数理解析研究所講究録
第793巻 1992年 187-202

G－写像とBorsuk－Ulamの定理

大阪大学・理　長崎　生光（Ikumitsu　Nagasaki）

§0. 序

古典的なBorsuk－Ulamの定理は、多くの人の興味を引き、昔から様々な拡張が試みられてきた。変換群論の立場からは、Borsuk－Ulamの定理は次のように述べることができる。

定理. 球面上に$Z/2$が自由かつ線型に作用しているとする。$Z/2$写像 $f: S^n \to S^m$ が存在すれば、$n \leq m$ である。

最近、Wasserman［W］は、上の定理を isovariant G写像の場合に拡張し、いくつかの結果を得た。　§1では、WassermanのBorsuk－

Ulamの定理を紹介したいと思う。§2では、半線型作用の場合のisovariant G写像のBorsuk-Ulamの定理について述べたい。§3では、関連する結果について短く触れたいと思う。

§1. Borsuk-Ulam Group (BUG)

Wasserman は、Borsuk-Ulamの定理の一拡張として、次のような問題を考えた。

問題. Gをコンパクト・リー群、V、WをG 表現とする。このとき、isovariant G写像 $f: V \to W$が存在すれば、

$$\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G$$

が成り立つか？

Wasserman は、任意の V、W と任意のisovariant G写像 $f: V \to W$ について、$\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G$が成り立つコンパクト・リー群を Borsuk-Ulam Group (BUG) となずけ、すべてのコンパクト・リー群はBUGであろうと予想しているが、今のところそ

れは証明されていない。

ここでＢＵＧの例をあげておこう。

例１．　Ｚ／ｐ（ｐ: 素数）はＢＵＧである。

この結果は Borsuk-Ulamの定理の一つの拡張としてよく知られており、多くの人の証明があるが、ここでは Laitinenn による証明の概略を述べておこう。

証明．　$f : V \to W$ を isovariant Ｇ写像とする（$G = Z/p$）。このとき f から isovariant Ｇ写像 $f' : V/V^G \to W/W^G$ が誘導される。示すべきことは、$\dim V/V^G \leqq \dim W/W^G$ である。したがって、はじめから $V^G = W^G = 0$ と仮定してよい。$f^{-1}(0) = 0$ であるから、isovariant Ｇ写像 $f'' : S(V) \to S(W)$ が誘導される。仮に、$\dim S(V) > \dim S(W)$ と仮定すると、Ｇ写像 $g : S(W) \to S(V)$ が存在する。合成 $gf'' : S(V) \to S(V)$ を考えるとＧは $S(V)$ に自由に作用するから、この写像の写像度は $\bmod |G|$ で１となる。一方、ＶとＷの次元の関係から写像度は０となる。これは矛盾である。

□

次の例は例1から容易に従う。

例2. S^1 はBUGである。

証明. $f: V \to W$ を isovariant S^1 写像とする。V、Wの isotropy type は有限個だから十分大きな素数位数の巡回部分群 Z/p をとれば、$V^{Z/p} = V^{S^1}$、$W^{Z/p} = W^{S^1}$ となる。fを Z/p 写像と見ると例1より

$$\dim V - \dim V^{Z/p} \leqq \dim W - \dim W^{Z/p}$$

したがって

$$\dim V - \dim V^{S^1} \leqq \dim W - \dim W^{S^1}$$

となる。 □

我々は、Wasserman の議論にしたがって、次の結果を証明しよう。

定理A. 可解なコンパクト・リー群はBUGである。

証明のために補題を準備する。

補題1. $1\to H\to G\to K\to 1$ をコンパクト・リー群の完全列とする。このとき、HとKがBUGならば、GもBUGである。

証明. VとWをG表現とし、$f: V\to W$ をisovariant G写像とする。fは isovariant H写像と見れば、HはBUGであるから、

$$\dim V-\dim V^H \leqq \dim W-\dim W^H$$

が成り立つ。つぎに V^H、W^H を自然にK表現と見ると、f^H は、isovariant K写像となるから、

$$\dim V^H-\dim(V^H)^K \leqq \dim W^H-\dim(W^H)^K$$

が成り立つ。$(V^H)^K = V^G$、$(W^H)^K = W^G$ だから、

$$\dim V^H-\dim V^G \leqq \dim W^H-\dim W^G$$

となる。この式と上の式の両辺を加えると

$$\dim V - \dim V^G \leqq \dim W - \dim W^G$$

を得る。したがって、GはBUGである。□

定理Aの証明. Gが可解ならば、次のような組成列が存在する。

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_r = G$$

ここで G_{i+1}/G_i は Z/p_i または S^1。

したがって補題1を繰り返し使えばGはBUGであることがわかる。

□

以後、この節では、Gは有限群とする。

素数条件を次のように定義する。

定義. (1)自然数 n が素数条件を満たすとは、n の素因数分解に現れる素数を p_1、…、p_r とするとき、$\sum_i 1/p_i \leqq 1$ を満たすことをいう。

（２）単純群Gが素数条件を満たすとは、Gの各元の位数が素数条件を満たすことをいう。

（３）有限群Gが素数条件を満たすとは、Gの組成列から定まる組成剰余群が素数条件を満たすことをいう。

このとき Wasserman の主定理は次である。

定理B． 有限群Gが素数条件を満たすならば、GはBUGである。

証明には、表現論からわかる簡単な事実が必要なのでここで述べておく。

補題2． VをG表現とし、χ_V をその指標とする。このとき、

$$\dim V^H = \Sigma_{g\in H}\, \chi_V(g)$$

である。

証明. $\dim V^H = <\chi_V, 1_H> = \Sigma_{g\in H}\, \chi_V(g)$ □

このことから、

$$(\dim W-\dim W^G)-(\dim V-\dim V^G)=(\Sigma_{g\in G}(\chi_W(1)-\chi_W(g)-\chi_W(1)+\chi_W(g)))/|G|$$

となることがわかる。

$h(g)=\chi_W(1)-\chi_W(g)-\chi_W(1)+\chi_W(g)$とおく。

補題3. $f:V\to W$ を isovariant G写像とする。$C\leqq D$を巡回部分群とすると、

$$(\Sigma_{g\in C}h(g))/|C| \leqq (\Sigma_{g\in D}h(g))/|D|$$

が成り立つ。

証明. 右辺

$$
\begin{aligned}
&= \dim W/W^C-\dim V/V^C \\
&\leqq \dim W/W^C-\dim V/V^C+\dim W^C/W^D-\dim V^C/V^D
\end{aligned}
$$

(D/CはBUG)

$= \dim W/W^{D} - \dim V/V^{D}$

$=$ 左辺　　□

次の補題が、証明の鍵となる補題である。

補題4. Cは巡回群とする。$f : V \to W$ を isovariant C写像とする。$|C|$が素数条件を満たすなら、

$$\sum_{g \in \mathrm{gen}\, C} h(g) \geqq 0$$

が成り立つ。ここで gen CはCの生成元となる元全体の集合。

証明. Cの位数についての帰納法により不等式を示す。

$|C| = 1$のときはこれは正しい。

$|C| = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ （素因数分解）とする。Cの生成元をgとし、Cの指数 p_i の部分群をC_i とする。このとき$C = \mathrm{gen}\, C \cup C_1 \cup \cdots \cup C_s$ となる。したがって、

$$\sum_C h(g) = \sum_{g \in \mathrm{gen}\, C} h(g) + \sum_i \sum_{g \in \mathrm{gen}\, C} h(g)$$

$$- \sum_{D < C} (n(D) - 1) \sum_{g \in \mathrm{gen}\, D} h(g)$$

ここで $n(D)-1=\#\{i \mid D \leqq C_i\}$

帰納法の仮定と補題3を使えば、

$$\Sigma_{g\in \mathrm{gen}\, C}\ h(g) \geqq \Sigma_C\ h(g) - \Sigma_i \Sigma_{g\in \mathrm{gen}\, C_i}\ h(g)$$

$$\geqq \Sigma_C\ h(g) - \Sigma_i (|C_i|/|C|)\, \Sigma_{g\in C}\ h(g)$$

$$= \Sigma_{g\in C}\ h(g)(1-\Sigma_i (|C_i|/|C|))$$

$$= \Sigma_{g\in C}\ h(g)(1-\Sigma_i 1/p_i) \geqq 0$$

最後の不等号は、CがBUGである事と素数条件から従う。 □

定理Bの証明.　補題1より、Gは単純群としてよい。

$\Sigma_{g\in G}\ h(g) \geqq 0$を示せばよいが、

$$\Sigma_{g\in G}\ h(g) = \Sigma_{C\leqq G} \Sigma_{g\in \mathrm{gen}\, C}\ h(g)$$

であるから（Cは巡回部分群をわたる）補題4よりこれは0以上であ

る。 □

以上で Wasserman の結果の紹介を終るが、全ての単純群が、素数条件を満たすとは限らないことを注意しておく。たとえば、n 次交代群は、$n \leqq 11$ のときは素数条件を満たすが、$n \geqq 12$ のときは満たさない。

§2. Special Borsuk-Ulam Group (SBUG)

この節では、Wasserman 問題を半線型作用の場合に考えてみたい。我々は、問題を次のように設定する。

問題. X、Y を半線型G球面とし、$f: X \to Y$を isovariant G写像とする。このとき、

$$\dim X - \dim X^G \leqq \dim Y - \dim Y^G$$

が成り立つような群はどのような群か？

ただし、不動点集合が空集合のときは、その次元は −1とする。

また、半線型G球面とは、任意の（閉）部分群Hの不動点集合が、

（ホモトピー）球面または空集合となる可微分G多様体のこととする。

定義． 上のような性質を持つコンパクト・リー群を Special Borsuk-Ulam Group （SBUG）ということにする。

上の問題でで半線型の部分を線型にしたものが、 Wasserman の提出した問題と同等であることに注意しておく。

我々は、次の結果を示したい。

定理C． 次は同値である。

（1） GはSBUG。

（2） Gは可解。

（1）⇒（2）は定理Aの証明とほぼ同様である。実際、補題1に対応する結果は、その証明の議論がそのまま通用する。ゆえに、Z/p、S^1 がSBUGであることを言えばよい。Z/p のときが示されれば、例2の証明と同じ議論で、S^1 がSBUGである事が判るので、Z/p の場合を示せばよい。

命題1． $G=Z/p$ はSBUGである。

証明.　$f: X \to Y$を半線型G球面の間の isovariant G写像とする。Xに G不動点があれば、Yにも G不動点があり、その点での接表現を考えれば、表現の場合に帰着されて、命題は示される。

XにG不動点がないとき、$Z = Y - Y^G$を考える。このとき、$f: X \to Z$となり、X、ZにはGは自由に作用している。また、Zはホモロジー球面であり、そのホモロジー次元は $\dim Y - \dim Y^G - 1$となる。今、$\dim X > \dim Y - \dim Y^G - 1$とすると、G写像 $g: Z \to X$が存在する。このとき、例1と同じ議論によって矛盾がでる。したがって、$\dim X \leqq \dim Y - \dim Y^G - 1$である。空集合の次元は、$-1$としていたから、$\dim X - \dim X^G \leqq \dim Y - \dim Y^G$が成り立つ。　□

（2）⇒（1）は、非可解群のとき不等号が成り立たない例を構成することによって示される。

命題2. Gは非可解群とする。次のような性質を持つ isovariant G写像 $f: X \to Y$が存在する。

X、Yは半線型G球面であり、それぞれのG不動点集合は空集合、

また、$\dim X \geqq \dim Y$.

証明. Oliver [O] により、Gが非可解のとき、次のようなG球体Bが存在する。

Hが非可解部分群のとき B^H は空集合、Hが可解部分群のとき B^H は球体。

次にn次元球体 D^n からm次元球体への連続写像で境界は境界へ移すものを一つ取り、それを h とする。ただし、$1 \leqq m < n$ で、球体上には、Gは自明に作用するものとする。このとき、

$$id \times h : B \times D^n \to B \times D^m$$

を考えると、これは。境界を境界に移す。$B \times D^n$の境界をXとし、$B \times D^m$の境界をYとおき、$id \times h$ の制限写像を f とおけば、これが求めるものであることは容易にわかる。 □

以上で定理Cの証明を終る。

§3. その他の結果と注意

Wasserman は [W] の最後にいくつか問題を提出しているが、その中に次のような問題があった。

問題. （isovariantとは限らない）G写像　f：S(V)　→S(W)で、S(V)、S(W)のG不動点がなく、S(V)の次元がS(W)の次元より大きくなるものはあるか？

実は、このような例が存在することは、Waner [Wa]によってすでに示されていた。彼は、Gが非可解群であれば、そのようなG写像が存在することを示している。最近、Bartsch [B]は、Gが有限群のとき、p－群でなければ上の性質を持つG写像が存在することを示している。

この事と§2で述べた定理を考え合わせると、Wassermanの最初の問題は、G空間がG表現である事とG写像がisovariantであることを有効に使わなければ解けないと思われるが、筆者には、今のところ、どうすればよいのかよくわからない。

参考文献

[B]　T. Bartsch, On the existence of Borsuk-Ulam theorem, to appear in Topology.

[O] R. Oliver, Smooth compact Lie group actions on disks, Math. Z. 161 (1978), 71–96.

[W] A. G. Wasserman, Isovariant maps and the Borsuk–Ulam theorem, Topology and its Appl. 38 (1991), 155–161.

[Wa] S. Waner, A note on the existence of G–maps between spheres, Proc. Amer. Math. Soc. 99 (1987), 179–191.