

## Modular invariance of the character table of Hamming association scheme $H(d, q)$

福工大非常勤 坂内悦子 (Etsuko Bannai)

“良い” conformal field theory に付随した fusion algebra の行列  $S$  ( $S^4 = I$  をみたしている) に対して次の条件をみたす対角行列  $T$  が存在することが知られている。

$$(1) \quad (ST)^3 = S^2$$

この性質は modular invariance property と呼ばれている。conformal field theory から離れて純粹に代数的な見地からこの modular invariance property がどのような fusion algebra at algebraic level (詳しくはこの講究録の坂内英一の記事を参照されたい) によってみたされているのか興味を持たれる。ここでは Hamming association scheme  $H(d, q)$  からつくられる fusion algebra at algebraic level が modular invariance property をみたしている事を証明する。なお Hamming association scheme  $H(d, q)$  の定義等は Bannai-

Ito ([1]) の Chap III sec 2 を参照されたい。

$H(d, q)$  の character table  $P$  は次の行列で与えられる。

$$(2) \quad P = \left( K_j(i) \right)_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 0 \leq j \leq d}}$$

ここで  $K_j(\theta)$  は次に定義される Krawtchouk polynomial である。

$$(3) \quad K_j(\theta) = \sum_{u=0}^j (-q)^u (q-1)^{j-u} \binom{d-u}{j-u}(\theta)$$

$$\text{また } K_j(0) = k_j = \binom{d}{j} (q-1)^j \quad (j=0, 1, \dots, d)$$

である。  $H(d, q)$  は self dual な association scheme である。すなわち  $P=Q (= \bar{Q})$ ,  $P^2 = |X|I = q^d I$  が成り立っている。また character table  $P$  と行列  $S$  の間の関係式より (この講究録の坂内英一の記事参照)  $S^2 = I$  であり対角行列  $T$  が (1) をみたすことは  $T$  が次の式をみたすことと同値であることがすぐわかる。

$$(4) \quad (PT)^3 = q^{\frac{3}{2}d} I$$

我々は (1) のかわりに (4) をみたす  $T$  の存在を示す。

定理 1.  $P$  を (2) で与えた  $H(d, q)$  の character table とする。また対角行列  $T$  を次の様に定義する。

$$T = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \alpha & & \\ & & \alpha^2 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \alpha^d \end{pmatrix}$$

ここで  $\alpha$  及び  $\alpha_0$  は  $\alpha^2 + (q-2)\alpha + 1 = 0$  および  $\alpha_0^3 = q^{\frac{d}{2}} / (1 + (q-1)\alpha)^d$  で定義される複素数である (従ってこの様な  $T$  は 6通りである)。この時  $(PT)^3 = q^{\frac{3}{2}d} I$  が成り立つ。

(さらに詳しくは [2] を参照されたい。)

系.  $H(d, q)$  に対して modular invariance property をみたす対角行列が存在する。

Krawtchouk polynomial は多くの人々により研究されてきた。次にその性質をいくつかあげておく。

Krawtchouk polynomial の generating function は次の式で与えられることが知られている ([1] p. 210 参照)。

$$(5) \quad \sum_{j=0}^d K_j(i) t^j = (1 + (q-1)t)^{d-i} (1-t)^i$$

(3) より  $K_j(i)$  は  $i$  に関する  $j$  次の多項式でありその最高次 ( $j$  次) の係数は  $(-q)^j / j!$  で与えられることがすぐ

わかる。すなわち

$$(6) \quad K_j(i) = (-q)^j / j! \cdot \left\{ i^j + \begin{array}{l} i \text{ に関する高々} \\ j-1 \text{ 次の多項式} \end{array} \right\}$$

である。また  $K_j(i)$  は次の様に書き表わされる事も知られている。

$$(7) \quad K_j(i) = \sum_{u=0}^j (-1)^u (q-1)^{j-u} \binom{i}{u} \binom{d-i}{j-u}$$

次に定理1の証明に使われる命題を3つあげておく。

命題 1.  $K_i(j) / k_i = K_j(i) / k_j$

ここで  $k_i = \binom{d}{i} (q-1)^i$  である。

この命題は[1]の Theorem 2.3 (Chap III) 及び Theorem 3.5 (Chap II) により証明することができるが (7) を使って直接計算することによっても示すことができる。

命題 2. (i)  $\sum_{l=0}^d K_l(i) l^s = 0, \quad 0 \leq s < i$

(ii)  $\sum_{l=0}^d K_l(i) l^i = (-1)^i q^{d-i} i!$

証明.  $0 \leq s < i$  をみたす任意の整数  $s$  に対し

$$\frac{d^s}{dt^s} \left( (1-t)^i (1+(q-1)t)^{d-i} \right)_{t=1} = 0 \quad \text{が成り立つ。従って}$$

(5)によ、 $1 \leq s < i$  の時には  $\sum_{l=0}^d K_l(i) l(l-1)\cdots(l-s+1) = 0$   
 がまた  $s=0$  の時は  $\sum_{l=0}^d K_l(i) = 0$  が成り立つ事かわかる。

一方  $l^s$  は  $1, l, l(l-1), \dots, l(l-1)\cdots(l-s+1)$  の一次結合で表  
 わすことができるから (i) が成り立つ。(ii) については

$$\sum_{l=0}^d K_l(i) l^i = \sum_{l=0}^d K_l(i) \left\{ l(l-1)\cdots(l-i+1) + \text{\scriptsize } l \text{ に関する高々 } i-1 \text{ 次の多項式} \right\}$$

であるから (i) より

$$\sum_{l=0}^d K_l(i) l^i = \sum_{l=0}^d K_l(i) l(l-1)\cdots(l-i+1) \quad \text{を得る。}$$

$$\begin{aligned} \text{一方 (5) より } \sum_{l=0}^d K_l(i) l(l-1)\cdots(l-i+1) &= \frac{d^i}{dt^i} \left( \sum_{l=0}^d K_l(i) t^l \right)_{t=1} \\ &= \frac{d^i}{dt^i} \left( (1-t)^i (1+(q-1)t)^{d-i} \right)_{t=1} = (-1)^i i! (1+(q-1))^{d-i} \end{aligned}$$

$$= (-1)^i q^{d-i} i! \quad \text{であるから (ii) が証明された。}$$

(命題 2 は  $H(d, q)$  の character table の直交関係を使  
 って証明することもできる。)

$$\text{命題 3. } \sum_{u=0}^d K_u(l) \alpha^u u^s = \left( \frac{1-\alpha}{1+(q-1)\alpha} \right)^l$$

$$\cdot \left( \frac{-\alpha q}{(1-\alpha)(1+(q-1)\alpha)} \right)^s (1+(q-1)\alpha)^d \cdot \left\{ l^s + \text{\scriptsize } l \text{ に関する高々 } s-1 \text{ 次の多項式} \right\}$$

ここで  $\alpha$  は  $\alpha^2 + (q-2)\alpha + 1 = 0$  で定義される。

$$\text{証明. } \sum_{u=0}^d K_u(l) \alpha^u u(u-1)\cdots(u-s+1) = \alpha^s \frac{d^s}{dt^s} \left( (1-t)^l (1+(q-1)t)^{d-l} \right)_{t=\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^s \sum_{u=0}^s \binom{s}{u} (-1)^u (q-1)^{s-u} l(l-1)\cdots(l-u+1) \cdot (d-l)(d-l-1)\cdots(d-l-s+u+1) \\
&\cdot (1-\alpha)^{l-u} (1+(q-1)\alpha)^{d-l-s+u} = (-1)^s \alpha^s (q-1)^s (1-\alpha)^l (1+(q-1)\alpha)^{d-l-s} \\
&\cdot \sum_{u=0}^s \binom{s}{u} \left( \frac{1+(q-1)\alpha}{(q-1)(1-\alpha)} \right)^u \cdot \left\{ l^s + \begin{array}{l} \text{\textit{l}に関する高々s-1次} \\ \text{\textit{の多項式}} \end{array} \right\} \\
&= (-1)^s \alpha^s (q-1)^s (1-\alpha)^l (1+(q-1)\alpha)^{d-l-s} \left( 1 + \frac{1+(q-1)\alpha}{(q-1)(1-\alpha)} \right)^s \cdot \left\{ l^s + \right. \\
&\left. \begin{array}{l} \text{\textit{l}に関する高々s-1} \\ \text{\textit{次の多項式}} \end{array} \right\} = \left( \frac{1-\alpha}{1+(q-1)\alpha} \right)^l \left( \frac{-\alpha q}{(1-\alpha)(1+(q-1)\alpha)} \right)^s (1+(q-1)\alpha)^d \\
&\cdot \left\{ l^s + \begin{array}{l} \text{\textit{l}に関する高々s-1} \\ \text{\textit{次の多項式}} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

一方  $u^s$  は  $1, u, u(u-1), \dots, u(u-1)\cdots(u-s+1)$  の一次結合で表わすことができるからこの命題を  $s$  に関する帰納法で証明する事ができる。

さて次に定理1の証明を与えよう。  $T$  を定理1で与えた対角行列とする。この時行列  $(PT)^3$  の  $(i, j)$  成分は

$$\alpha_0^3 \sum_{l, u=0}^d K_l(i) K_u(l) K_j(u) \alpha^{l+u+j}$$

となる。(6)によりこれは  $\alpha_0^3 \alpha^j (-q)^j / j! \cdot \sum_{l=0}^d K_l(i) \alpha^l \cdot \sum_{u=0}^d K_u(l) \alpha^u$   
 $\cdot \left\{ u^j + \begin{array}{l} \text{\textit{u}に関する高々j-1次} \\ \text{\textit{の多項式}} \end{array} \right\}$  に等しいことがわかる。命題3によつてこの式は  $\alpha_0^3 (-\alpha q)^j / j! \cdot \sum_{l=0}^d K_l(i) \alpha^l \left( \frac{1-\alpha}{1+(q-1)\alpha} \right)^l$   
 $\cdot \left( \frac{-\alpha q}{(1-\alpha)(1+(q-1)\alpha)} \right)^j \cdot (1+(q-1)\alpha)^d \cdot \left\{ l^j + \begin{array}{l} \text{\textit{l}に関する高々j-1次} \\ \text{\textit{の多項式}} \end{array} \right\}$   
 $= \frac{\alpha_0^3 (\alpha q)^{2j} (1+(q-1)\alpha)^{d-j}}{j! (1-\alpha)^j} \sum_{l=0}^d K_l(i) \left\{ l^j + \begin{array}{l} \text{\textit{l}に関する高々j-1次} \\ \text{\textit{の多項式}} \end{array} \right\}$

と変形できる。従って命題2によつて

$$(PT)^3 \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = 0, \quad i > j$$

$$(PT)^3 \text{ の } (i, i) \text{ 成分} = \frac{\alpha_0^3 (\alpha q)^{2i} (1+(q-1)\alpha)^{d-i} (-1)^i q^{d-i} i!}{i! (1-\alpha)^i}$$

$$= \alpha_0^3 (1+(q-1)\alpha)^d q^d \left( \frac{-\alpha^2 q}{(1-\alpha)(1+(q-1)\alpha)} \right)^i = q^{\frac{3}{2}d}$$

が得られる。次に  $i < j$  の場合は命題1によつて  $(PT)^3$  の

$$(i, j) \text{ 成分} = \alpha_0^3 \frac{k_j}{k_i} \alpha^{j-i} \sum_{l, u=0}^d K_u(j) K_l(u) K_i(l) \alpha^{l+u+i}$$

$$= \alpha_0^3 \frac{k_j}{k_i} \alpha^{j-i} \left\{ (PT)^3 \text{ の } (j, i) \text{ 成分} \right\} \text{ を得る。従つて}$$

定理1は証明された。

次にいくつかの注を与える。

注1. 定理1は coding 理論を用いてより短かく証明することができるがここではその説明を省略する。詳しくは[2]を参照されたい。

注2.  $q=2, d=2$  の時は  $T = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 0 \\ 0 & \alpha^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$  とすると(ここで  $\alpha$  は0でない任意の複素数)  $(PT)^3 = 8I$  となる。すなわち modular invariance をみたす対角行列は無数に存在する。また modular invariance をみたす対角行列はこれ等に限る。

注3.  $d=2, q>3$  および  $q=2$  については  $d=3, 4$  又は  $5$  の場合 modular invariance をみたく対角行列  $T$  は定理1にあげた6通りに限る。この事の証明には generating function を使った方法が有効である。一般に  $q \geq 2, d \geq 3$  に関しても modular invariance をみたく対角行列は定理1にあげた6通りだけであることが予想される。

次に他の self dual な  $P$  and  $Q$ -polynomial association scheme についても modular invariance をみたく  $T$  が存在するかどうか興味をもたれる。定理1の証明の中では character table に表われる直交多項式の generating function が重要な役割をはたしている。そこで他の  $P$  and  $Q$ -polynomial association scheme についてもその character table に表われる直交多項式の generating function がどうなっているか調べた。これまで  $H(d, q)$  については(5)で与えられる事が知られていた。Johnson association scheme  $J(v, d)$  については岡山理大の橋爪道彦氏によって次のとおりである事が最近示された。

$P = (P_j(i))_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 0 \leq j \leq d}}$  を  $J(v, d)$  の character table とする

と  $F_r(z) = \sum_{j=0}^d P_j(r) z^j = (1-z)^r {}_2F_1(-(d+r), -(v-d+r); 1; z)$   
 ここで  ${}_2F_1$  は hypergeometric series である。



他の、[1] で type I と呼ばれている P and Q-polynomial association scheme については次の定理2 から得ることが出来る。[1] の Chap III によるとこれ等の association scheme の character table  $P = (P_j(i))_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 0 \leq j \leq d}}$

$$\text{は } P_j(i) = k_j {}_4\phi_3 \left( \begin{matrix} q^{-i}, s^* q^{i+1}, q^{-i}, s q^{i+1} \\ r_1 q, r_2 q, r_3 q \end{matrix} \middle| q, q \right)$$

とあらわされる。ここで  ${}_n\phi_m$  は basic hypergeometric series である。詳しくは [1] を参照されたい。

定理2.  $P = (P_j(i))_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 0 \leq j \leq d}}$  を type I の association

scheme の character table,  $F_r(z)$  を  $\{P_j(i)\}_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 0 \leq j \leq d}}$  の generating function とする。すなわち

$$F_r(z) = \sum_{j=0}^d P_j(r) z^j \quad \text{とする。この時次の (i), (ii) が成り立つ。}$$

$$(i) \quad s^* = 0, s \neq 0, r_1 = q^{-d-1} \quad (\text{従って } r_2 \text{ 又は } r_3 = 0)$$

$$\text{の時} \quad F_r(z) = (z; q)_r {}_2\phi_1 \left( \begin{matrix} q^{r-d}, (r_2+r_3)q^{r+1} \\ (r_2+r_3)s^{-1}q^{-d} \end{matrix} \middle| q, q^{-r-1}z \right)$$

$$(ii) \quad s^* = s = 0, r_1 = q^{-d-1} \quad (\text{従って } r_2+r_3 \neq 0)$$

$$\text{の時} \quad F_r(z) = (z; q)_r {}_2\phi_0 \left( \begin{matrix} q^{d-r}, (r_2+r_3)^{-1}q^{-r-1} \\ \end{matrix} \middle| q^{-1}q^{r-1}z \right)$$

ここで  $(z; q)_r = (1-z)(1-qz)\cdots(1-q^{r-1}z)$  である。

### 参考文献

1. Bannai-Ito, Algebraic Combinatorics I, Benjamin/Cummings (1984).
2. Bannai-Bannai, Modular invariance of the character table of Hamming association scheme  $H(d, q)$  (preprint).