数理解析研究所講究録
第 788 巻 1992 年 162-172

ソリトン問題とNonlinear turning point問題 (Nonlinear WKB法)

大阪外語大 物理 中村 明 (Akira Nakamura)

§1, はじめに。

完全積分が可能な非線形システムの研究が, ここ20年くらいに, たいへん発達した。 いわゆる非線形方程式の具体的なexact solutionが, かきくだせて, ソリトンとよばれている。 一方WKB法は, 近似的なこたえをだす有力な手段である(トンネル効果の計算に, とくに有効)。 WKB法に, 性質のよいソリトン的な非線形性を, 組みこめられないだろうか? つまりWKBのnonlinear版を, とけないだろうか?

すでに1977年に, 非線形常ビブン方程式の一種, パンルベ方程式(Painlevé II eq.)をソリトンの手法の逆散乱法でといた, アメリカ人のpaperにおいて, このPainlevé II eq. をとくことが「nonlinear turning pointの原型をあたえる」ということが, はっきりと, 明言されている。[1)]

ところが，そののち，この問題を，より具体的に，すすめることが，なされていないようなので，われわれは，この問題をnonlinear WKB法として，もういちど，かんがえたい。

§2. WKB法のソリトン的nonlinearizationには，どんなものが，可能だろうか？

ひとくちに，nonlinear WKBといっても，nonlinearityのかたちは，無限に，かんがえられるので，ソリトンとの関係では，どんなnonlinearityがWKBと相性がよいかを，かんがえねば，ならない。まず，ふつうのWKB法では，$E \equiv const.$，$V(x) \equiv$てきとうなポテンシャル，として，シュレーディンガーeq.

$$u_{xx}(x) + \{E - V(x)\} u(x) = 0, \quad u_{xx}(x) \equiv (d/dx)^2 u(x), \tag{2.1}$$

をあつかう。　一方ソリトンeq.として代表的なものは，

$$i u_t + u_{xx} + 2u^* u u = 0, \quad \text{(非線形シュレーディンガーeq.)} \tag{2.2a}$$

$$u_t + 6u^n u_x + u_{xxx} = 0, \quad \text{(KdV eq. } (n=1)\text{; mKdV eq. } (n=2)\text{)}, \tag{2.2b}$$

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u, \quad \text{(サイン・ゴルドンeq.)}, \tag{2.2c}$$

などがある。一見して，(2.1) と (2.2a) との相性がよいのは，あきらかである。しかし，ときやすい点では，(2.2b) のほうが，かんたんなので，こちらから，みてゆく。(2.2b) の $n=2$ のものを $u(x,t)=(3t)^{-\frac{1}{3}}w\{x(3t)^{-\frac{1}{3}}\}$ という相似変換で reduce すると，いわゆる Painlevé II eq.

$$w_{xx}(x)\pm 2w(x)^3-xw(x)-\delta=0,\quad \delta\equiv \text{const.},\qquad (2.3)$$

となるので，[1] nonlinear WKB のひとつとして，(2.1) と (2.3) から

$$u_{xx}+\{E-V(x)\}u+2u^3=0,\qquad (2.4a)$$

のタイプが，あつかいやすいと期待される。ここで (2.3) で，$\delta=0$ とし，さらに $-xw(x)$ 項は，$\{E-V(x)\}$ が $x=0$ のちかくで $a_0x+\cdots$ ($a_0\equiv$ const.) と展開されるとし，a_0x とおなじ性質の項だから，おとした。

一方 KdV eq. つまり (2.2b) の $n=1$ を，$u=(12t)^{-\frac{2}{3}}\times U\{x(12t)^{-\frac{1}{3}}\}$ とおいて reduce すると

$$-4U-4(xU)'+6UU'+U'''=0,\qquad (2.5)$$

となる。 これの第1項 $-4U$ を $+2U$ にかえたもの

$$U_{xx}-4xU+3U^2+2\int^x dx\, U(x)=0, \qquad (2.6)$$

も、ときやすいようである。(2.1)と(2.6)のくみあわせ

$$u_{xx}+\{E-V(x)\}u+3u^2+2\int^x dx\, u(x)=0, \qquad (2.4b)$$

も、ひとつの nonlinear WKB となろう。しかし(2.4b)の integral term は、やはり形のかんたんさを、なくすので、(2.5)の第1項を近似的に、おとしたものと(2.1)のくみあわせ

$$u_{xx}+\{E-V(x)\}u+3u^2=0, \qquad (2.4c)$$

は、応用性のおおきい nonlinear WKB となろう。

同様に(2.1)と(2.2a)からは

$$u_{xx}+\{E-V(x)\}u+2u^*uu=0, \qquad (2.4d)$$

(2.1)と(2.2c)からは、

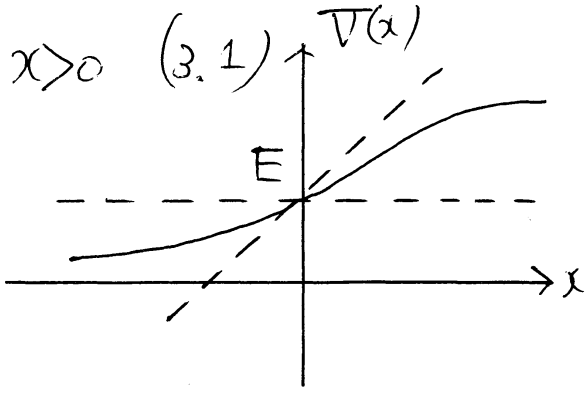
$$u_{xx}+\{E-V(x)\}u+\sin u=0, \qquad (2.4e)$$

などが, nonlinear WKB の研究テーマとなることが, わかる。うえの(2.4a)-(2.4e)の5つは, それぞれ固有の物理上の応用のおもしろみを, もつと, おもわれる.

§3. もっとも, かんたんな nonlinear WKB eq. (2.4a) の近似解の導出.

以下では, §2の5つの式(2.4a)-(2.4e)のうちの(2.4a)だけをみる. かんたんのため, いま

$$V(x)-E>0 \quad \text{for} \quad x>0 \qquad (3.1)$$



だとして, $x>0$ のみ, かんがえよう. Turning point $x=0$ のちかくでは,

$$V(x)-E=x+O(x^2), \qquad (3.2)$$

とする．このとき linear WKB eq. (2.1) は，$x \approx 0$ で

$$u_{xx}(x) - x\,u(x) = 0, \quad u(x) = \epsilon\,Ai(x), \quad \epsilon \equiv \text{const.}, \qquad (3.3)$$

となり，エアリー関数 $Ai(x)$ の近似解をもつ。一方 non-linear WKB eq. (2.4a) は $x \approx 0$ で

$$u_{xx}(x) - x\,u(x) + 2u(x)^3 = 0, \qquad (3.4)$$

すなわち Painlevé II eq. となる。これの $u \to 0$ で $\epsilon Ai(x)$ となる exact solution は，無限級数となるので，[1] われわれは近似式 eq. (3.4) のさらに近似解で，満足することにしよう。つぎに，この近似解を Hirota bilinear method で，もとめてみる。Eq. (3.4) に

$$u = i\left(\log\frac{g}{f}\right)_x, \qquad (3.5)$$

を代入して，せいりすると，

$$u_{xx} - xu + 2u^3 = \frac{3i(D_x g\cdot f)(D_x^2 g\cdot f)}{(gf)^2} + \frac{i(D_x^3 - xD_x)g\cdot f}{gf}, \qquad (3.6)$$

となる。 ただし $D_x g\cdot f \equiv g_x f - g f_x$, $D_x^2 g\cdot f \equiv g_{xx} f - 2g_x f_x + g f_{xx}$, $D_x^3 g\cdot f \equiv g_{xxx} f - 3g_{xx} f_x + 3g_x f_{xx} - g f_{xxx}$ である。
これから eq. (3.4) の bilinear form として

$$\begin{cases} D_x^2 g\cdot f = 0, & (3.7a) \\ (D_x^3 - x D_x)\, g\cdot f = 0, & (3.7b) \end{cases}$$

をえる。 つぎに g, f を ϵ 展開すると

$$\begin{cases} g = 1 + i\epsilon h^{(1)} + \epsilon^2 h^{(2)} + i\epsilon^3 h^{(3)} + \cdots, & (3.8a) \\ f = g^* = 1 - i\epsilon h^{(1)} + \epsilon^2 h^{(2)} - i\epsilon^3 h^{(3)} + \cdots, & (3.8b) \end{cases}$$

となり, (3.8) を (3.7) に代入すれば,

$$\begin{cases} D_x^2 \{1\cdot 1 + i\epsilon(h^{(1)}\cdot 1 - 1\cdot h^{(1)}) + \epsilon^2(h^{(2)}\cdot 1 + h^{(1)}\cdot h^{(1)} + 1\cdot h^{(2)}) + O(\epsilon^3)\} = 0, \\ (D_x^3 - x D_x)\{ \quad \text{〃} \quad \} = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

これより ϵ の each order をとりだして, とくと
$O(\epsilon^0)$, $O(\epsilon^1)$, $O(\epsilon^2)$ までのみで, かんがえて,

$O(\epsilon^0)$: ちりたつ

$O(\epsilon^1)$: $\{(d/dx)^3 - x(d/dx)\}h^{(1)} = 0, \quad h^{(1)} = \int_x^\infty dx' Ai(x'),$

$O(\epsilon^2)$: $2(d/dx)^2 h^{(2)} + D_x^2 h^{(1)} \cdot h^{(1)} = 0,$

$$h^{(2)}_{,xx} - Ai'(x)\int_x^\infty dx' Ai(x') - Ai(x)^2 = 0,$$

$$h^{(2)} = -\frac{1}{2}\{\int_x^\infty dx' Ai(x')\}^2 + 2\int_x^\infty dx' \int_{x'}^\infty dx'' Ai^2(x''),$$

(3.10)

となる. 一方 (3.5) に (3.8a, b) をいれると,

$$u = i\left(\log\frac{g}{f}\right)_x = \frac{iD_x g\cdot f}{gf} = \frac{i\{i\epsilon h_x^{(1)} + O(\epsilon^3)\}}{\{1+\epsilon^2(2h^{(2)}+h^{(1)2}) + O(\epsilon^4)\}}. \quad (3.11)$$

ここに $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ の具体形をいれると

$$u \simeq \frac{\epsilon Ai(x)}{\{1 + 4\epsilon^2 \int_x^\infty dx' \int_{x'}^\infty dx'' Ai^2(x'')\}}. \quad (3.12)$$

これが Painlevé II の近似解であり, 同時に nonlinear WKB eq. (2.4a) の turning point, $x=0$, ちかくの近似解である。

さて (3.12) は, (3.3) の linear WKB のこたえ $u = \epsilon Ai(x)$ にくらべて, ϵ^2 オーダーの項が分母に, ひとつ

加わっただけである。だからたいへん，あらい近似にみえるが，分母にあるということがミソである。なぜなら $1/(1+x)=1-x+x^2-x^3\cdots$ のように，これは分子でみると無限の項をひろっているからである。

さて，しめくくりとして，われわれは，linear WKB をまねて，nonlinear WKB においても，$Ai(x)$ を，WKB のことばで，かきなおしてゆこう。Ai を Bessel 関数でかくと

$$Ai(x)=(1/3)\,x^{\frac{1}{2}}\{I_{-\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})-I_{\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})\}. \qquad (3.13)$$

変数 $\xi(x)$ をつぎで導入する，[2]

$$\xi(x)\equiv\int_{x_0}^{x}\sqrt{V(x')-E}\;dx', \qquad (3.14)$$

ここで，$x_0=$ turning point（いまは，ゼロだった）．(3.13) の $Ai(x)$ を $\xi(x)$ でかきかえると，

$$\begin{aligned}&Ai(x)\to\{V(x)-E\}^{-\frac{1}{4}}\xi^{\frac{1}{2}}\{I_{-\frac{1}{3}}(\xi)-I_{\frac{1}{3}}(\xi)\}\equiv\tilde{A}(x),\\&u(x)\approx\epsilon\,\tilde{A}(x).\end{aligned} \qquad (3.15)$$

(3.15) が linear WKB の turning point ちかく $(x\approx x_0)$ の

solution だから，おなじかきかえを nonlinear WKB ですると (3.12) から

$$u(x) \approx \frac{\epsilon \hat{A}(x)}{\left\{1+4\epsilon^2 \int_{x_0}^{x} dx' \int_{x_0}^{x'} dx'' \hat{A}^2(x'')\right\}},$$

(turning point ちかく)，　(3.16)

をえる。(integral の上，下限の ∞ と x_0 は，かってにかえたので，すこし，あやしい)。さらに turning point より十分とおいところ (いまは $x \approx +\infty$) では，linear WKB では[21]

$$u(x) \to \epsilon \hat{A}(x) \to \text{const.} \{V(x)-E\}^{-\frac{1}{4}} e^{-\xi(x)}. \quad (3.17)$$

同様に nonlinear WKB では，

$$u \approx \frac{\epsilon' \{V(x)-E\}^{-\frac{1}{4}} e^{-\xi(x)}}{\left\{1+4\epsilon'^2 \int_{x_0}^{x} dx' \int_{x_0}^{x'} dx'' \{V(x'')-E\}^{-\frac{1}{2}} e^{-2\xi(x'')}\right\}},$$

$\epsilon' \equiv \text{const.}$，　($x \approx +\infty$)，　(3.18)

となる。(3.16)，(3.18) が nonlinear WKB の近似解で

ある。

以上，まだキッチリつめなければならない，detailは，あるが，多少とも nonlinear WKB の具体化の一歩をすすめたといえよう。 できれば，かんたんなモデルの数値計算との比較を，してみたいが，今回は，まにあわなかった。 これから，かんがえてゆきたい。

References

1) M. J. Ablowitz and H. Segur: Phys. Rev. Lett. 38 (1977) 1103.
2) L. I. Schiff: 量子力学，(井上健訳)，吉岡書店，才VII章28節.