

Group Association Scheme の Subscheme について

富士通 岩片 靖 (Yasushi Iwakata)

問題 有限単純群 G が与えられたとき、その Group Association Scheme $(G, \{R_i\}_{i=1,2,\dots,n})$ に含まれる極小な Subscheme を決定せよ。

Group Association Scheme については [1] に詳しい説明があります。また Subscheme の定義については [2] を見て下さい。ここでは、上記の問題を解くのに大変有効な補題の説明から始めます。

P および Q をそれぞれ Association Scheme $X = (X, \{R_i\}_{i=1,2,\dots,d})$ の first eigen matrix と Second eigen matrix とします。 $K = \{1, 2, \dots, d\}$ $i \in K$, $L \subset K$ のときに $S(i, L)$ を以下のように定義します。

$$S(i, L) = \sum_{j \in L} p_{ij} \quad \text{ここで} \quad [p_{ij}] = P.$$

同様に $S^*(i, L) = \sum_{j \in L} q_{ij} \quad [q_{ij}] = Q$

と定義して $S(i, L)$ を i 行の和、 $S^*(i, L)$ を i 列の和と呼ぶことにします。 $S^*(i, L)$ を i 列の和と呼ぶのは、行と列を入れかえて Q を使用すると、 P と同様に行が character、列が

Conjugacy classで添字づけられるために、議論がしやすくなるためです。

補題 (坂内 [2])

$X = (X, \{R_i\}_{i=1,2,\dots,d})$ を Commutative Association Scheme, A_0, A_1, \dots, A_d を Adjacency matrix, $E_0 = \frac{1}{|X|} J$, E_1, E_2, \dots, E_d を primitive idempotents とする。
 $L_0 = \{0\}, L_1, \dots, L_e$ と $L_0^* = \{0\}, L_1^*, \dots, L_e^*$ を $K = \{0, 1, \dots, d\}$ の分割とする。

$$\tilde{A}_k = \sum_{j \in L_k} A_j \quad \tilde{E}_k = \sum_{j \in L_k^*} E_j \quad k = 0, 1, \dots, e$$

と定義すると以下の (i), (ii), (iii) は同値である。

(i) $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_e$ は X の Subscheme になる。

(ii) ① すべての $k, l = 0, 1, \dots, e$ について、もし $i, i' \in L_k^*$ ならば $S(i, L_l) = S(i', L_l)$ が成り立つ。

② すべての $j = 0, 1, \dots, e$ について、ある $j' \in \{0, 1, \dots, e\}$ が存在して、 ${}^t \tilde{A}_j = \tilde{A}_{j'}$ となる。

(iii) ① すべての $k, l = 0, 1, \dots, e$ について、もし $j, j' \in L_k$ ならば $S^*(j, L_l^*) = S^*(j', L_l^*)$ が成り立つ。

② すべての $j = 0, 1, \dots, e$ について、ある $j' \in \{0, 1, \dots, e\}$ が存在して ${}^t \tilde{E}_j = \tilde{E}_{j'}$ となる。

この補題は、 L_0, L_1, \dots, L_d および $L_0^*, L_1^*, \dots, L_d^*$ という $K = \{0, 1, \dots, d\}$ の分割にしたがって P および ${}^t Q$ の行と列を分割した時にできるブロック内において、

(i) Subscheme が存在する

(ii) P の行の和が等しい

(iii) t_0 の列の和が等しい

の3つの条件が同値であることを主張しています。

条件②の $\tilde{A}_j = \tilde{A}_{j^*}$, $\tilde{E}_j = \tilde{E}_{j^*}$ は Symmetrization よりも小さい Subscheme をとめるためには考慮にいれる必要がありません。さらに一般に以下の観察が役に立ちます。

$P = [P_{ij}]$ のときに L を有理数体 \mathbb{Q} 上 $\{P_{ij}\}$ で生成された体とする。 $\sigma \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ は $P^\sigma = [P_{ij}^\sigma]$ によって行および列を Orbit に分割する。この分割を $L_0, L_1, \dots, L_e, L_0^*, L_1^*, \dots, L_e^*$ とすると補題の条件(ii)が満たされることは Theorem 7.3 [1] を使って証明できる。その結果、この分割によって Subscheme ができることが分かる。さらに、極小な Subscheme は、こうしてできた Subscheme の関係をまとめることによって得られることも分かる。

この Subscheme のことを Algebraic Conjugation によって得られた Subscheme と呼び、S.O.A.C. と略記することにします。

極小の Subscheme を得るためには S.O.A.C. の関係 (行) をさらにまとめればよいわけですが、S.O.A.C. の first eigen matrix の要素はすべて整数なので、計算機を利用する解法が向いています。その計算のアルゴリズムは [3] に説明があります。しかし、このアルゴリズムでは、大きな群を取り扱うことができなかったため、次のような拡張を試みました。

P を first eigen matrix, n_1 を正の整数とする。 $P \pmod{n_1}$ の行と列を補題の条件 (ii), (iii) にしたがって分割する。この時、0以外の整数を持たない行および列は無視して分割する。次に異なる正の整数 n_2 をとり、同様に行と列を分割する。この時、 $P \pmod{n_1}$ で既に分割が定まっている行と列は、それに従う。これを P 全体の行と列が分割されるまで繰り返す。

この方法をとれば、すべての Sporadic な有限単純群からできる Group Association Scheme の極小な Subscheme を決定することが可能です。以上の方法を Mathieu 群 M_i ($i=11, 12, 22, 24$) および原田 Norton の群 HN に適用した結果を述べます。これらの群では、symmetrization と S.C.A.C. は同じものです。

- ① M_{12} では symmetrization の上に、outer automorphism の作用によって関係をまとめたものが極小な Subscheme になる。
- ② その他の場合は symmetrization が唯一の極小な Subscheme である。

今後の目標は、① 群とは関係なしに存在する Subscheme の発見
② Sporadic な群以外の単純群の Subscheme の決定などです。② については得られた Subscheme が極小であることを言うのが困難な場合があります。

[参考文献] [1] Bannai, Ito, "Algebraic Combinatorics I"

[2] Bannai, Subschemes of Some Association Schemes, J. Algebra

[3] Iwakata, Minimal Subschemes of the Group Association Schemes of Mathieu Groups, J. Combinatorics