数理解析研究所講究録
第790巻 1992年 8-14

コオペレーティング1方向カウンタ機械システム

王　躍[1]　　井上　克司[1]
Wang Yue　　Katsushi Inoue
高浪　五男[1]　　松野　浩嗣[11]
Itsuo Takanami　　Hiroshi Matsuno
([1]山口大学・工学部　[11]大島商船高等専門学校)

1．まえがき

コオペレーティング有限オートマタ・システム（CS-FA）[1-3]は，有限個の有限オートマトン（FAと記す）より構成されるシステムである．各FAは独立に入力テープ上を動き，しかも，入力テープの同一のコマ上に位置するFA同志は，情報交換を行うことができる．文献[1, 2]では，CS-FAの迷路探索能力が考察され，文献[3]では，コオペレーティング1方向有限オートマタ・システム（CS-1FA）の言語受理機械としての性質が考察されている．

本論文では，CS-FAと同様に動作するコオペレーティングカウンタ機械システム（Cooperating System of Counter Machines, CS-CM）を導入し，主として各カウンタ機械（CMと記す）が1方向的に動作するCS-CM（CS-1CMと記す）の言語受理機械としての二，三の性質を明らかにする．

CS-1FAやCS-1CMは，一種の並列動作を行う機械であり，その性質を調べることは並列計算の観点からも興味がある．

２．では，CS-CMの定義と本論文で必要な諸準備を与える．３．では，CS-FAとほかのオートマタとの関係について考察する．まず，CS-CMとマルチカウンタ機械の関係を述べ，次に，CS-1CMと１方向シンプルマルチヘッド有限オートマタの関係を述べる．最後に，線形時間で動作するCS-1CMとCS-1FAの関係を調べ，CS-1CMがCS-1FAより強力なモデルであることを示す．４．では，線形時間で動作するCS-1CMの受理能力についての並列に動作するカウンタ機械の個数に基づく階層性を示す．５．では，時間計算量が制限されるとき，各CMが１方向的に動作するCS-CMと各CMが2方向的に動作するCS-CMの受理能力の差異，また決定性CS-1CMと非決定性CS-1CMの受理能力の差異について議論する．最後に，６．では，時間計算量が限定されたCS-1CMによって受理される言語の族のいくつかの演算に関する閉包性について述べる．

２．準備

まず，本論文で議論の対象となる各種のオートマタ（システム）並びにそれらの略記法を与える．CS-CM 以外のオートマタの定義については，適当な文献を参照されたい．

CS-1DFA(k) ：k個の１方向決定性FAから構成されるCS-FA[3]
CS-1NFA(k) ：k個の１方向非決定性FAから構成されるCS-FA[3]
CS-1DCM(k) ：k個の１方向決定性CMから構成されるCS-CM
CS-1NCM(k) ：k個の１方向非決定性CMから構成されるCS-CM
CS-2DCM(k) ：k個の２方向決定性CMから構成されるCS-CM
CS-2NCM(k) ：k個の２方向非決定性CMから構成されるCS-CM
SPk-HFA ：シンプル kヘッド有限オートマトン[4]
SNSPk-HFA ：検知形SPk-HFA[4]
CM(k) ：kカウンタ機械[5]

上述のSPk-HFA，SNSPk-HFA，CM(k)に対して，動作が決定性，非決定性であることを表すのに，それぞれ頭に'D'，'N'を付け，また，入力ヘッドの動きが１方向，２方向であることを表すのに，更にその頭に'1'，'2'を付ける．例えば，

1DSPk-HFA ：１方向決定性SPk-HFA
2NCM(k) ：２方向非決定性CM(k)

ある言語受理機械 M によって受理されるすべての語の集合をT(M)と記し，また，例えば，CS-1DCM(k)によって受理されるすべての語の集合の族を£[CS-1DCM(k)]と記す．つまり，£[CS-1DCM(k)]={T(M)|MはCS-1DCM(k)である}．

次に，コオペ ーティングカウンタ機械システム（CS-CM）の定義を述べる．ここでは，CS-1DCM(k)の定義のみを与えるが，CS-1NCM(k)，CS-2DCM(k)，CS-2NCM(k)の定義については読者に委ねる．

[定義2.1]　CS-1DCM(k) Mは，

$$M=(M_1, M_2, ..., M_k)$$

のk項組で表される．ここで，各 $1 \leq i \leq k$ に対し，M_iは，

$$M_i=(\Sigma, Q_i, X_i, \delta_i, q_{0i}, F_i, ¢, \$, \phi)$$

によって定義されるカウンタ機械（CM）である．但し，

(1) Σは入力アルファベット（$¢, \$ \notin \Sigma$，$¢$と$\$$は，それぞれ左と右境界記号）

(2) Q_iは内部状態の有限集合（$\phi \notin Q_i$）

(3) $X_i=(Q_1 \times \{0,1\} \cup \{\phi\}) \times \ldots \times (Q_{i-1} \times \{0,1\} \cup \{\phi\}) \times (Q_{i+1} \times \{0,1\} \cup \{\phi\}) \times \ldots \times (Q_k \times \{0,1\} \cup \{\phi\})$

(4) δ_iは次のような遷移関数

$$\delta_i : (\Sigma \cup \{¢, \$\}) \times X_i \times Q_i \times \{0,1\} \rightarrow Q_i \times \{R, H\} \times \{-1, +1, 0\}$$

(5) q_{0i}は初期状態（$q_{0i} \in Q_i$）

(6) F_iは受理状態の有限集合（$F_i \subseteq Q_i$）

Mの各CM M_iは，入力テープ $¢w\$$（$w \in \Sigma^*$）上で，1ステップずつ相互に同期をとりながら独立に動作する．即ち，ある時刻 t における各M_iの状態をq_iとし，M_iのカウンタの状況をc_i（カウンタの内容が空であれば$c_i=0$，さもなければ$c_i=1$）とする．このとき，各M_iは次の時刻 t+1 において

$$\delta_i(a_i, \langle q_1', \ldots, q_{i-1}', q_{i+1}', \ldots, q_k' \rangle, q_i, c_i) = (p_i, d_i, u_i)$$

によって定められる状態 p_i に入り，$d_i=R$ であれば，入力ヘッドを右に1コマ動かし，$d_i=H$ であれば，入力ヘッドは動かさない．また同時に，$u_i=-1$ であれば，カウンタの内容を1減らし，$u_i=+1$ であれば，カウンタの内容を1増やし，$u_i=0$ であれば，カウンタの内容を変えない．但し，入力ヘッドが$を右に離れることはないとする．

ここで，a_iはM_iの入力ヘッドが読む記号であり，各 $j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k\}$ に対し，

$$q_j' = \begin{cases} (q_j, c_j), & \text{時刻tにおいて}M_i\text{と}M_j\text{の入力ヘッドが同一のコマ上にあるとき} \\ \phi, & \text{さもないとき} \end{cases}$$

である．

Mの動作の出発点においては，Mの各CMはそれぞれの初期状態で入力テープ $¢w\$$ の左境界記号¢上にあり，しかもカウンタの内容が空である．計算のある時点において，すべてのCMが入力テープの右境界記号$上に到達し，かつ，各々受理状態に入ったとき，Mはその入力テープを受理するという．

Mの各CM M_iに対して，M_iが $n(\geq 1)$ ステップ毎に入力ヘッドを右に1コマ動かすときは，M_iの（入力ヘッドの移動の）速さは $1/n$ であるという．

$f: N \rightarrow N$（Nはすべての自然数の集合を表わす）を任意の関数とする．このとき，各 $n \geq 0$ と，長さがnであるようなすべての入力語 $w \in T(M)$ に対し，

Ⅰ. f(n)ステップからなるMのw上での受理計算が存在すれば，Mはf(n)時間で動作するといい，

Ⅱ. Mの各CMのカウンタの内容が高々f(n)で抑えられるようなMのw上での受理計算が存在すれば，Mはf(n)空間で動作するという．

上のⅠ（Ⅱ）において，特に $f(n)=O(n)$ であるとき，Mは線形時間（線形空間）で動作するといい，$f(n)=O(n^k), k \geq 1$，であるとき，Mは多項式時間（多項式空間）で動作するという．

以下，記法の簡単のため，しばしばCS-1DCM(k)（CS-1NCM(k)）をD(k)（N(k)）と記す．また，例えば，線形時間（線形空間）で動作するD(k)をD(k)[Linear-time]（D(k)[Linear-space]）と記し，多項式時間（多項式空間）で動作するD(k)をD(k)[Poly-time]（D(k)[Poly-space]）と記す．また，f(n)空間限定D(k)をD(k)[Space(f(n))]と記す．1DCM(k)[Linear-time]，1DCM(k)[Linear-space]，1DCM(k)[Space(f(n))]なども同様な意味を表す．

注：各 $X \in \{1,2\}$，各$Y \in \{D, N\}$ に対し，CS-XYCM(1)は，XYCM(1)となる．

3．ほかのオートマタとの関係

CS-CM は，受理計算に使う時間或いは空間の量（時間計算量或いは空間計算量という）が制限されないときには，チューリング機械と同等な受理能力をもつことが容易に示される（1DCM(2)を模倣できること，また1DCM(2)はチューリング機械を模倣できることから明らか）．

本章では，時間或いは空間計算量が制限された CS-CM と CM(k) の関係，CS-1CM と 1SPk-HFA 或いは 1SNSPk-HFAの関係を調べる．更に，線形時間で動作するCS-1DCM(k)（CS-1NCM(k)）と CS-1DFA(k)（CS-1NFA(k)）の関係を明らかにする．

まず，次の定理の成り立つことは簡単に示される．

[定理3.1] 各 $k \geq 1$, 各 $X \in \{1,2\}$，各 $Y \in \{D, N\}$ に対し，同一の時間（空間）計算

量において，CS-XYCM(k)は，XYCM(k)を模倣することができる．

以下，各 $k \geq 1$ に対し，$L(k)=\{0^{m_1}10^{m_2}1 \ldots 10^{m_k}20^{m_1}10^{m_2}1 \ldots 10^{m_k} \in \{0,1,2\}^+ | \forall i(1 \leq i \leq k)[m_i \geq 1]\}$とする．

[補題3.1]　各 $k \geq 1$，各 $s \geq 1$ に対し，$L(k+s) \notin$ £[1NCM(k)[Linear-space]]．

(証明)：本補題の成り立つことは，文献[8]の補題6.1の(2)に示されている．□

補題4.1（後述）の(1)で，各k≧に対し，$L(2k-1) \in$ £[D(k)[Linear-time]]であることが示されている．このことと定理3.1，補題3.1より，次の系を得る．

[系3.1]　各 $k \geq 2$，各 $Y \in \{D,N\}$ に対し，

(1) £[1YCM(k)[Linear-time]] $\subsetneq$ £[Y(k)[Linear-time]]

(2) £[1YCM(k)[Linear-space]] $\subsetneq$ £[Y(k)[Linear-space]]

[定理3.2]　各 $k \geq 2$，各 $m \geq 1$，各 $Y \in \{D,N\}$，各 $s(n) \geq n$ に対し，

(1) £[Y(k)[Linear-time]] $\subsetneq$ £[1YCM(2k)[Linear-space]]

(2) £[Y(k)[Space(n^m)]] $\subseteq$ £[1YCM(2k)[Space($cn^{(k-1)m+1}$)]]．但し，cはnに無関係な正の定数である．

(3) £[CS-2YCM(k)[Space(s(n))]] $\subseteq$ £[2YCM(2k)[Space(s(n))]]．

(証明)(1)，(2)：決定性の場合に対して証明する．非決定性の場合に対しても同様に証明できる．$M=(CM_1,CM_2,\ldots,CM_k)$をD(k)とする．各 $1 \leq i \leq k$ に対し，CM_iの入力ヘッドをH_iとし，CM_iのカウンタをC_iとする．Mの入力 ¢$a_1a_2 \ldots a_n$＄上での動作を次のように模倣する1DCM(2k) M'を考える．M'の入力ヘッドをR'とし，M'の2k個のカウンタを$C'_1,C'_2,\ldots,C'_{2k}$とする．M'は，M'の制御部にMの各CMの制御部を保持し，各 $1 \leq i \leq k$ に対し，カウンタC'_iを用いて，CM_iのカウンタC_iの動作を模倣し，入力ヘッドR'でもって，入力テープ上で一番左側に位置するCMの入力ヘッドの動作を模倣する（入力テープ上で一番左側に位置するCMが２個以上ある場合には，それらのうち最小の指数をもつCMを一番左側に位置するCMと考える）．また，カウンタ$C'_{k+1},C'_{k+2},\ldots,C'_{2k-1}$を用いて，入力テープ上で一番左側に位置するCM以外のCMが一番左側に位置するCMと離れる可能な最大の距離を記憶する．カウンタ C'_{2k}は，カウンタの内容の復元に用いられる．

① Mの各CMの初期状態をM'の制御部に保ち，M'の各カウンタの内容をゼロにし，入力ヘッドR'を左境界記号¢に動かして②へ．

② R'が右に動こうとするまで，¢を読む各CMの動作を模倣する．この間，¢を離れた各CM_iに対しては，CM_iが¢を離れた直後の制御部の状態とそのカウンタC_iの内容を，それぞれM'の制御部とC'_iに記憶すると同時に，CM_iが¢を離れた時刻とR'が¢を離れる時刻の差を適当なカウンタC'_{j_i}（$k+1 \leq j_i \leq 2k-1$）に記憶するように動作する．R'が右に動くと③へ．

③ $W^0=\{C'_{k+1},C'_{k+2},\ldots,C'_{2k-1}\}$として④へ．

④ Wを，W^0の中の内容が最大であり，かつゼロではないカウンタからなる集合とする．$W=\phi$（空集合）ならば，⑥へ．$W \neq \phi$であれば，⑤へ．

⑤ Wの中の各カウンタC'_{j_r}に対応するCM_rの入力ヘッドH_rがR'の読む記号 $a \in \{a_1,a_2,\ldots,a_n,\$\}$を読むときの$CM_r$の動作を模倣する．このとき，$H_r$が右に動かないような各 r に対し，$C'_{j_r} \leftarrow (C'_{j_r}-1)$とし，更に，$H_r$が右に動くような r の集合を$\{r_1,r_2,\ldots,r_s\}$とするとき，$W^0 \leftarrow W^0-\{C'_{j_{r_1}},C'_{j_{r_2}},\ldots,C'_{j_{r_s}}\}$として④へ．

⑥ R'の読む記号 a が右境界記号＄でなければ，⑦へ．R'の読む記号 a が右境界記号＄であれば，⑧へ．

⑦ (a) $\{C'_{k+1},C'_{k+2},\ldots,C'_{2k-1}\}$の中の内容がゼロでないようなカウンタに対応する$CM_i$に対しては，R'が右に動こうとするまで，１時刻ごとに，CM_iに対応するカウンタC'_{j_i}（$k+1 \leq j_i \leq 2k-1$）の内容を1ずつ増やし，(b) $\{C'_{k+1},C'_{k+2},\ldots,C'_{2k-1}\}$の中の内容がゼロであるようなカウンタに対応する各$CM_r$に対しては，R'が右に動こうとするまで，各$CM_r$の入力ヘッド$H_r$がR'の読む記号 a を読むときの動作を模倣する．この間，記号 a を離れる（即ち，右に動く）各CM_iに対しては，CM_iが a を離れた直後の制御部の状態とそのカウンタC_iの内容を，それぞれM'の制御部とC'_iに記憶すると同時に，CM_iが a を離れる時刻とR'が a を離れる時刻の差を適当なカウンタC'_{j_i}（$k+1 \leq j_i \leq 2k-1$）に記憶するように動作する．R'が右に動くと③へ．

⑧ ＄を読む各CM_iの動作を模倣する（Mの各CM_iの入力ヘッドが右境界記号を離れないことに注意せよ）．

Mが線形時間で動作するとすれば，M'は線形空間でMを模倣できることが容易に確認される．また，各 $k \geq 1$ に対し，$L(2k) \in$ £[1DCM(2k)[Linear-space]]−£[N(k)[Linear-time]]（補題4.1の(2)）であることから，本定理の(1)が成り立つ．

Mの受理計算において，各CM_iのカウンタの内容が高々n^mであるとすれば，上述の$\{C'_{k+1},C'_{k+2},\ldots,C'_{2k-1}\}$の中のカウンタの内容（Mの一番左側に位置する CM が入力

テープ上でほかのCMと離れる可能な最大の距離）が高々$(cn^{(k-1)m})\times n$（ここで，c はnに無関係な正の定数）であることに注意すれば，本定理の(2)が成り立つことがわかる．
(3):この証明はほとんど明らかであるので，略す．□
　定理3.2の(1)の結果を更に強めるかどうか，即ち，各$k\geq 2$，各$Y\in\{D,N\}$に対し，$\mathcal{L}[Y(k)[\text{linear-time}]]\subsetneq\mathcal{L}[1YCM(2k-1)[\text{Linear-space}]]$ であるかどうかは未解決問題である．補題3.1，補題4.1(1)より，$k\geq 2$ に対し，$L(2k-1)\in\mathcal{L}[D(k)[\text{Linear-time}]]-\mathcal{L}[1NCM(2k-2)[\text{Linear-space}]]$であることが容易に分かる．
　定理3.1，3.2と文献[6]の定理2.5より，次の系が得られる．
<u>[系3.2]</u>　各 $X\in\{1,2\}$，各 $Y\in\{D,N\}$ に対し，
$\bigcup_k \mathcal{L}[CS\text{-}XYCM(k)[\text{Poly-time}]]$
$=\bigcup_k \mathcal{L}[CS\text{-}XYCM(k)[\text{Poly-space}]]$
$=\bigcup_k \mathcal{L}[CS\text{-}XYCM(k)[\text{Space}(n)]]$
$=\bigcup_k \mathcal{L}[XYCM(k)[\text{Poly-time}]]$
$=\bigcup_k \mathcal{L}[XYCM(k)[\text{Poly-space}]]$
$=\bigcup_k \mathcal{L}[XYCM(k)[\text{Space}(n)]]$ †
　次に，1方向シンプルマルチヘッド有限オートマタとCS-1CMとの関係を述べる．定理3.1と文献[7]の定理1より，次の定理を得る．
<u>[定理3.3]</u>　各 $k\geq 1$ に対し，
(1) $\mathcal{L}[1NSPk\text{-}HFA]\subsetneq\mathcal{L}[N(k)[\text{Space}(n)]]$
(2) $\mathcal{L}[1NSNSPk\text{-}HFA]\subseteq\mathcal{L}[N(k+1)[\text{Space}(n)]]$
(3) $\bigcup_k \mathcal{L}[1NSPk\text{-}HFA]\subsetneq\bigcup_k \mathcal{L}[N(k)[\text{Space}(n)]]$
(4) $\bigcup_k \mathcal{L}[1NSNSPk\text{-}HFA]\subseteq\bigcup_k \mathcal{L}[N(K)[\text{Space}(n)]]$
　n時間（real-time）で動作する1DCM(1)は，集合 $\{0^m1^m|m\geq 1\}^*$を受理できることが容易に確かめられる．このことと，系3.2，文献[4]の補題4.1及び[文献7]の補題1より，次の定理を得る．
<u>[定理3.4]</u>　各 $Y\in\{D,N\}$ に対し，
(1) $\mathcal{L}[1YSP2\text{-}HFA]-\bigcup_k \mathcal{L}[D(k)[\text{Poly-space}]]\neq\phi$
(2) $\mathcal{L}[D(1)[\text{Real-time}]]-\bigcup_k \mathcal{L}[1YSPk\text{-}HFA]\neq\phi$
　補題4.1，文献[4]の補題2.2と文献[7]の補題1の結果を用いて，次の定理を得る．
<u>[定理3.5]</u>　各 $k,r\geq 1$，各 $Y\in\{D,N\}$ に対し，
(1) $\mathcal{L}[1YSNSP2k\text{-}HFA]\not\lessgtr\mathcal{L}[D(k+r)[\text{Linear-time}]]$
(2) $\mathcal{L}[1YSNSP2k\text{-}HFA]\not\lessgtr\mathcal{L}[D(k+r)[\text{Poly-time}]]$
(3) $\mathcal{L}[1YSNSP2k\text{-}HFA]\not\lessgtr\mathcal{L}[D(k+r)[\text{Space}(n)]]$
(4) $\mathcal{L}[1YSNSP2k\text{-}HFA]\not\lessgtr\mathcal{L}[D(k+r)[\text{Poly-space}]]$
ここで，記号$\not\lessgtr$は比較不能を表す．
　次に，線形時間で動作するCS-1CMとCS-1FAの関係について考察する．
<u>[補題3.2]</u>　任意の二進数 $w\in\{1\}\{0,1\}^*$ に対し，wによって表される整数を$n(w)$と記す（即ち，$n(a_1a_2\ldots a_k)=\Sigma_i a_i2^{k-i}$）．$L_1=\{w20^{n(w)}|w\in\{1\}\{0,1\}^*\}$とする．このとき，
(1) $L_1\in\mathcal{L}[1DCM(2)[\text{Linear-time}]]$
(2) $L_1\notin\bigcup_k \mathcal{L}[CS\text{-}1NFA(k)]$
(証明)(1):次のように動作する1DCM(2) M を考える．いま，入力$¢w20^m\$$が与えられたとする．ここで，$w\in\{1\}\{0,1\}^*$，$m\geq 1$ である．これ以外の形の入力はMによって容易に拒否される．Mは，wを読みながら，$n(w)$を計算し，その値をカウンタに保持する．それが二つのカウンタで，$n(w)$の時間でできるのは容易に確認される．また，$m=n(w)$であるかどうかを$n(w)$の時間で簡単にチェックできる．したがって，$L_1\in\mathcal{L}[1DCM(2)[\text{Linear-time}]]$である．
(2): いま，L_1を受理するCS-1NFA(k) $M=(M_1,M_2,\ldots,M_k)$が存在するとする．各 $m\geq 1$ に対し，

$$V(m)=\{w20^{n(w)}|w\in\{1\}\{0,1\}^*\ \&\ |w|=m\}^{\dagger\dagger}$$

とする．明らかに，$V(m)$の各語 x は，Mで受理される． 各 $x\in V(m)$ に対し，Mのx上での一つの固定された受理計算を$c(x)$と記す．いま，$c(x)$において，M_i（$1\leq i\leq k$）が最初にxの中の記号2に到達するまでの時間と記号2に到達したときの（M_iの）状態をそれぞれ $t_i(x)$，$q_i(x)$ と記し，$t_{min}(x)=\min\{t_1(x),\ldots,t_k(x)\}$とする．ま

† $\bigcup_k$は$\bigcup_{1\leq k<\infty}$を表す．
†† 各語wに対し，$|w|$はwの長さを表す．

た，各 $x \in V(m)$ に対し，

$$u(x)=\langle(q_1(x),t_1(x)-t_{min}(x)),\ldots,(q_k(x),t_k(x)-t_{min}(x))\rangle$$

とし，各 $1 \leqq i \leqq k$ に対し，

$$W_i(m)=\{x \in V(m)\ |\ t_i(x)-t_{min}(x)=0\}$$

とする．このとき，次の命題が成り立たなければならないことを容易に確かめる．

[命題3.1]　任意のi（$1 \leqq i \leqq k$）と任意の相異なる$x, y \in W_i(m)$に対し，$u(x) \neq u(y)$.

明らかに，ある $1 \leqq j \leqq k$ に対し，

$$|W_j(m)| \geqq |V(m)|/k=\Omega(2^m)$$

である．いま，$U_j(m)=\{u(x)\ |x \in W_j(m)\}$とする．このとき，文献[3]の補題1より，各 $x \in W_j(m)$ に対し，$t_i(x)-t_{min}(x)=O(m)$（$1 \leqq i \leqq k, i \neq j$）としてよい．よって，$|U_j(m)|=O(m^{k-1})$である．従って，十分大きな m に対しては，$|W_j(m)|>|U_j(m)|$となる．このような m に対し，$u(x)=u(y)$であるような相異なる語 x，$y \in W_j(m)$が存在することになり，命題3.1に矛盾する．これで本補題（2）の証明を終わる．□

文献[3]の補題1で，CS-1FAの任意の受理計算は線形時間の受理計算で置き換えられることが示されている．このことと，定理3.1，補題3.2より，次の定理を得る．

<u>[定理3.6]</u> 各 $k \geqq 2$，各 $Y \in \{D,N\}$ に対し，

(1) $\mathcal{L}$[CS-1YFA(k)]$\subsetneq \mathcal{L}$[Y(k)[Linear-time]]

(2) $\cup_k$ $\mathcal{L}$[CS-1YFA(k)]$\subsetneq \cup_k$ $\mathcal{L}$[Y(k)[Linear-time]]

4．カウンタ機械の数に基づく階層性

本章では，線形時間で動作するCS-1CMによって受理される言語の族のカウンタ機械の個数に関する階層性について考察する．

<u>[補題4.1]</u>　各 $k \geqq 1$，各 $s \geqq 0$ に対し，

(1) $L(2k+1) \in \mathcal{L}$[D(k+1)[Linear-time]]

(2) $L(2k+s) \notin \mathcal{L}$[N(k)[Linear-time]]

(証明)(1): L(2k)を線形時間で受理するCS-1DCM(k+1)が構成できることを示せばよい．以下のように動作するCS-1DCM(k+1) $M=(M_1,M_2,\ldots,M_{k+1})$ を考える．いま，入力テープ

$$¢\,0^{m_1}10^{m_2}1\ldots10^{m_{2k+1}}20^{m_1'}10^{m_2'}1\ldots10^{m_{2k+1}'}\ \$$$

が与えられたとする（これ以外の形の入力は M によって容易に拒否される）．

(a)　各 $1 \leqq i \leqq k$ に対し，M_iは0^{m_i}を読むときの速さが1/3であり，$0^{m_i'}$を読むときの速さが1であり，入力の他の部分を読むときの速さが1/2である．また，$0^{m_{k+i}}$を読むとき，入力ヘッドが右に1コマ動く毎に，カウンタの内容を1増やし，$0^{m_{k+i}'}$を読むときは，入力ヘッドが右に1コマ動く毎に，カウンタの内容を（ゼロではなければ）1減らす．

(b)　M_{k+1}は速さ1/2で入力ヘッドを動かし，$0^{m_{2k+1}}$を読むとき，入力ヘッドが右に1コマ動く毎に，カウンタの内容を1増やし，$0^{m_{2k+1}'}$を読むとき，入力ヘッドが右に1コマ動く毎に，カウンタの内容を（ゼロではなければ）1減らす．

(c)　すべての $1 \leqq i \leqq k$ に対し，M_{k+1}が$0^{m_i'}$を読み終えた直後に，M_iと同一のコマ上に位置することが見いだされ，かつ，M_iが$0^{m_{k+i}'}$を読み終えた直後に，M_iのカウンタの内容がちょうどゼロになり，M_{k+1}が$0^{m_{2k+1}'}$を読み終えた直後に，M_{k+1}のカウンタの内容がちょうどゼロになる場合に限り，$M_1,M_2,\ldots,M_{k+1}$は右境界記号＄上で受理状態に入る．

このように動作するMに対しては，各 $1 \leqq i \leqq k$ に対し，M_{k+1}が$0^{m_i'}$を読み終えた直後に，M_iと同一のコマ上に位置するとき，かつそのときに限り，$0^{m_i}=0^{m_i'}$となることと，M_iが$0^{m_{k+i}'}$を読み終えた直後に，M_iのカウンタの内容がちょうどゼロになり，M_{k+1}が$0^{m_{2k+1}'}$を読み終えた直後に，M_{k+1}のカウンタの内容がちょうどゼロになるとき，かつそのときに限り，$0^{m_{k+i}}=0^{m_{k+i}'}$，$0^{m_{2k+1}}=0^{m_{2k+1}'}$となることに注意すれば，$L(2k+1)=T(M)$であることが容易に確かめられる．

(2):（この証明は，本質的に補題3.2(2)の証明と同様である．）いま，L(2k+s)を受理するN(k)[Linear-time] $M=(CM_1,CM_2,\ldots,CM_k)$が存在するとする．各 $n \geqq 1$ に対し，

$$V(n)=\{0^{m_1}10^{m_2}1\ldots10^{m_{2k+s}}20^{m_1}10^{m_2}1\ldots10^{m_{2k+s}} \in \{0,1,2\}^+\ |\ \forall i(1 \leqq i \leqq 2k+s)[1 \leqq m_i \leqq n]\}$$

とする．明らかに，V(n)の各語 x は，Mで受理される．各 $x \in V(n)$ に対し，Mのx上での一つの固定された受理計算を $c(x)$ と記す．いま，$c(x)$において，CM_i（$1 \leqq i \leqq k$）が最初にxの中心記号2に到達するまでの時間と，記号2に到達したときの内部状態及びカウンタの内容を，それぞれ $t_i(x)$，$q_i(x)$，$c_i(x)$ と記し，$t_{min}(x)=\min\{t_1(x),\ldots,t_k(x)\}$とする．また，各 $x \in V(n)$ に対し，

$$u(x)=\langle(q_1(x),c_1(x),t_1(x)-t_{min}(x)),\ldots,(q_k(x),c_k(x),t_k(x)-t_{min}(x))\rangle$$

とし，各 $1 \leq i \leq k$ に対し，

$$W_i(n)=\{x \in V(n) \mid t_i(x)-t_{min}(x)=0\}$$

とする．このとき，次の命題が成り立たなければならないことを容易に確かめる．

[命題4.1] 任意の i $(1 \leq i \leq k)$ と任意の相異なる $x, y \in W_i(n)$ に対し，$u(x) \neq u(y)$．

明らかに，ある $1 \leq j \leq k$ に対し，

$$|W_j(n)| \geq |V(n)|/k=\Omega(n^{2k+s})$$

である．いま，$U_j(n)=\{u(x) \mid x \in W_j(n)\}$ とする．このとき，M は線形時間で動作するので，各 $x \in W_j(n)$ に対し，$t_i(x)-t_{min}(x)=O(n), c_i(x)=O(n)$ $(1 \leq i \leq k, i \neq j)$ としてよい．よって，$|U_j(n)|=O(n^{2k-1})$ である．従って，十分大きな n に対しては，$|W_j(n)|>|U_j(n)|$ となる．このような n に対し，$u(x)=u(y)$ であるような相異なる語 $x, y \in W_j(n)$ が存在することになり，命題4.1に矛盾する．これで本補題 (2) の証明を終わる．□

補題4.1より，次の定理が得られる．

[定理4.1] 各 $k \geq 1$，各 $Y \in \{D, N\}$ に対し，$\pounds[Y(k)[\text{Linear-time}]] \subsetneq \pounds[Y(k+1)[\text{Linear-time}]]$ である．

5．1方向と2方向，決定性と非決定性の差異

本章では，時間計算量が制限されたCS-1CMとCS-2CMの受理能力の差異，CS-1DCMとCS-1NCMの受理能力の差異について調べる．

$L_2=\{wcw^R(20^{|w|})^{|w|} \mid w \in \{0,1\}^*\}$ [†] とする．文献[6]に，$L_2 \in \pounds[2DCM(1)[\text{Linear-time}]]-\cup_k \pounds[1NCM(k)[\text{Poly-time}]]$ であることは示されている．このことと系3.2より，次の定理が得られる．

[定理5.1] $\pounds[CS\text{-}2DCM(1)[\text{Linear-time}]]-\cup_k \pounds[N(k)[\text{Poly-time}]] \neq \phi$．

$L_3=\{w_1 1 w_2 \mid w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \ \& \ |w_1|=|w_2|\}$ とする．文献[7]の補題(1)に，$L_3 \notin \cup_k \pounds[1DCM(k)[\text{Poly-space}]]$ であることは示されている．一方，L_3 は，n 時間 (Real-time) で動作する N(1) で受理されることは容易に確かめられる．これらのことと系3.2より，次の定理が得られる．

[定理5.2] $\pounds[N(1)[\text{Real-time}]]-\cup_k \pounds[D(k)[\text{Poly-time}]] \neq \phi$．

6．閉包性

本章では，時間計算量が限定されたCS-1CMによって受理される言語の族の閉包性について述べる．まず，決定性の場合を考察する．

[補題6.1] L_1^c を補題3.2で述べられた集合 L_1 の補集合とする．このとき，$L_1^c \notin \cup_k \pounds[1DCM(k)[\text{Poly-time}]]$．

(証明): ある $k \geq 1$ に対し，L_1^c を多項式時間で受理する1DCM(k) Mが存在すると仮定する．各 $n \geq 1$ に対し，

$$V(n)=\{w2 \mid w \in \{1\}\{0,1\}^* \ \& \ |w|=n\}$$

とする．各 $x=w2 \in V(n)$ に対し，M にその最初の部分が x であるような入力語が与えられたときに，Mの入力ヘッドが最初に記号 2 に到達するときの制御部の状態と各カウンタの内容を，それぞれ $q(x), c_1(x), c_2(x), \ldots, c_k(x)$ と記す．各 $n \geq 1$ に対し，

$$S(n)=\{\langle q(x), c_1(x), c_2(x), \ldots, c_k(x)\rangle \mid x \in V(n)\}$$

とする．Mは多項式時間で動作するので，$|S(n)|=O(n\text{の多項式})$ である．ところで，$|V(n)|=2^n$ であるから，十分大きな n に対しては，$|V(n)|>|S(n)|$ となり，このような n に対し，

$$\langle q(x), c_1(x), c_2(x), \ldots, c_k(x)\rangle=\langle q(y), c_1(y), c_2(y), \ldots, c_k(y)\rangle$$

であるような V(n) に含まれる $x=w_1 2, y=w_2 2$ $(w_1 \neq w_2)$ が存在することになる．いま，

$$x'=w_1 20^{n(w_1)}, \quad y'=w_2 20^{n(w_1)}$$

とする．明らかに，$y' \in L_1^c$ であるので，y' はMで受理される．従って，x' もまたMで受理されることになる．これは矛盾である ($\because x' \notin L_1^c$ である)．□

補題3.2の (1) と補題6.1より，次の定理を得る．

[定理6.1] 各 $k \geq 2$ に対し，$\pounds[D(k)[\text{Linear-time}]]$，$\pounds[D(k)[\text{Poly-time}]]$，$\cup_k \pounds[D(k)[\text{Linear-time}]]$，$\cup_k \pounds[D(k)[\text{Poly-time}]]$ は補集合をとる演算に関して閉じていない。

[定理6.2] (1) 各 $k \geq 1$ に対し，$\pounds[D(k)[\text{Linear-time}]]$ は和集合，共通集合をとる演算に関して閉じていない． (2) $\cup_k \pounds[D(k)[\text{Linear-time}]]$ は和集合，共通集合をとる演算に関して閉じている。

(証明):(1)各 $k \geq 1$ $1 \leq i \leq k$ に対し，$L(k,i)=\{0^{m_1}10^{m_2}1\ldots10^{m_k}20^{m_1'}10^{m_2'}1\ldots10^{m_k'}$

[†] 各語 w に対し，w^R は w の反転を表す．

$\in \{0,1,2\}^+ \mid \forall j(1 \leq j \leq 2k)[m_j, m_j' \geq 1]\ \&\ m_i = m_i'\}$とする．このとき，容易に確かめられるように，$L(2k,i) \in \mathcal{L}[D(1)[\text{Linear-time}]]$である．一方，補題4.1の(2)より，$L(2k,1) \cap \cdots \cap L(2k,2k) = L(2k) \notin \mathcal{L}[N(k)[\text{Linear-time}]]$．また，文献[3]の補題2の(2)の証明と同様な手法を用いて，$L(2k,1) \cup \ldots \cup L(2k,2k) \notin \mathcal{L}[D(k)[\text{Linear-time}]]$であることを証明できる． これらのこと補題4.1の(1)より，各 $k \geq 1$ に対し， $\mathcal{L}[D(k)[\text{Linear-time}]]$は和集合，共通集合をとる演算に関して閉じていないことが示される．

(2)　この証明については読者に委ねる．□

[定理6.3]　各 $k \geq 2$に対し，$\mathcal{L}[D(k)[\text{Linear-time}]]$，$\cup_k\ \mathcal{L}[D(k)[\text{Linear-time}]]$は，次の各演算について閉じていない．

(1) 反転

(2) 連接

(3) Kleene閉包

(4) 長さ保存の準同型写像

(証明)：文献[3]の定理7の証明と同じ考え方で証明できる．□

次に，非決定性の場合を考察する．

[補題6.2]　$L_4 = \{w2w \mid w \in \{0,1\}^*\}$とする．このとき，

(1) $L_4^c \in \mathcal{L}[N(1)[\text{Real-time}]]$

(2) $L_4 \notin \cup_k\ \mathcal{L}[N(k)[\text{Poly-time}]]$

(証明)：この証明は容易であろう．□

補題6.2より，次の定理を得る．

[定理6.4]　各 $k \geq 1$ に対し，時間計算量が多項式で制限されたとき，$\mathcal{L}[N(k)]$ と $\cup_k\ \mathcal{L}[N(k)]$は補集合をとる演算に関して閉じていない。

[定理6.5]　(1) 各 $k \geq 2$ に対し，$\mathcal{L}[N(k)[\text{Linear-time}]]$は，和集合をとる演算に関して閉じているが，共通集合をとる演算に関して閉じていない．(2) $\cup_k\ \mathcal{L}[N(k)[\text{Linear-time}]]$は和集合，共通集合をとる演算に関して閉じている．

(証明)(1)：各 $k \geq 2$ に対し，$\mathcal{L}[N(k)[\text{Linear-time}]]$が和集合をとる演算に関して閉じていることは明らかである． $\mathcal{L}[N(k)[\text{Linear-time}]]$が共通集合をとる演算に関して閉じていないことの証明は決定性の場合と同様である．

(2)：$\cup_k\ \mathcal{L}[N(k)[\text{Linear-time}]]$は和集合，共通集合をとる演算に関して閉じているのは明らかである．□

[定理6.6]　各 $k \geq 1$ に対し，時間計算量が多項式で制限されたとき，$\mathcal{L}[N(k)]$ と $\cup_k \mathcal{L}[N(k)]$は連接演算，Kleene閉包演算に関して閉じている．

(証明)：文献[3]の定理9の証明の手法を用いて証明できる．□

注：空間計算が多項式で制限されたCS-1CMによって受理される言語の族の閉包性についても，ほぼ同じ結果が成り立つことを示すことができる．これについては省略する．

[参考文献]

[1] M.Blum and W.Sakoda : On the capability of finite automata in 2 and 3 dimensional space, 18th IEEE FOCS Conference (1977)147-161

[2] A.Hemmerling : Normed two-plane traps for finite system of cooperating compass automata, IBM J.Inf.Process.Cybern.EIK23(1978)8/9,453-470

[3] 王躍，井上克司，高浪五男：コオペレーティング１方向有限オートマタシステムのある性質（91'夏のLAシンポジウム資料）

[4] Katsushi Inoue,Itsuo Takanami,Akira Nakamura and Tadashi Ae : One-way simple multihead finite automata, Theoretical Computer Science 9,1979, 311-328.

[5] P.C.Fischer,A.R.Meyer and A.L.Rosenberg : Counter machines and counter languages, Math.Systems Theory 2(1968)256-283

[6] S.A.Greibach : Remarks on the complexity of nondeterministic counter languages, Theoretical Computer Science 1(1976)269-288

[7] 井上克司，中村昭，阿江忠，高浪五男：シンプルマルチヘッド有限オートマタとカウンタ機械の関係，電子通信学会論文誌(D)J60-D,No.9,p758-759(1977,9)

[8] 井上克司，高浪五男,中村昭：1方向非決定性シンプルマルチヘッド有限オートマタ並びに１方向非決定性カウンタ機械に関するある性質，電子通信学会オートマトンと言語研究会AL77-28，1977年9月．