◎ $p(x)$ が多項式の場合

例1 $p(x) = x$ (Airy equation)



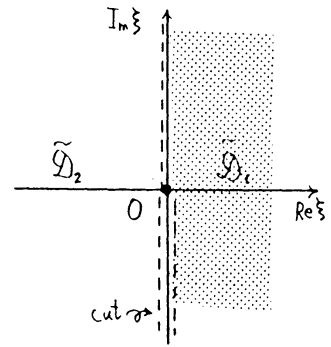
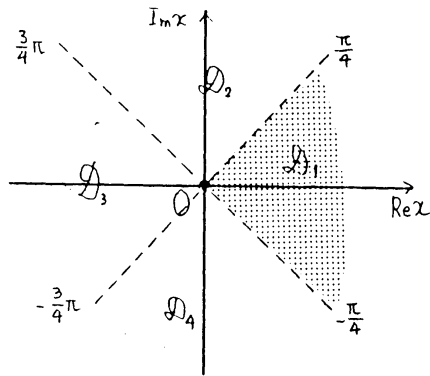
$$\tilde{D}_j := \xi(D_j), \xi = \int_0^x \sqrt{x} dx.$$

破線 ... Stokes curve.

D_1, D_2, D_3
は half plane type.

$D_1 \cup D_2$
は特性領域の1つ.

例 2 $p(x) = x^2$

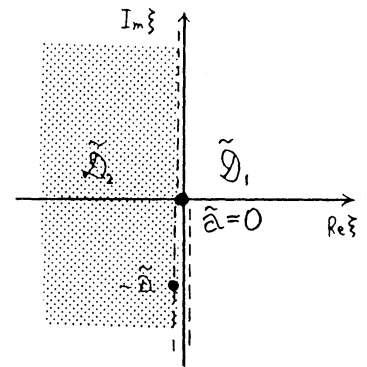
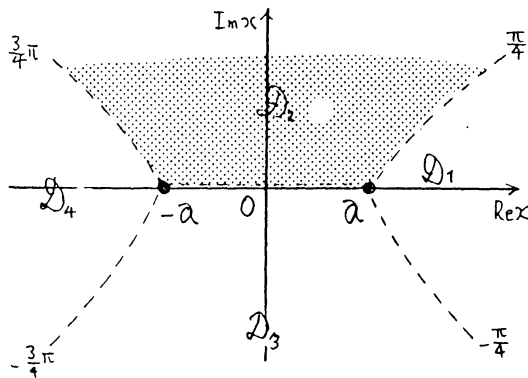


$$\xi = \int_0^x \sqrt{x^2} dx.$$

D_1, \dots, D_4 はいずれも half plane type.

$D_1 \cup D_2, D_2 \cup D_3, D_3 \cup D_4, D_4 \cup D_1$ は特性領域.

例 3 $p(x) = x^2 - a^2$ ($a > 0$)



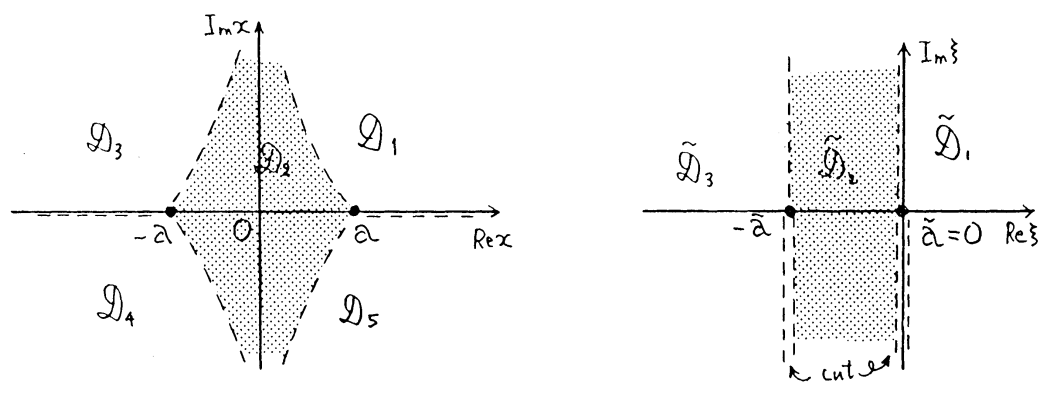
$$\xi = \int_a^x \sqrt{p(x)} dx.$$

($\tilde{D}_j := \xi(D_j), \tilde{a} := \xi(a)$)

D_1, \dots, D_4 はすべて half plane type.

$D_1 \cup D_2, D_1 \cup D_3, D_4 \cup D_2, D_4 \cup D_3, D_2 \cup D_3$ は特性領域.

例 4 $p(x) = a^2 - x^2$ ($a > 0$)

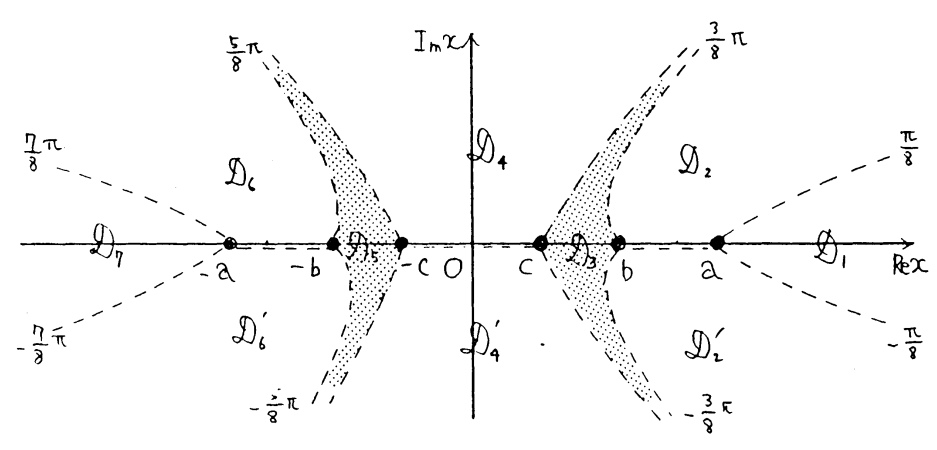


$$\xi = \int_a^x \sqrt{p(x)} dx.$$

D_2 は strip type, 他は half plane type.

$D_1 \cup D_2 \cup D_3, D_1 \cup D_2 \cup D_4, D_5 \cup D_2 \cup D_3, D_5 \cup D_2 \cup D_4,$
 $D_1 \cup D_5, D_3 \cup D_4$ は特性領域.

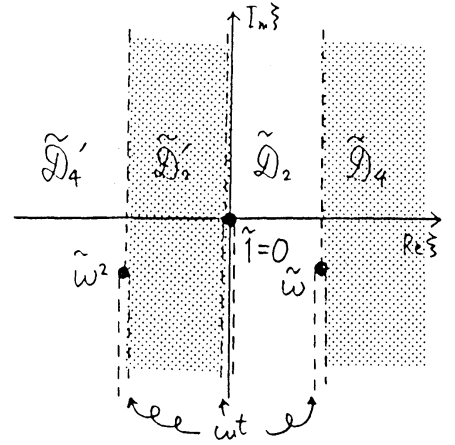
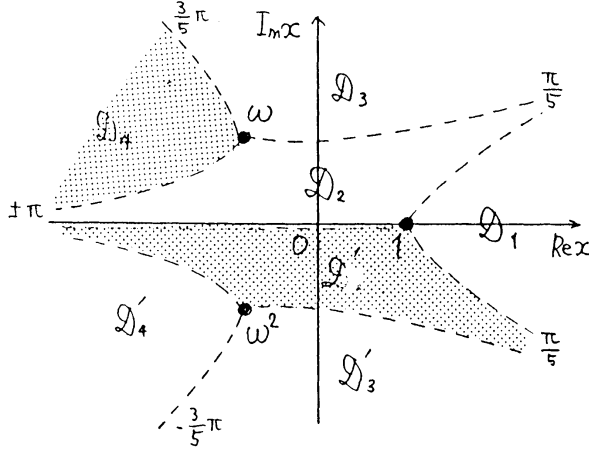
例 5 $p(x) = (x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)$ ($a > b > c > 0$)



D_3, D_5 は strip type, 他はすべて half plane type.

$D_1 \cup D_2, D_2 \cup D_3 \cup D_4$ は特性領域 (他にも沢山ある).

例6 $p(x) = x^3 - 1$ (§1の例)



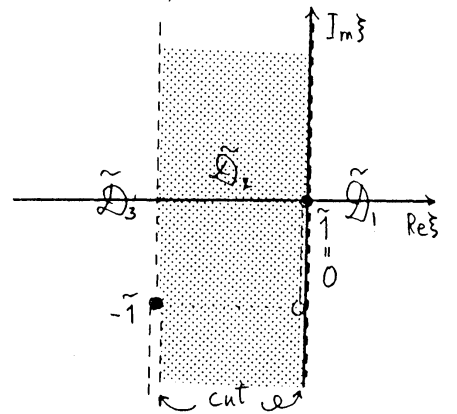
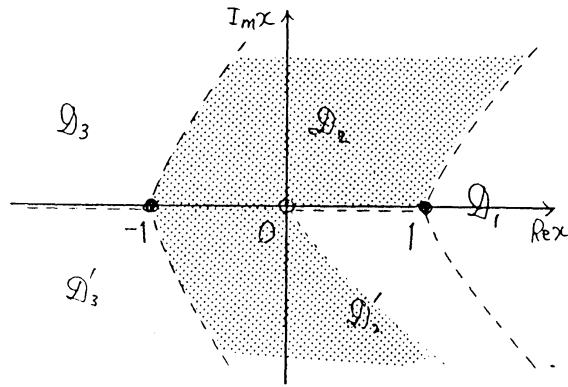
$$\xi = \int_1^x \sqrt{x^3 - 1} dx.$$

D_2, D'_2 は strip type, 他は half plane type.

$D_4 \cup D_2 \cup D'_2 \cup D'_4$ は特性領域の1つである.

● $p(x)$ が特異点をもつ場合

例1 $p(x) = x - \frac{1}{x}$ ($x=0$ は確定特異点)



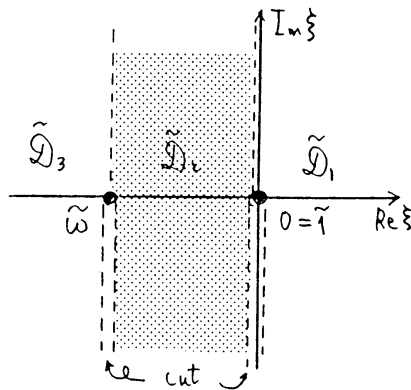
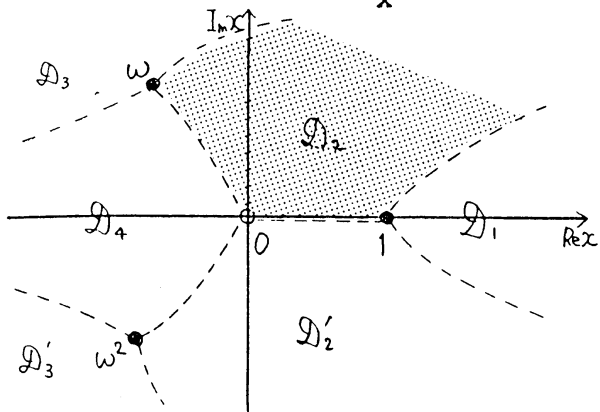
$$\xi = \int_1^x \sqrt{p(x)} dx.$$

$D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup (D'_2 \text{の一部})$ は 特性領域 (の1つ) .

この $p(x)$ は, $\epsilon^2 y'' - (z - \epsilon/z)y = 0$ の内部領域に相当する.

なお matching matrix M は $M \sim \epsilon^{1/8} e^{\epsilon^{-1/7} \begin{bmatrix} \epsilon & -z \\ 0 & -z \end{bmatrix}}$.

例 2 $p(x) = x - \frac{1}{x^2}$ ($x=0$ は確定特異点である)

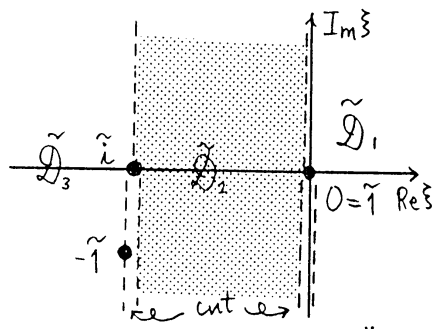
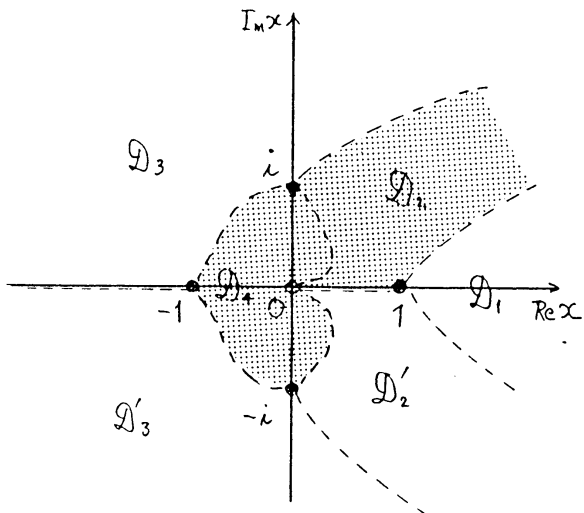


$$\xi = \int_1^x \sqrt{p(x)} dx.$$

D_2, D_4, D'_2 は strip type, 他は half plane type.

$D_1 \cup D_2 \cup D_3, D'_3 \cup D_4 \cup D'_1$ は特性領域 (他にもある).

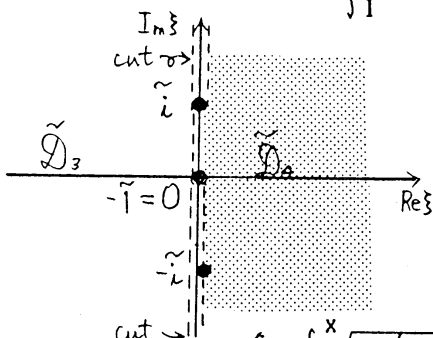
例 3 $p(x) = x - \frac{1}{x^3}$ ($x=0$ は不確定特異点である)



$$\xi = \int_1^x \sqrt{p(x)} dx.$$

D_2, D'_2 は strip type, 他は half plane type.

$D_1 \cup D_2 \cup D_3, D'_3 \cup D_4$ は特性領域 (他にもある).



$$\xi = \int_{-1}^x \sqrt{p(x)} dx.$$

◎ Stokes curves が簡単に描けない場合

例 1 $p(x) = x - \frac{1}{x^4}$ ($x=0$ は不確定特異点)

$x^5 - 1 = 0$ の根の近傍, $x=0$ の近傍の様子はすぐに分るが, Stokes curve のつながり具合, のび方などが分り難い。しかし, この程度(!?)の関数であれば (turning points や特異点をはっきり知られているから) コンピュータで数値計算をすることにより描ける (上智大 内山氏)。

例 2

$$\epsilon^2 \frac{d^2 y}{d\tilde{x}^2} + \{1 - q(x)\}y = 0, \quad (\text{Regge-Wheeler's eq.})$$

$$q(x) = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \left(\frac{\beta}{x^2} - \frac{3\alpha}{x^3}\right) \quad (\alpha, \beta > 0),$$

$$\tilde{x} = x + \alpha \log\{(x - \alpha)/x\} \quad (x \text{ が大きいとき } \tilde{x} \sim x)$$

(佐々木節「ブラックホールと重力波」数理科学1990年11月号より)

例 3

$$\epsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \left\{ \frac{8}{x(x+1)(3x+4)} - q(x) \right\} y = 0,$$

$$q(x) = \frac{3(189x^4 + 924x^3 + 1820x^2 + 1600x + 512)}{128x^2(3x^2 + 7x + 4)}$$

(小玉英雄「相対論的宇宙論」丸善1991年より)

Ref. Evgrafov-Fedoryuk [2],
Fedoryuk [3],
Nakano [7].

§4 WKB解の誤差

WKB解は形式解の初めの項であるが, これだけでも真の解にかなり近い値をもつことがある。

例 1

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \lambda^2(x^2 + 1)y = 0$$

の解は

$$y(x, \lambda) = (x^2 + 1)^{-1/4} \exp\left[-\lambda \int^x (x^2 + 1) dx\right] \{1 + E(x, \lambda)\} \quad (-\infty < x < \infty)$$

である。E(x, λ)を略せばWKB解である。E(x, λ)によって解との誤差を知ることができる：

$$|E(x, \lambda)| \leq \exp\{V(F)/2\lambda\} - 1,$$

$$\begin{aligned} V(F) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |(x^2 + 1)^{-1/4} \{(x^2 + 1)^{-1/4}\}''| dx \\ &= \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

であるから、|E(x, λ)| が a% 以下になるためには

$$|E(x, \lambda)| \leq \exp\{V(F)/2\lambda\} - 1 \leq a \times 10^{-2}.$$

$$\therefore \lambda \geq \frac{V(F)}{2 \log(1 + a \times 10^{-2})}.$$

特に、λ ≥ 3.6 とすれば 10% 以下、λ ≥ 7.0 とすれば 5% 以下であり、そして λ ≥ 34.0 とすれば 1% 以下である。

例2

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 (x+1)^2 y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0 \text{ の固有値 } \lambda.$$

一般解は、p(x) = (x+1)² とおくと

$$y \sim (-p)^{-1/4} \{C_1 \cos(\lambda \int_0^x (-p)^{1/2} dx) + C_2 \sin(\lambda \int_0^x (-p)^{1/2} dx)\}.$$

y(0) = 0 より C₁ = 0.

y(1) = 0 より

$$\frac{C_2}{(-p(1))^{1/4}} \sin(\lambda \int_0^1 (-p)^{1/2} dx) = 0.$$

$$\therefore \sin(\lambda \int_0^1 (-p)^{1/2} dx) = 0.$$

$$\therefore \lambda \int_0^1 (-p)^{1/2} dx = n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

$$\therefore \lambda = n\pi \left[\int_0^1 (-p)^{1/2} dx \right]^{-1} = \frac{2}{3} n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

n	1	3	5	7
$\lambda (=2n\pi/3)$	2.0944	6.2832	10.4720	14.6608
数值計算	2.0604	6.2691	10.4632	14.6545
Error (%)	1.63	0.23	0.08	0.04

Ref. Olver [11],
Nayfeh[10].

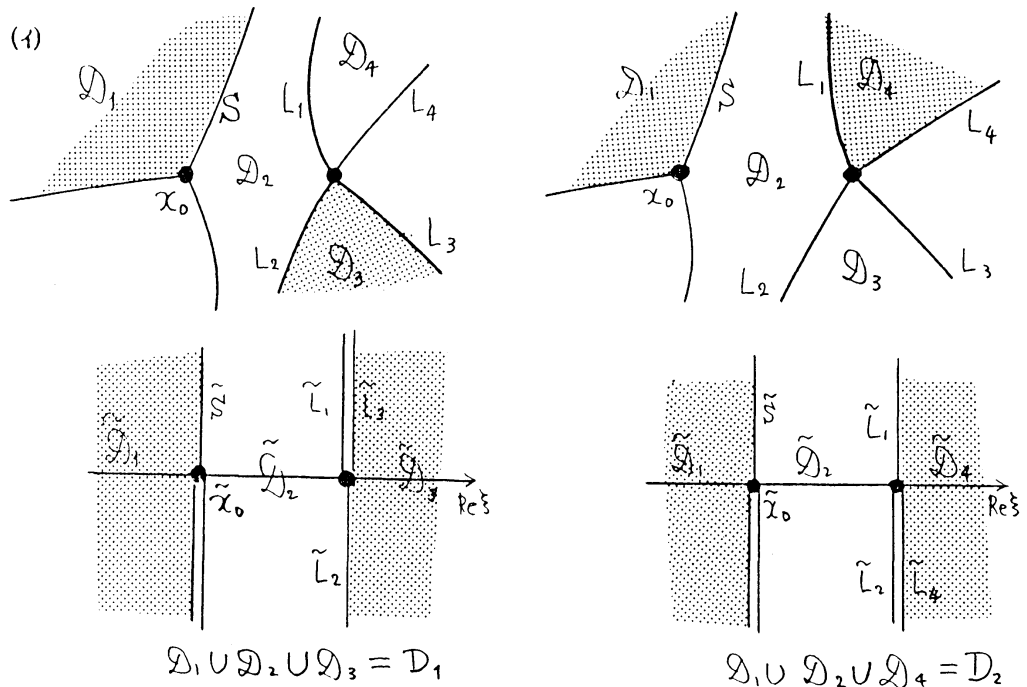
§5 接続行列

Fedoryuk は §2の(1)の $p(x)$ が多項式の場合に, ある特性領域における基本解と他の特性領域における基本解との間の "関係" を行列を用いて表す方式を与えている。この "関係" は解の接続とよばれ, その行列を接続行列 (connection matrix) という。接続行列は特性領域の形によって4種類に分類される。

$(u_j, v_j)^t$ を特性領域 D_j における線形独立な解の組とするとき, 接続行列 Ω は

$$\begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$$

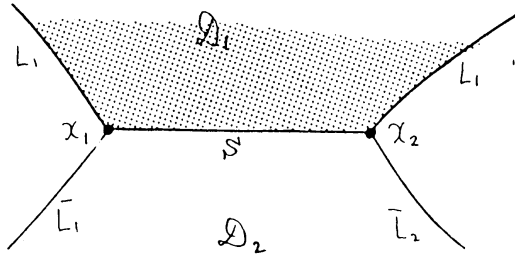
である。(以下の図では, Stokes curves は実線で書いてある。)



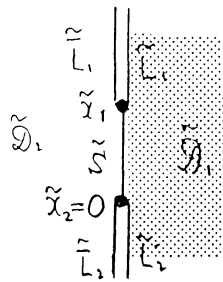
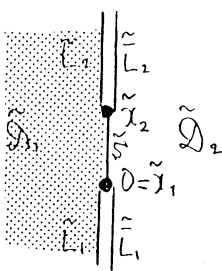
D_1, D_2 は特性領域である。このとき, $(u_1, v_1)^t$ は (S, x_0, D_1) で特徴づけられる。同様に, $(u_2, v_2)^t$ は (S, x_0, D_1) で特徴づけられる (とみる)。

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \Omega_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\epsilon).$$

(ii)



$D_1 \cup D_2 = D$ は特性領域である.

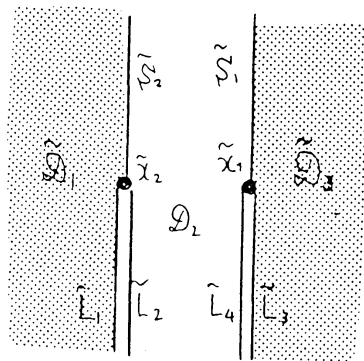
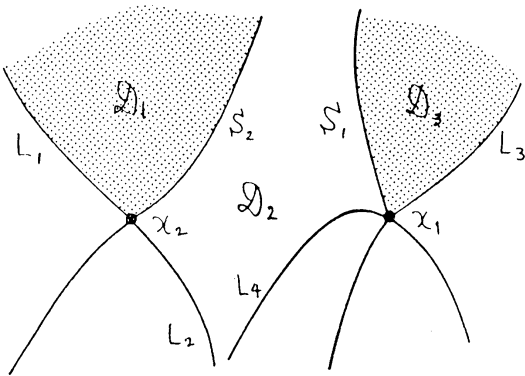


$(u_1, v_1)^t$ は (S, x_1, D) で, $(u_2, v_2)^t$ を (S, x_2, D) で定まる解とすると

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \Omega_2 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_2 = e^{iT_0} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\alpha/\epsilon} \\ e^{-i\alpha/\epsilon} & 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha = \text{real}),$$

$$T_0 = \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ x \in S}} \arg p^{-1/4} - \lim_{\substack{x \rightarrow x_2 \\ x \in S}} \arg p^{-1/4}, \quad i\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{p(x)} dx = T_1.$$

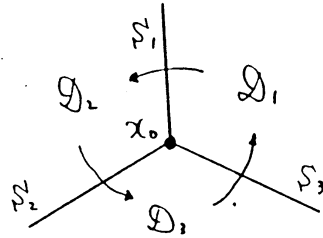
(iii)



$D_1 \cup D_2 \cup D_3 = D$ は特性領域であり, $(u_j, v_j)^t$ を (S_j, x_j, D) で定まる解とすると

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \Omega_3 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_3 = e^{i\tau_0} \begin{pmatrix} e^{-\tau_1/\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{\tau_1/\varepsilon} \end{pmatrix} \quad (\tau_0, \tau_1 \text{は}(u) \text{と同じ})$$

(二)



$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 &= \mathcal{D}_1, & \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 &= \mathcal{D}_2, \\ \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_1 &= \mathcal{D}_3 \text{ は特性領域である.} \end{aligned}$$

$(u_j, v_j)^t$ を (S_j, x_0, D_j) で定まる解とすると

$$\begin{pmatrix} u_{j+1} \\ v_{j+1} \end{pmatrix} = \Omega_4 \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix}, \quad \Omega_4 = e^{\frac{\pi}{2}i} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon) \quad (u_4 = u_1, v_4 = v_1).$$

これは, turning point の order が 1 の場合である。order が $m \geq 1$ の場合は

$$\Omega_4 = e^{\frac{m\pi i}{2(m+2)}} \begin{pmatrix} -2i \sin \frac{m\pi}{2(m+2)} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon).$$

Evgrafov-Fedoryuk [2] では, これらの 4 種類の行列で, $p(x)$ が多項式の場合, x 平面全体における解の関係が得られることを示している。 $(p(x)$ が有理関数の場合にも応用できるであろう。)

§6 接続行列の応用例

$$y'' - \lambda^2 p(x)y = 0, \quad y(-\infty) = y(\infty) = 0, \quad p(x) = x^2 - a^2 \quad (a > 0)$$

の固有値 λ の漸近公式

$$\lambda = \frac{\pi}{\alpha} \left(n + \frac{1}{2} \right) + O(n^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty), \quad \alpha = \int_{-a}^a \sqrt{|p(x)|} dx.$$

を前節の行列を用いて導いてみよう。

Stokes curves は下の図で破線で示されている (cf. §3の例3)。

$y = y(x, \lambda)$ が $y(\infty, \lambda) = 0$ を満たすとき, 固有値は $y(-\infty, \lambda) = 0$ から定められる。

$D_1 = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, $D_2 = \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$, $D_3 = \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_4$ は特性領域であり, WKB解を

$$y \sim \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{P}} e^{\lambda \int^x \sqrt{P} dx} & = u(x, \lambda) \\ \frac{1}{\sqrt{P}} e^{-\lambda \int^x \sqrt{P} dx} & = v(x, \lambda) \end{cases}$$

とおくとき,

$(u_1(x, \lambda), v_1(x, \lambda))'$ を (S_1, a, D_1) で定まる解とすれば, $u_1(\infty, \lambda) = \infty$, $v_1(\infty, \lambda) = 0$ より

$$y(x, \lambda) = C v_1(x, \lambda) \quad (C = \text{const.})$$

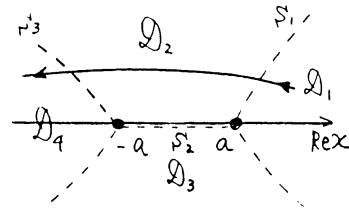
とかけるから, $v_1(x, \lambda)$ を \mathcal{D}_4 に接続しなければならない。そこで $(u_2, v_2)'$ を (S_2, a, D_2) で, $(u_3, v_3)'$ を $(S_2, -a, D_2)$ で, $(u_4, v_4)'$ を $(S_3, -a, D_3)$ で定まる解とすると,

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \Omega_4^{(1)} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \Omega_3 \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \Omega_4^{(2)} \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

($\Omega_4^{(1)}$ と $\Omega_4^{(2)}$ は前節の Ω_4 タイプ)

であるから,

$$\begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = (\Omega_4^{(2)} \Omega_2 \Omega_4^{(1)}) \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$



ここに,

$$\Omega_4^{(k)} = e^{\frac{\pi}{3}i} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + o(\lambda^{-1}) \quad (k=1, 2), \quad \Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\alpha\lambda} \\ e^{-i\alpha\lambda} & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\Omega = \Omega_4^{(2)} \Omega_2 \Omega_4^{(1)} = e^{\frac{\pi}{3}i} \begin{pmatrix} -2i \cos \alpha\lambda & e^{i\alpha\lambda} \\ e^{i\alpha\lambda} & 0 \end{pmatrix} + o(\lambda^{-1}).$$

$$\therefore \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \Omega^{-1} \begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{e^{-\frac{\pi}{3}i} e^{-i\alpha\lambda} + o(\lambda^{-1})\} v_4 \\ \{e^{-\frac{\pi}{3}i} e^{i\alpha\lambda} + o(\lambda^{-1})\} u_4 + \{e^{-\frac{\pi}{3}i} 2i \cos \alpha\lambda + o(\lambda^{-1})\} v_4 \end{pmatrix}.$$

\mathcal{D}_4 で有界になる解は, $v_4(x, \lambda)$ の係数=0 の場合。

$$\therefore \cos \alpha \lambda = o(\lambda^{-1})$$

$$\therefore \lambda = \frac{\pi}{\alpha} \left(n + \frac{1}{2} \right) + o(n^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

§7 3階方程式

2階微分方程式のWKB解を3階の場合に拡張してみよう。

$$\epsilon^3 y''' + \epsilon^2 p_1(x) y'' + \epsilon p_2(x) y' + p_3(x) y = 0 \quad (1)$$

の特性方程式は

$$\lambda^3 + p_1(x) \lambda^2 + p_2(x) \lambda + p_3(x) = 0$$

であり、その根 $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, $\lambda_3(x)$ を特性根とよぼう。

$\lambda_j(x) = \lambda_k(x)$ ($j \neq k$) の零点 x_0 を turning point,

$\operatorname{Re} \int_{x_0}^x \{\lambda_j(x) - \lambda_k(x)\} dx = 0$ を Stokes curve とよぶことにする。

(1)の形式解を求めると、初めの 何項かから

$$y_j(x, \epsilon) \sim \exp\left[\frac{1}{\epsilon} \int^x \{\lambda_j(x) + \epsilon \lambda_j^{(1)}(x)\} dx\right] \quad (j=1,2,3) \quad (2)$$

の形をしていることがわかる。特に、 p_1 と p_2 が定数の場合

$$y_j(x, \epsilon) \sim \frac{1}{\sqrt{(\lambda_j - \lambda_k)(\lambda_j - \lambda_l)}} \exp\left[\frac{1}{\epsilon} \int^x \lambda_j(x) dx\right] \quad (3)$$

の形である。これは2階の場合のWKB階とソックリである。そこで、(2)と(3)を3階の場合のWKB とよんでも差し支えないであろう。

(3つの) 解 $y_j(x, \epsilon)$ ($j=1,2,3$) の漸近展開の成り立つ 範囲を $D^{(j)}$ とするとき、 $D^{(1)} \cap D^{(2)} \cap D^{(3)}$ を特性領域とよぶ。

3階の場合は2階と比べると格段に複雑な解析が必要になる。

簡単な例で考えてみよう。

$$\text{例} \quad \epsilon^3 y''' - \epsilon^2 x y'' - \epsilon y' + x y = 0$$

$$\text{特性方程式} \quad \lambda^3 - x \lambda^2 - \lambda + x = 0$$

$$\text{特性根} \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = x$$

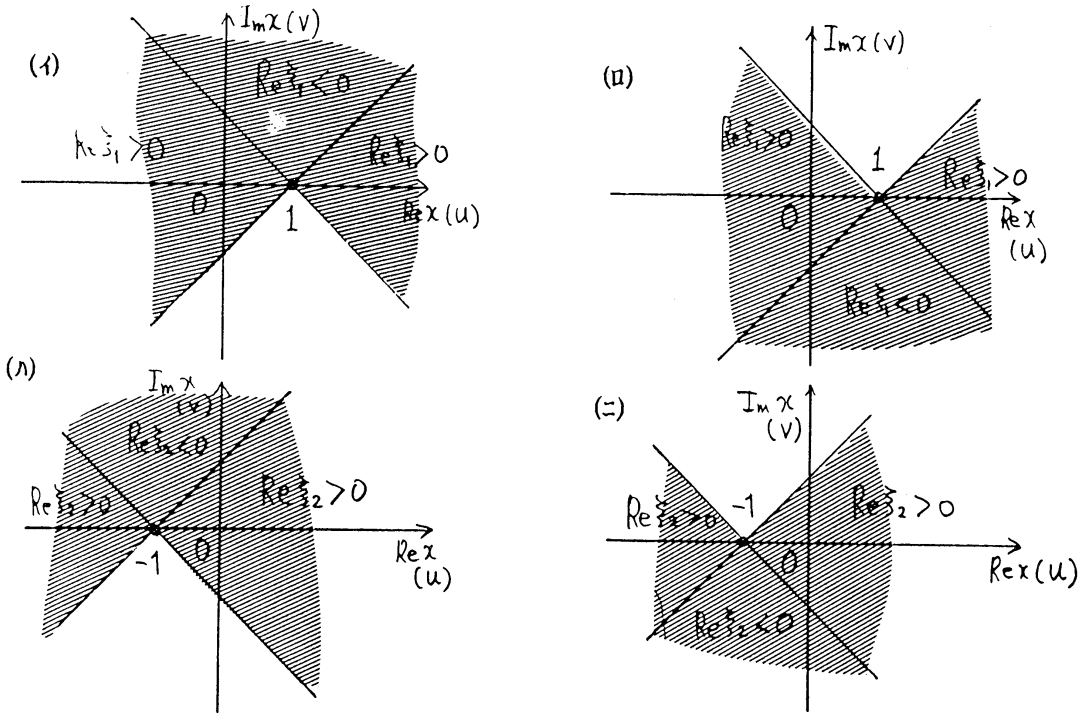
$$\text{turning point} \quad x = 1, -1$$

λ_1 に対応する解は $y_1 = \exp(x/\epsilon)$, λ_2 に対応する解は $y_2 = \exp(-x/\epsilon)$ 。これらは真の解である。したがって、存在領域は $D^{(1)} = D^{(2)} = \mathbb{R}^2$ 。

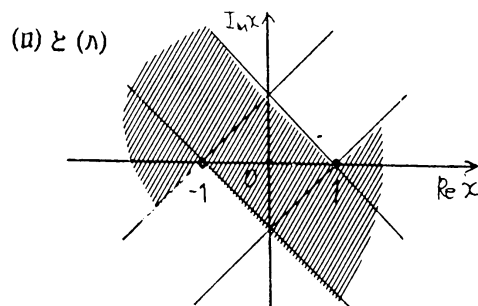
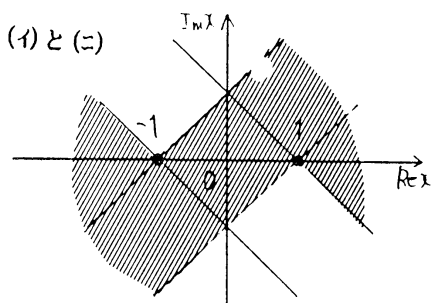
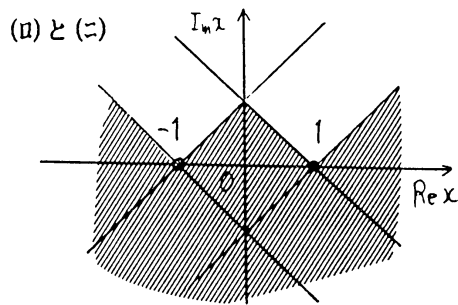
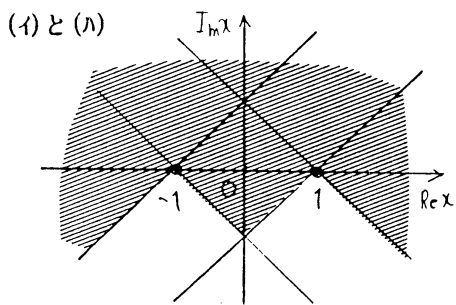
y_3 の存在領域 $D^{(3)}$ を求めよう。

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \int_1^x (\lambda_3 - \lambda_2) dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{(u+1)^2 - v^2\} + i v (u+1) \quad (x = u + i v). \end{aligned}$$

$\text{Re } \xi_1 = 0$ より $v = \pm(u-1)$, $\text{Im } \xi_1 = 0$ より $v = 0, u = 1$.
 $\text{Re } \xi_2 = 0$ より $v = \pm(u+1)$, $\text{Im } \xi_2 = 0$ より $v = 0, u = -1$.



D^3 は(i)と(A), (i)と(B), (ii)と(A), (ii)と(B)の共通部分(斜線部分)。



これら4つが, y_3 がWKB解 $\exp(2x^{3/2}/3\epsilon)$ を漸近解とする存在領域 $D^{(3)}$ である。

3つの解 y_1, y_2, y_3 が同時に存在する範囲が特性領域であるが, $D^{(1)}$ と $D^{(2)}$ は平面全体であるから, 結局, 特性領域は $D^{(3)}$ と一致する。

この例では, 真の解を2つもつことから, 残り1つの解の漸近性を調べるだけでよいが, 一般には, Cardano の公式で特性根を表すことになるから, 係数が1次式の場合ですら, かなり複雑になる。Stokes curves も交わることがある。

Ref. Nakano-Namiki-Nishimoto[8].

REFERENCES

- [1] Berk H.L., Nevins W.M., Roberts K.V., New Stokes line in WKB theory. *J. Math. Phys.* 23(1982)988-1002.
- [2] Evgrafov M.A., Fedoryuk M.V., Asymptotic behavior as $\lambda \rightarrow \infty$ of solutions of the equation $\omega''(z) - p(z, \lambda)\omega(z) = 0$ in the complex z -plane. *Russian Math. Surveys* 21(1966)1-48.
- [3] Fedoryuk M.V., Topology of Stokes curves of the equation of the second order. *A.M.S. Translation*(2) 89(1970)89-102.
- [4] Федорюк, М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. "Наука", Moscow, 1983.
- [5] Hukuhara, M., Sur les points singuliers des equations differentielle lineaires III. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.* 2(1942)125-137.
- [6] Langer, R.E., The solutions of the differential equation $v'' + \lambda^2 z v' + 3\mu \lambda^2 v = 0$. *Duke Math. J.* 22(1955)525-542.
- [7] Nakano, M., Second order linear ordinary differential equations with turning points and singularities II. *Kodai Math. J.* 1(1978)304-312.
- [8] Nakano, M., Namiki, M., and Nishimoto, T., On the WKB method for certain third order ordinary differential equations. *Kodai Math. J.* 14(1991)432-462.
- [9] Nakano, M., Nishimoto, T., On a secondary turning point problem. *Kodai Math. Rep.* 22(1970)355-384.
- [10] Nayfeh, A.H., Introduction to perturbation techniques. Wiley-Interscience Publ. (1981).
- [11] Olver, F.W.J., Asymptotics and special functions. Academic Press(1974).
- [12] Wasow, W., Turning point problems for systems of linear differential equation I, II. *Comm. Pure & Appl. Math.* 14(1961)657-673, 15(1962)173-187.
- [13] Wasow, W., Asymptotic expansions for ordinary differential equations. R. Krieger Publ. (1976).
- [14] Wasow, W., Linear turning point theory. Springer (1985).