数理解析研究所講究録
第793巻 1992年 126-132

同変分類空間の構成

村山光孝 (Mitsutaka Murayama)、島川和久 (Kazuhisa Shimakawa)

1992年3月31日

1 序

同変 (principal) A-bundle の同変 universal A-bundle を functorial に構成することを考える。その最も一般的なものとして tom Dieck は Atiyah (K-theory and reality) の Reality を持った vector bundle と、通常の G-A bundle を一般化して、次のように定式化した。(Faserbündel mit Gruppenoperation.) G, A は位相群 (G は変換群、 A は構造群) で、G の A への (左) 作用が

$$\alpha : G \times A \to A \qquad (ga = \alpha_g(a) = \alpha(g,a))$$

で与えられているとする。つまり α は連続で、α_g は位相群の同型である。(即ち A は、topological G-group である。) 又、principal A-bundle に A は右から作用しているとする。このとき、

定義 1 *principal* (G,α,A)*-bundle* とは principal A-bundle $p : E \to B$ で 次をみたすものとする。

(1) E, B は left G-spaces 、 p は G-map で、

(2) $e \in E,\ g \in G,\ a \in A \Rightarrow g(ea) = ge \cdot ga.$

(tom Dieck は作用群 G は compact Lie group としている。)

Associated fibre bundle: fibre F には G と A が左から作用していて、$g(ax) = ga \cdot gx,\ x \in F$ を満たすものとすると total space は、自然に左 G 作用を持つ。

(G,α,A)-bundle 間の bundle map とは、 A-bundle map かつ、G-map であるものとする。

通常 G-A bundle と呼ばれるのは、G の A への作用が trivial のとき、即ち G が E に bundle map として作用しているときである。又、Reality を持った vector bundle とは 構造群が $A = GL(n,\mathbf{C}), U(n)$ で $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = Gal(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ は複素共役として A に

作用している時である。他の例としては、 Reality の一般化として A が適当な拡大体上の代数群, G がガロワ群の時や、ファイバー束の (free) loop 空間を考えれば, G が $Diff^{+}S^1$, A がループ群の時などがある。

tom Dieck は G が 有限群で, A が 有限連結成分を持つ Lie 群の帰納的極限の時、Lashof (Equivariant bundles) は G が compact Lie 群で, A が位相群の時の G-A bundle について、分類空間を構成した。 Lashof の構成、証明は、(G,α,A)-bundle でも成立する。しかし、どの構成も関手的にはなっていない。

ここでは、topological G-category の幾何学的実現として分類空間を構成することを考える。G は、 compact Lie 群、または離散群、 A は Hausdorff 位相群とする。

分類理論は、(非同変の時も) numerable bundle に対して適用される。§2 では 同変局所自明性及び同変 numerable bundle を定義する。§3 では分類理論を簡単に振り返り、その同変形を述べる。§4 で同変分類空間を与える圏を構成する。

2 local objects と numerable bundles

H を G の閉部分群とする。 G/H 上の principal (G,α,A)-bundle $p:E\to G/H$ は local object と呼ばれる。これは次の bundle と同値になる： 連続写像

$$\phi : H \to A \qquad \text{such that} \quad \phi(gh)=\phi(g)\cdot g\phi(h)$$

(crossed homomorphism = 1-cocycle $\in Z^1(H,A)$) が存在して、H の A への左作用が

$$\varphi : H\times A\to A, \qquad \varphi(h,a)=\phi(h)\cdot ha \quad (=\varphi_h(a))$$

で与えられる時、$G\times_H A$ $(=G\times_\phi A)$ を

$$G\underset{H}{\times}A = G\times A/\sim, \qquad (g,a)\sim(gh^{-1},\varphi_h(a))=(gh^{-1},\phi(h)\cdot ha) \quad (\forall h\in H)$$

とし、右 A-作用を

$$[g,a]\cdot b=[g,a\cdot g^{-1}b] \qquad (\text{ 従って } [g,a]=[g,1]\cdot ga\ )$$

で与える。 このとき、

補題 2

$$f:G\underset{H}{\times}A\to E, \qquad f([g,a])=g(ea)=ge\cdot ga \quad (e\in p^{-1}([H])\subset E)$$

が (G,α,A)-*bundle* 同値になるような *crossed homomorphism* $\phi : H \to A$ と左作用 $\varphi : H\times A\to A$ が存在する。

証明

$$h \in H \Longrightarrow he, h(ea) \in h \cdot p^{-1}([H]) = p^{-1}([H]) = e \cdot A \approx A$$

より ϕ, φ が

$$e \cdot \phi(h) = he, \quad e \cdot \varphi(h,a) = h(ea) = he \cdot ha \qquad (\exists 1\ \phi(h),\ \varphi(h,a) \in A)$$

で定義され、 $\varphi(h,a) = \phi(h) \cdot ha$ となる。 また

$$e \cdot \phi(hk) = hke = h(e\phi(k)) = he \cdot h\phi(k) = e\phi(h) \cdot h\phi(k) \qquad (h,k \in H)$$

より

$$\phi(hk) = \phi(h) \cdot h\phi(k) \qquad \text{(crossed homomorphism)}$$

となる。従って

$$\varphi(hk,a) = \phi(hk) \cdot hka = \phi(h) \cdot h\phi(k) \cdot hka = \phi(h) \cdot h(\phi(k) \cdot ka) = \varphi(h, \varphi(k,a))$$

より φ は 左作用になる。これより f が 次の様に well defined となる：

$$f([gh,a]) = gh(ea) = g(e\varphi(h,a)) = f([g, \varphi(h,a)]) \quad (= f([g, \phi(h) \cdot ha])) \qquad (g \in G, h \in H).$$

G の A への作用が trivial のときは、 ϕ は準同型で、φ は ϕ を通じた作用になる。

定義 3 (G,α,A)-bundle $p: E \to B$ が *locally trivial* とは、base space B 上の G-不変開被覆 $\{U_\beta\}$ が存在して、$U_\beta \underset{G}{\approx} G \times_{H_\beta} V_\beta$ かつ、 $E|U_\beta$ は

$$p: G \underset{H_\beta}{\times} (V_\beta \times F) \to G \underset{H_\beta}{\times} V_\beta, \quad p([g,(v,y)]) = [g,v]$$

と (G,α,A)-bundle 同値。さらに、$\{U_\beta\}$ に従属する G-不変局所有限 1 の分割が存在する時、(G-)*numerable* という。

$p: E \to B$ が trivial とは $G \times_H A \to G/H$ への (G,α,A)-bundle map が存在することに他ならない。

(G,α,A)-bundle $p: E \to B$ は G が compact Lie 群, B が completely regular のときは slice の存在定理により常に同変局所自明であり、さらに B が paracompact なら numerable である。G が compact Lie 群でないときは、同変局所自明性や numerability は bundle への作用に対する制限となる。

3 分類定理

この節では分類理論の概要を振り返り、同変理論に対する陳述を与える。非同変理論については Dold (Partitions of unity in the theory of fibrations) や多くの本に書かれており、同変版は Lashof により証明されているので、これらを参照して下さい。

定義 4 *universal* (G,α,A)*-bundle* とは *numerable principal* (G,α,A)*-bundle* $p:E\to B$ で

$$[X,B]^G \cong \{X\text{上の } (G,\alpha,A)bundle \text{ の同値類}\}$$

なるものである。ここで左辺 → 右辺は $p:E\to B$ の *pull back* により得られる。

これが well-defined, 単射であることは、 numerable bundle の *G-covering homotopy property* = *G-CHP* （ $\Leftrightarrow$ $p:E\to X\times I$ は $(E|X)\times I$ と同値） により得られる。また 分類写像は functional bundle が *G-section extension property* = *G-SEP* を持つ時に存在することが示される。これらは、bundle が local G-CHP, G-SEP を持てば Dold の方法 "local CHP 、SEP $\Rightarrow$ global results" によって証明される。これらの同変形は次の通り。

定理 5 (G-SEP,G-CHP, *c.f.* Dold, 2.7,4.8.) G を位相群、 $p:E\to B$ を *G-map*, $\{U_\beta\}$ を B の *numerable G-covering* とする。$\forall p|U_\beta$ が *G-SEP (G-CHP)* を持てば p は *G-SEP (G-CHP)* を持つ。

local G-SEP, G-CHP については Lashof [2.1,2.2,2.8,2.9] により

補題 6 G を位相群、V,F を H*-space* $(H<G)$ とする。F が H*-contractible* なら

(1) $pr_1 : V\times F\to V$ は H*-SEP* を持つ。

(2) $p: G\times_H(V\times F)\to G\times_H V$ は G*-SEP* を持つ。

補題 7 G を *compact Lie* 群, H をその閉部分群, X を G-空間とすると

(1) $q: G\to G/H$ は局所自明かつ H-局所自明であり、*paracompact* H-空間に対し H-*CHP* を持つ。

(2) *G-map* $X\times I\to G/H$ が存在すれば、G-同相 $X\cong G\times_H V$, $X\times I\cong G\times_H(V\times I)$ が存在する。

(3) D が $X\times I$ 上の (G,α,A) *trivial bundle* なら $D\cong(D|X)\times I$。従って、*G-CHP* を持つ。

この補題は G が離散群の時も成立する。

分類写像の存在

$q : D \to X, p : E \to B$ を numerable principal (G,α,A)-bunldes とする。functional bundle

$$\begin{array}{rclcl} \langle D,E\rangle &=& \bigcup_{(x,y)\in X\times B} \mathrm{Hom}_A(D_x,E_y) &\cong& (D\times E)/A, \quad D_x = q^{-1}(x) \\ && (f : D_x \to E_y) &\leftrightarrow& [d, f(d)], \qquad (d\in D_x) \end{array}$$

は X 上の numerable (G,α,A)-bunlde で fibre は Eと同相で G-作用は

$$gf = g\cdot f(g^{-1}-) \ (\ g[d,e] = [gd, ge]\ )$$

で与えられる。(E への左 A-作用を $(a,e)\to ae^{-1}$ で 与えた時の D の associate bundle 。)
local object に対しては

$$\begin{array}{ccccc} ((G\underset{H}{\times}A)\times E)/A &\cong& (G\underset{H}{\times}(A\times E))/A &\cong& G\underset{H}{\times}E \\ [[g,a],e] &\leftrightarrow& [g,[a,e]] &\leftrightarrow& [g, g^{-1}e\cdot a^{-1}] \\ [[g,1],ge] &\leftrightarrow& [g,[1,e]] &\leftrightarrow& [g,e] \end{array}$$

E への H-作用は

$$h\cdot[[1,1],e] = [[h,1],he] = [[1,\phi(h)],he]] \ \leftrightarrow\ [1, he\cdot\phi(h)^{-1}]$$

より $(h,e)\to he\cdot\phi(h)^{-1}$ で与えられる。

これより 次の分類定理を得る。

定理 8 *principal* (G,α,A)*-bundle* $p : E \to B$ が $\forall H$ と $\forall$*crossed homomorphism* $\phi : H \to A$ に対し次の H 作用に関して H*-contractible* になるとき、 $p : E \to B$ は *universal* (G,α,A)*-bundle* である。

$$e\in E \to he\cdot\phi(h)^{-1}, \qquad h\in H$$

4 分類空間の構成

$p : EA \to BA$ を 関手的に構成される universal A-bundle で、G は自動的にこれに作用しているものとする。このような構成は 例えば、Milnor 構成、 Segal 構成、 May の geometric bar 構成などがある。functional bundle

$$\langle EA, EA\rangle = \bigcup_{a,b\in BA} \mathrm{Hom}_A(p^{-1}(a), p^{-1}(b)) \cong (EA\times EA)/A$$

は BA 上の bundle で、その（同変） section は (G-)bundle map と対応している。

$\mathcal{G}(A)$ を位相圏で、その対象全体 $= BA$ で、射全体$= \langle EA, EA\rangle \cong (EA \times EA)/A$,

$\mathcal{S}(A)$ を位相圏で、その対象全体 $= EA$ で、射全体$= \langle EA, EA\rangle \times_{BA} EA \cong EA \times EA$ なるものとする。p は射に対し $1\times_{BA}p$ を考えることにより連続関手 $p : \mathcal{S}(A) \to \mathcal{G}(A)$ を与える。

EG を G の translation category 、即ち $obj\, EG = G$ 、 $mor\, EG = G \times G$. EG 上の右 G-作用は

$$(m, x)g = (m, xg), \quad (m, x) : x \to mx \ \in mor\, EG$$

で与えられるものとする。この時

$$p : Cat(EG, \mathcal{S}(A)) \to Cat(EG, \mathcal{G}(A))$$

の 幾何学的実現 が求めるものとなる。ここで $Cat(EG, C)$ は連続な 関手と自然変換 からなる topological G-category で左 G-作用は

$$(gf)(m, x) = g \cdot f(m, xg)$$

また、$Cat(EG, \mathcal{S}(A))$ 上の 右 A-作用は

$$(fa)(x) = f(x) \cdot a$$

で与えられるものとする。又、位相は、objects に対し、G と A の作用が連続になる最も強い位相を入れることにする。

次に、$Cat(EG, \mathcal{S}(A))$ が H-作用（$f \to hf{\cdot}\phi(h)^{-1}$, $h \in H$ ）に関して H-contractible になることを見る。

$\phi : H \to A$ を crossed homomorphism 、$F : G\times_H A \to EA$ を A-bundle map, *i.e.*, $G\times_H A \to G/H$ の分類写像とする。$f \in Cat(EG, \mathcal{S}(A))$ を

$$f(x) = x^{-1}F([x, 1]), \qquad f(m, x) \leftrightarrow (f(x), f(mx)) \in EA \times EA$$

とする。($\mathcal{S}(A) \approx EA \times EA$ より $\exists 1$ morphism $f(x) \to f(mx)$.) このとき

$$\begin{aligned}
(fa)(x) &= f(x) \cdot a = x^{-1}F([x, 1]) \cdot a = x^{-1}F([x, 1] \cdot xa) = x^{-1}F([x, a]),\\
(gf)(x) &= g \cdot f(xg) = g(xg)^{-1}F([xg, 1]) = x^{-1}F([xg, 1]),\\
(gf)a(x) &= (gf)(x) \cdot a = x^{-1}F([xg, 1]) \cdot a = x^{-1}F([xg, a]).
\end{aligned}$$

従って、

$$(hf)\phi(h)^{-1}(x) = x^{-1}F([xh, \phi(h))^{-1}]) = x^{-1}F([x, 1]) = f(x) \qquad (\forall x \in G = obj\, EG,\ \forall h \in H).$$

よって $(hf)\phi(h)^{-1} = f$ だから $Cat(EG, \mathcal{S}(A))$ は H-不動点を持つ。

自然変換 $\forall f' \to f$ も $\exists 1\ f'(x) \to f(x)$ より決まり、同変写像となる。これは f が terminal object であることを示し、$Cat(EG, \mathcal{S}(A))$ の H-contraction を与えている。

これらの位相圏の fat realization をとれば、任意の位相群 A に対し $p : \|Cat(EG, \mathcal{S}(A)\| \to \|Cat(EG, \mathcal{G}(A)\|$ は numerable (G, α, A)-bundle になる。従って、 universal (G, α, A)-bundle が得られた。

参考文献

[1] M. F. Atiyah, K-theory and reality, Quart. J. Math., Oxford, **17**, (1966) 367–386.

[2] Tammo tom Dieck, Faserbündel mit Gruppenoperation, Arch. Math., **20** (1969) 136–143.

[3] A. Dold, Partitions of unity in the theory of fibrations, Ann. of Math. **78** (1963) 223–255.

[4] R. K. Lashof, Equivariant bundles, Illinois J. Math. **26** (1982) 257–271.

[5] R. M. Seymour, Some functorial constructions on G-spaces, Bull. London Math. Soc. **15** (1983) 353-359.