数理解析研究所講究録
第780巻 1992年 66-77

Global Newton 法と価格調整プロセス

大阪大学経済学部　神谷和也　(Kazuya Kamiya)

1. はじめに

n 次元ユークリッド空間 R^nの開部分集合 A から R^nへの２回連続微分可能関数 $f : A \subset R^n \to R^n$を考える。本稿では、$f(x) = 0$ の解を計算する方法で以下の特徴を持つものを解説する。まず fから、ある関数 $g : A' \subset A \to B$を構成する。(ここで、Bは $n-1$ 次元多様体。) A は Bより１次元高いから、$b \in B$に対し $g^{-1}(b)$ はほとんどの場合１次元であることが予想される。実際 Sard の定理より、ほとんどすべての $b \in B$は正則値になり、さらに陰関数定理より正則値 b について $g^{-1}(b)$ が１次元多様体になることを証明できる。１次元多様体の連結成分は、区間 $[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1)$ または円 $S^2 \equiv \{y \in R^2 \,|\Sigma_{i=1}^2 y_i^2 = 1\}$ と同位相になる。(Milnor [1965] 参照。) すなわち $g^{-1}(b)$ は、区間と同位相な集合と、円と同位相な集合から構成される。もしここで、区間と同位相な $g^{-1}(b)$ の連結成分が存在し、そのひとつの端点を容易に求めることができ、もう一方の端点が $f(x) = 0$ の解に対応しているなら、この成分をたどることにより解を計算できることになる。

本稿では Global Newton 法など、この種の計算法をいくつ

か紹介し、さらにそれを経済モデルに応用する。なお、Scarfの開発したSimplicial Algorithmもこれと同様な構造を持つことを付け加えておく。(Eaves and Scarf [1976] およびScarf [1973] 参照。)

2. Global Newton 法とその周辺

最初に、この種の計算法の代表的なものの一つであるSmale [1976] の Global Newton 法を解説する。$C \subset A$ を境界がsmoothで内部が非空なコンパクト凸集合とする。まず、境界条件として $x \in \partial C$において $Df(x)$ が正則であり、ベクトル $-sign(det\ Df(x))(Df(x))^{-1}f(x)$ が Cの内部を向いている仮定する。(ここで、$sign$ は正の実数には+1 、負の実数には -1 、0 には 0 を対応させる関数、∂CはCの境界、$Df(x)$ は fの x における Jacobi 行列、$det\, Df(x)$ は $Df(x)$ の行列式。) つぎに、$g : A \setminus K \to S^n$を $g(x) \equiv \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$で定義する。(ここで、$K \equiv \{x \in A \mid f(x) = 0\}$ 、$S^n \equiv \{y \in R^n \mid \Sigma_{i=1}^n y_i^2 = 1\}$ 、$\|\cdot\|$ はユークリッドノルム。) $x \in \partial C$における $Df(x)$ の正則性と Sard の定理より、ほとんどすべての $x \in \partial C$について $g(x) \in S^n$は正則値になる。したがって、簡単に $g(a)$ が正則値になる $a \in \partial C$を選ぶことができる。$b \equiv g(a)$ とすると、$g^{-1}(b)$ は上の議論より1次元多様体となる。明らかに $a \in g^{-1}(b)$ となるから、境界条件より a を含む $g^{-1}(b)$ の成分は区間と同位相になる。この成分の∂C上の端点は、境界条件より a のみである。また、bが正則値であることより

$g^{-1}(b)$ の端点は $C \setminus K$ の内部にはありえない。したがって、この成分は $[0,1)$ と同位相である。ここで 0 には a が対応し、1 には K 内の一点が対応する。したがって、この成分を初期値 a からたどれば K の点、すなわち $f(x)=0$ の解を求めることができる。また、その成分をたどる微分方程式は、

$$(1)\quad (Df(x))\dot{x} = -\kappa f(x), \qquad \|\dot{x}\| = 1$$

になる。ここで、κ は $sign\ \kappa = sign\ det\ Df(x)$ となる実数。(詳しくは Smale [1976] 参照。) したがって、a を初期値とする微分方程式 (1) の解をたどれば $f(x)=0$ の解を計算できることになる。

ところで (1) は、$Df(x)$ が正則であれば $\dot{x} = -\kappa(Df(x))^{-1}f(x)$ と書き表すことができ、ニュートン法

$$(2)\quad \dot{x} = -(Df(x))^{-1}f(x)$$

と似ている。しかし、その表面的類似性にもかかわらず (2) は局所収束性しか持たない。つまり、もし解 $x^* \in f^{-1}(0)$ において $Df(x^*)$ が正則かつ初期値 x^0 が十分 x^* に近ければ、(2) は解 x^* に収束するが、x^0 が解に近くなければ必ずしも解へ収束するとは限らない。ところが (2) をわずかに修正して (1) にすると、ある種の大域的収束性が得られるのである。直接 (2) の大域的収束性を保証する条件としては、例えば f がM関数であるというものが有名である。(M関数については、例えば Ortega and Rheinboldt [1970] 参照。) しかし、この種の条件は定義域全体での f の性質を縛るものであり、か

なり制約的である。これに対し、Global Newton 法では境界条件さえ仮定すれば、境界から出発する (1) の解はほとんどの場合 $f(x) = 0$ の解に収束する。

また Kellog, Li, and Yorke [1976] は、C^2関数 $f' : C \to C$の不動点を計算するための微分方程式を発見している。(ここで、Cは内部が非空で境界が smooth なコンパクト凸集合。) つまり、f'は∂C上に不動点を持たないとし、$x \in C \setminus K'$に対し $g(x) \in \partial C$を、x と $f'(x)$ を結ぶ直線が∂Cと交わる点のうちで x に近いものと定義する。(ここで、$K' \equiv \{x \in C \mid f'(x) = x\}$ 。) すると Global Newton 法の場合と同様の議論により、ほとんどすべての $a \in \partial C$に対し $b \equiv g(a)$ とし、$g^{-1}(b)$ を a から微分方程式を使ってたどることによりf'の不動点を計算できる。(具体的な微分方程式の形については Kellog, Li, and Yorke [1976] 参照。)

Global Newton 法と Kellog, Li, and Yorke の計算法は、内点に初期値をとれないという欠点を持つ。この点を克服したのが Kamiya [1990] である。$C \subset A$ を境界が smooth で内部が非空なコンパクト凸集合とし、境界条件として $x \in \partial C$ なら、$f(x)$ はCの内部を向いているとする。次に、初期値 $x^0 \in int\, C$を選び、$x \in C \setminus K$に対し、

$$g(x) \equiv \frac{f(x)}{\|f(x)\|} - \frac{x - x^0}{\|x - x^0\|}$$

と定義する。(ここで、$K \equiv \{x \in A \mid f(x) = 0\}$ 。) すると、ほとんどすべての $x^0 \in int\, C$に対し $g^{-1}(0)$ は 1 次元多様体になり、$g^{-1}(0)$ の連結成分のひとつは端点として x^0と

$f(x)=0$ の解を持つことを証明できる。(ここで $int\ C$ は C の内部。) したがって、x^0 から $g^{-1}(0)$ の成分をたどることにより解を計算できる。またその成分をたどる微分方程式は、

$$(3)\quad (\frac{Df(x)}{\|f(x)\|}-\frac{I}{\|x-x^0\|})\dot{x}=-\lambda f(x), \qquad \|\dot{x}\|=1$$

になる。(ここで、λ は $sign\ \lambda = sign\ det\ (I/\|x-x^0\| - Df(x)/\|f(x)\|)$ を満たす実数、I は単位行列。) なおここで、$\dot{x}$ は $x=x^0$ においては直接には定義されないが、極限をとることにより定義されることに注意。

3. 一般均衡モデルへの応用

次に、経済学において最も基本的なモデルである一般均衡モデルについて考えてみよう。(一般均衡モデルについては Arrow and Hahn [1971] 参照。) 経済は ℓ 個の財と m 人の消費者から構成されるとする。(さらに企業を含む経済を考えることもできるが、ここでは簡単化のため扱わない。) 消費者 $i,\ i=1,...,m,$ は効用関数 $u_i : R^\ell_+ \to R$ と初期保有 $\omega_i \in R^\ell_+$ を持つとする。ここで効用関数とは、もし消費者 i が財ベクトル $x \in R^\ell_+$ よりも $y \in R^\ell_+$ を好むとすれば $u_i(x) > u_i(y)$ を満たし、逆に $u_i(x) > u_i(y)$ なら x よりも y を好むという関係を満たす関数である。このような関数は、消費者の選好に関するかなり弱い仮定のもとで存在することが知られているが、ここでは論じない。(例えば Debreu [1958 、Chapter 4] 参照。) 初期保有 ω_i とは消費者 i が最初に持っている財のベクトルである。

価格ベクトルを $p=(p_1,...,p_\ell)$ とすれば、消費者 i は初期保有ω_iを売ることにより所得 $p\cdot\omega_i$を得ることができる。この所得を使って消費者は自分の最も好む財ベクトルを購入すると考えられる。したがって、消費者 i の行動は

$$max\ u_i(x_i) \quad s.t.\ p\cdot x_i = p\cdot\omega_i,\ x_i\in R_+^\ell$$

になる。このときの需要は

$$x_i(p) = arg\ max\{x_i\in R_+^\ell \mid p\cdot x_i = p\cdot\omega_i\}$$

で定義される。総供給は$\Sigma_{i=1}^m\omega_i$だから、超過需要は

$$f(p) = \Sigma_{i=1}^m x_i(p) - \Sigma_{i=1}^m\omega_i$$

になる。

まず第一に、fの定義域（価格の集合）を非負象現に限定するのが適切であろう。(負の価格を許す approach もあるが、ここでは扱わない。) また、$p{\cdot}f(p)=0$ となる。(Walras 法則) これは、$p{\cdot}x_i(p)=p{\cdot}\omega_i$を $i=1$ から m まで足し合わせることにより得られる。また、fは0次同次性を満たす。すなわち、$f(\lambda p)=f(p)$, for all $\lambda\in R_{++}$。これは、消費者の最大化問題の性質からあきらかである。これより、p と λp における需要は同じであるから、fの定義域を $S^\ell=\{p\in R_+ \mid \Sigma_{k=1}^\ell p_k=1\}$ に限定して考えることができる。すなわち、非線形方程式体系は $f:S^\ell\to R^\ell$となり、以下の条件を満たす。

(W) $p\cdot f(p)=0$ 。

さらに、以下の条件を導入しよう。

(C) fは連続関数。

(B) $p \in S^\ell$において $p_k = 0$ なら $f_k(p) > 0$ 。

(C) の意味はあきらかであろう。この条件はu_iの強準凹性等の仮定から得られるが、ここでは論じない。(B) は、もしk財の価格が0ならば、その財への超過需要は正であることを意味しており、reasonable な条件と言えよう。この条件は財の量が多いほど好まれるという仮定から導かれる。(この仮定に関する詳しい議論については Arrow and Hahn [1971, Chapter 2] および Varian [1984, Chapter 5] 参照。)

これらの条件から、以下の定理が導かれる。

定理1 (Walras 均衡の存在定理) : $f : S^\ell \to R^\ell$が (W) 、(C) 、(B) を満たすなら、$f(p^*) = 0$ となる $p^* \in S^\ell$が存在する。

この定理は、Brouwer の不動点定理「 $g : S^\ell \to S^\ell$が連続関数なら、$p^* = g(p^*)$ となる $p^* \in S^\ell$が存在する」を使って証明することができる。すなわち、

$$g_k(p) = \frac{p_k + max\ \{0, f_k(p)\}}{1 + \Sigma_{j=1}^{\ell} max\ \{0, f_j(p)\}},\ k = 1, ..., \ell$$

と定義すれば、gは S^ℓからそれ自身への連続関数で、不動点 p^*が均衡に対応することがわかる。(詳しくは、例えば Varian [1984, Chapter 5] 参照。また、(B) より p^*は S^ℓの境界上にはないことに注意。)

さて、比較的弱い条件のもとで均衡が存在することがわ

かったが、均衡はどうしたら計算できるであろうか。直感的には以下の process が均衡に収束しそうである。

$$\dot{p} = f(p)$$

(ただしこの process は S^ℓ 上ではなく、$\hat{S}^\ell = \{p \in R^\ell_+ \mid \Sigma^\ell_{k=1} p_k^2 = 1\}$ 上を動くことに注意。) この process の経済学的意味は極めて明解である。すなわち、もし k 財の超過需要が正なら (k 財への需要が供給を上回るなら) k 財の価格を上げ、超過需要が負なら k 財の価格を下げるということである。しかし、この process は必ずしも均衡に収束しないことがわかっている。(Scarf [1960] 参照。)

さて、均衡は Brouwer の不動点に対応するわけだから、Brouwer の不動点を計算する方法があれば、 均衡もまた計算できることになる。そのような計算法は、Scarf [1967] によって発見された。Scarf の方法は、現在 simplicial algorithm と呼ばれているものに近い。simplicial algorithm は、まず S^ℓ を小単体に分割し、不動点を近似する小単体を求めるものである。しかし、本稿ではこの方法は取らず、本質的には simplicial algorithm と同一の数学的構造を持つ微分方程式による方法を取ることにする。また、不動点を求める mapping に変換せず直接 $f(p) = 0$ の解を求めることにする。

以下、ホモトピー (Homotopy) 法と呼ばれる計算法を解説する。(ホモトピー法については Garcia and Zangwill [1981] 参照。) まず、f を C^2 と仮定する。また、定義域として S^ℓ のかわりに $\hat{S}^\ell = \{p \in R^\ell_+ \mid \Sigma^\ell_{i=1} p_i^2 = 1\}$ を使う。(これは、0 次同次

性より可能。）さらに、$\Sigma_{i=1}^{\ell} p_i^2 = 1$を使って、$p_\ell$を価格体系より除外する。したがって新しい価格体系は、$q = (p_1, ..., p_{\ell-1})$になる。同様に、$\hat{f}(q) = (\hat{f}_1(q), ..., \hat{f}_{\ell-1}(q)) = (f_1(q, (1 - \Sigma_{i=1}^{\ell-1} p_i^2)^{\frac{1}{2}}), ..., f_{\ell-1}(q, (1 - \Sigma_{i=1}^{\ell-1} p_i^2)^{\frac{1}{2}}))$ と定義すると、(W) より均衡価格の集合は$\hat{E} = \{q \in R_+^{\ell-1} \mid \hat{f}(q) = 0,\ \Sigma_{i=1}^{\ell-1} q_i \leq 1\}$と同一視できる。$\hat{T} = \{q \in R_+^{\ell-1} \mid \Sigma_{i=1}^{\ell-1} q_i^2 \leq 1\}$ と定義する。また $q^0 \in int\ \hat{T}$を一つ選び、$H : \hat{T} \times [0,1] \to R^{\ell-1}$（ Homotopy ）を

$$H(q, \theta) = (1 - \theta)(q - q^0) - \theta \hat{f}(q)$$

と定義する。ここで、$H(q, 0) = 0$ は唯一の解 q^0を持ち、$H(q, 1) = 0$ の解は均衡に対応していることに注意。Sard の定理と陰関数定理より、ほとんどすべての $q^0 \in int\ \hat{T}$について $H^{-1}(0)$ が 1 次元多様体になることを証明できる。さて 1 次元多様体の連結成分は、区間 $[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1)$ または円 $S^2 = \{y \in R^2 \mid \Sigma_{i=1}^{2} y_i^2 = 1\}$ と同位相になる。（ Milnor [1965] 参照。）すなわち $H^{-1}(0)$ は、区間と同位相な集合と、円と同位相な集合から構成される。もしここで、区間と同位相な $H^{-1}(0)$ の連結成分が存在し、そのひとつの端点を容易に求めることができ、もう一方の端点が $f(x) = 0$ の解に対応しているなら、この成分をたどることにより解を計算できることになる。なお、simplicial algorithm もこれと同様の構造を持つことを付け加えておく。（ Eaves and Scarf [1976] 参照。）実際、(B) より$\partial \hat{T} \times [0,1]$ 上に $H^{-1}(0)$ の解が存在しないことがわかるから、$q^0 \in H^{-1}(0)$ を一つの端点とする区間

と同位相な成分のもう一つの端点は$\hat{f}(q)$の解になっている。したがって解を計算するためには、この成分をq^0からたどればよいことになる。そのためには、以下の微分方程式の解を$(q^0,0)$からたどればよいことになる。

$$(a)\quad DH\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=0$$
$$(b)\quad \|(\dot{q},\dot{\theta})\|=1$$
$$(c)\quad sign\ det\ A(t)=sign\ det\ A(0)$$

ここで、DHはHの Jacobi 行列、また

$$A(t)=\begin{bmatrix}\dot{q}(t) & \dot{\theta}(t)\\ D_qH(q(t),\theta(t)) & D_\theta H(q(t),\theta(t))\end{bmatrix}。$$

(a) により$(\dot{q},\dot{\theta})$は自由度1で決定し、(b),(c) より完全に決定する。

また、適当な境界条件が満たされれば Global Newton 法 (1) も使えるし、fを適当に変換すれば Kellog, Li, and Yorke の方法も使える。最後に Kamiya [1990] の

$$(3)\quad \left(\frac{Df(x)}{\|f(x)\|}-\frac{I}{\|x-x^0\|}\right)\dot{x}=-\lambda f(x),\qquad \|\dot{x}\|=1$$

の興味深い性質を説明しておこう。もしqが初期値q^0に近ければ$\dot{q}$の方向は、ほぼ

$$(4)\quad \dot{q}=f(q)$$

であり、qが解に近ければ$\dot{q}$の方向は、ほぼ

$$(5)\quad (Df(q))\dot{q}=-\lambda f(q)$$

を満たす。両者の中間では、$\dot{q}$の方向は上の二つの方向の加重平均になる。(4) は、前述の需要が供給を上回れば価格を上げ、逆なら下げるというプロセスであり、このようなプロセスを経済学では Walras のタトヌマン (tatonnement) と呼んでいる。また、(5) は上で述べた Global Newton 法である。また、(3) の解はホモトピー法の微分方程式の解を$\hat{T}$に射影したものであることが知られている。(Kamiya [1990] 参照。)

参考文献

Arrow, K.J. and F.H. Hahn [1972]:*General Competitive Analysis*, Holden-day, San Francisco.

Debreu, G. [1959]: *Theory of Value*, Wiley, New York.

Eaves, B.C. and H. Scarf [1976]:"The Solution of Systems of Piecewise Linear Equations", *Mathematics of Operations Research*, 1, pp. 1-27.

Garcia, C.B. and W.I. Zangwill [1981]:*Pathways to Solutions, Fixed Points, and equilibria*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Kamiya, K. [1990]:"A Globally Stable Price Adjustment Process", *Econometrica*, 6, pp. 1481-1485.

Kellog, R.B., T.Y. Li, and J. Yorke [1976]:"A Constructive Proof of the Brouwer Fixed Point Theorem and Computational Results", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 4, pp. 473-

483.

Milnor, J.W. [1965]:*Topology from the Differential View Point*, University Press of Virginia, Charlotterville.

Ortega, J.M. and W.C. Rheinboldt [1970]:*Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York.

Scarf, H. [1960]:"Some Examples of Global Instability of the Competitive Equilibrium", *International Economic Review* 1, pp. 157-172.

Scarf, H. [1967]:"The Approximation of Fixed Points of a Continuous Mapping", *SIAM Jounal of Applied Mathematics* 15, pp. 1328-1343.

Scarf, H. [1973]:*Computation of Economic Equilibria*, Yale University Press, New Haven.

Smale, S. [1976]:"A Convergent Process of Price Adjustment and Global Newton Method," *Journal of Mathematical Economics*, 3, pp. 107-120.

Varian, H.R. [1984]: *Micro Economic Analysis*, 2nd edition, Norton).