数理解析研究所講究録
第 795 巻 1992 年 33-62



# 台がコンパクトでない初期dataをもつ半線型波動方程式の大域解の存在について

北大理　久保田幸次　(Koji Kubota)
早大理工　津田谷公利　(Kimitoshi Tsutaya)

**§1. 序.** 次の初期値問題を考える:

$$(1.1)\quad \begin{aligned} & u_{tt}-\Delta u = A|u|^p \quad \text{in } R^n\times[0,T), \\ & u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x) \quad \text{for } x\in R^n. \end{aligned}$$

ここで $n=2$ 又は $n=3$, $A$, $p$ は定数で $A>0$, $p>1$, $f\in C^3(R^n)$, $g\in C^2(R^n)$, $0<T\leqq\infty$, $u_t=\partial u/\partial t$, $u_{tt}=\partial^2 u/\partial t^2$. このノートでは、(1.1)の解として古典解, i.e., $u(x,t)\in C^2(R^n\times[0,T))$ のみを考える。

(1.1)の方程式は $u_{tt}-\Delta u=F(u, Du, D^2u)$ の特別な場合である。ここで $Du$, $D^2u$ は $u$ の $(x,t)$ に関する1階又は2階偏導関数である。右辺の $F$ が $u$ にのみ依存するか、或は $Du$, $D^2u$ にのみ依存するかで結果が著しく異ることが知られている (e.g. John [6], p.31)。

ここでは F(u) の場合を扱う。このときは $F(u)=A|u|^p$ 又は $F(u)=A|u|^{p-1}u$ の形が本質的であると考えられる（c.f. 下の Remarks 中の 6)）。(1.1) における F(u) の形は John [5] が初めて本格的にとり扱った。

話を (1.1) に戻そう。以下、初期 data には

$$(1.2)\quad \sum_{|\alpha|\leqq 3}|D_x^\alpha f(x)| + \sum_{|\beta|\leqq 2}|D_x^\beta g(x)| \leqq \frac{C\varepsilon}{(1+r)^{1+\kappa}}$$

for $x\in R^n$ を仮定する。ここで、$r=|x|$, $\varepsilon$, $\kappa$ は正のパラメーター，C は定数である。一般に ε が小さくなれば解が存在する時間 T は大きくなることが期待される。

<u>定義.</u> (1.1) の解 $u(x,t)\in C^2(R^n\times[0,T))$ が存在するような T の上限を <u>lifespan</u> といい、$T(\varepsilon)$ とかく。

我々の関心は、①どのような条件の下で大域解が存在する (i.e. $T(\varepsilon)=\infty$) か、②存在しない場合 $T(\varepsilon)$ は ε にどのように依存するか、の 2 点である。以下、2 次方程式

$$(1.3)\qquad (n-1)p^2-(n+1)p-2=0$$

の正の根を $p_0(n)$ とかく。ちなみに

$$3<p_0(2)=\frac{3+\sqrt{17}}{2}<4,\quad 2<p_0(3)=1+\sqrt{2}<3.$$

<u>初期 data がコンパクトな台をもつ場合に知られている主な結果.</u>

(1.4)　$f(x) = \varepsilon\varphi(x)$, $g(x) = \varepsilon\psi(x)$, $\varphi \in C_0^3$, $\psi \in C_0^2$

を仮定する。$n=2$ 又は $n=3$ のとき、① $p > p_0(n)$ かつ $0 < \varepsilon << 1$ ならば $T(\varepsilon) = \infty$，② $1 < p \leqq p_0(n)$ ならば $T(\varepsilon) < \infty$ となる $\varphi, \psi$ が存在する。この結果は、$n=3$ かつ $p \neq p_0(3)$ のとき John [5]，$n=2$ かつ $p \neq p_0(2)$ のとき Glassey [3], [4]，$p = p_0(n)$ のときは Schaeffer [9] による。

<u>(1.2)の下で知られている結果.</u>（Asakura [2] による)。$n=3$ かつ $p > p_0(3)$ とする。① $K > 2/(p-1)$ かつ $0 < \varepsilon << 1$ ならば $T(\varepsilon) = \infty$，②

(1.5)　$f = 0$，$g(x) \geqq \dfrac{\varepsilon}{(1+r)^{1+K}}$，$0 < K < \dfrac{2}{p-1}$

ならば $\forall\varepsilon > 0$ に対して $T(\varepsilon) < \infty$。

以下、解の存在時間についての我々の主な結果をのべる。

<u>定理1.</u>（大域解の存在）. $n=2$ 又は $n=3$，$p > p_0(n)$ かつ (1.2) を仮定する。更に

(1.6)　$K \geqq \dfrac{2}{p-1}$

ならば $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$ なる $\varepsilon$ に対して $T(\varepsilon) = \infty$。ここで $\varepsilon_0$ は $A, p$ 及び $K$ に依存する定数である。

<u>定理2.</u>（lifespan の下からの評価)。$n=2$ とする。

(1.7)　$p > p_0(2)$ かつ $0 < K < \dfrac{2}{p-1}$

又は

(1.8) $2 < p \leqq p_0(2)$ かつ $0 < \kappa < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$

ならば

(1.9) $T(\varepsilon)^{2-(p-1)\kappa} \geqq C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{p-1}$ for $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$

をみたす正の定数 $C$, $\varepsilon_0$ が存在する ($A, p, \kappa$ に依存)。

(1.10) $2 < p \leqq p_0(2)$ かつ $\kappa \geqq \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$

ならば

$$(1.11)\quad \begin{aligned} &T(\varepsilon)^{\delta(p)} \log T(\varepsilon) \geqq C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{p-1} && \text{if } p \neq 3, \\ &T(\varepsilon)^{1/3} (\log T(\varepsilon))^2 \geqq C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 && \text{if } p = 3 \end{aligned}$$

for $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$ をみたす正の定数 $C$, $\varepsilon_0$ が存在する。ここで、$\delta(p)$ は、$2-(p-1)\kappa$ において $\kappa = \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ とおいたもの, i.e.,

(1.12) $\delta(p) = \frac{1}{p} - \frac{p-3}{2} = -\frac{p^2-3p-2}{2p}$

(右辺の分子は (1.3) の左辺と同じものである)。

<u>Remarks.</u> 1). 定理1は、$n=2$ のとき、$\kappa > \frac{2}{p-1}$ の場合は [7], [11] で、$\kappa = \frac{2}{p-1} \neq \frac{1}{2}$ のときは [7], [13] で独立に示されている。$\kappa = \frac{2}{p-1} = \frac{1}{2}$ の場合は [13] による。$n=3$ かつ $\kappa = \frac{2}{p-1}$ の場合は [12] による。

2). 定理1で $n=2$ のとき、(1.6) を (1.5) におきかえると $\forall \varepsilon > 0$ に対して $T(\varepsilon) < \infty$ であることが、[11] と Agemi & Takamura [1] で独立に示されている。

3). 定理2について、先ず

(1.13)　$p > p_0(2) \Longleftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{p} > \frac{2}{p-1}$

が成り立つことに注意する。(1.9)は、(1.7)の場合[13]による。(1.8)の場合は[7]のTh. 5.1を、[12]のProp. 4.3(このノートの補題3.3)を使って改良したものである。(この補題は、定理1で $k = 2/(p-1)$, $k = 1/2$ $(n=2)$, $k = 1$ $(n=3)$ の場合の証明にも使う。c.f. 補題3.5の証明)。(1.11)は[7]のTh. 5.2と同じものである。

4). (1.9)の逆向きの不等式も[1]で示されている(仮定は同じ, $\varepsilon > 0$ は任意, $C$ は異る)。[1]では又

$$T(\varepsilon)^{\delta(p)} \leqq C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{p-1} \quad \text{for } 1 < p < p_0(2)$$

も示されている。但し、$f = 0$, $g(x) = \varepsilon \psi(x)$, $\varepsilon > 0$, $\psi \geqq 0$, $\psi \not\equiv 0$。ここで $\delta(p)$ は(1.12)で与えられる。(1.4)の下ではより精密な評価が得られている。以下、$\varphi, \psi$ は適当にとる。e.g. $p = 2$ のとき Lindblad [8] は

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} T(\varepsilon)/a(\varepsilon) \in (0, \infty)$$

が存在することを示した。ここで $a(\varepsilon)$ は $\varepsilon^2 a(\varepsilon)^2 \times \log(1 + a(\varepsilon)) = 1$ をみたす。$2 < p \leqq p_0(2)$ のときは Zhou [14] が ($\lim$ は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき)

$$\exists \lim \varepsilon^{p-1} T(\varepsilon)^{\delta(p)} \in (0, \infty) \quad \text{if } p < p_0(2)$$

を示した。$p = p_0(2)$ のときは

$$C_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{p(p-1)} \leqq \log T(\varepsilon) \leqq C_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{p(p-1)}$$

をみたす正の定数 $C_1$, $C_2$ が存在することを示した。これらをみると、(1.11) における $\log T(\varepsilon)$ はとり除ける可能性があると思われる。

5). $n=3$ に対しても定理2と同様のことが成り立つと思われる。(1.7) の下で (1.9) が成り立つことは [12] で示されている。(1.8) と (1.10) における $\frac{1}{2}+\frac{1}{p}$ は $1+\frac{1}{p}$ に変る (c.f. §4 の Remark 3 の最後)。

6). 最後に、定理1,2共に (1.1) の右辺を次の性質 (H) をみたす $F(u)$ におきかえてもそのまま成り立つ。(c.f. [2], [7], [11], [12], [13] etc)。$n=2$ のときは

(H): $F(u)\in C^2(R^1)$, $F(0)=F'(0)=F''(0)=0$

かつ

$$|F''(u)-F''(v)|\leqq Ap(p-1)|u-v|\left(\max\{|u|,|v|\}\right)^{p-3}$$

for $|u|,|v|\leqq 1$ をみたす $A$, $p>p_0(2)$ が存在する。

この条件から $|F'(u)|\leqq Ap|u|^{p-1}$, $|F(u)|\leqq A|u|^p$ for $|u|\leqq 1$ が従うことに注意する。$n=3$ については [2] 又は [12] をみられたい。(Remarks 終)。

以下、定理1,2の証明の概略をのべる。大筋では [7] に従い、[13] による改良を施す (主として補題3.3を使う部分)。又、$n=3$ の場合は、$n=2$ のときの論法の1部分で間に合うのでことわらない限り $n=2$ とする。(c.f. §4の Remark 3)。

ところで、(1.1)の解を1つ見つけるには次の積分方程式を解けばよい(一意性は[6]の Appendix より従う):

$$(1.14)\qquad u = u_0 + L(A|u|^p).$$

ここで $u_0$ は線型方程式 i.e. (1.1)で $A=0$ とおいたときの解, $L$ は $C^0(R^2\times[0,\infty))$ 上の線型作用素で

$$(1.15)\qquad L(v)(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t (t-\tau)d\tau \int_{|\xi|<1} \frac{v(x+(t-\tau)\xi,\tau)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{(t-\tau)^2-\rho^2}} \int_{|\omega|=1} v(x+\rho\omega,\tau)dS_\omega$$

でよえられる。(1.14)を逐次近似法で解く(John [5] 以来この方法がとられている)。i.e.

$$u_n = u_0 + L(A|u_{n-1}|^p) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

でよえられる関数列が次の空間

$$X = \{u\in C^0(R^2\times[0,T));\ D_x^\alpha u\in C^0(R^2\times[0,T)) \text{ and } \|D_x^\alpha u\|<\infty \text{ for } |\alpha|\leqq 2\}$$

で収束することを示す。ノルムは(1.2)の $K$ によって異るが $0<K<(1/2)+(1/p)<1$ のときは

$$(1.16)\qquad \|u\| = \sup_{(x,t)\in R^2\times[0,T)} |u(x,t)|/\Phi_0(r,t),\quad r=|x|$$

と定義する。ここで $\Phi_0(r,t)$ は次の節の(2.6)で与えられる関数である。(1.14)を解く際に問題となるのは先ず $u_0$ の decay rate である。これは§2でのべる。又、作用素 $L$ に関する a priori 評価

(1.17) $\quad \| L(|u|^p) \| \leqq \tilde{C} \|u\|^p \quad$ for $u \in C^0(R^2 \times [0,T))$

も本質的である。この定数 $\tilde{C}$ を使うと, $p > 2$ かつ

(1.18) $\quad p 2^p A \tilde{C} \|u_0\|^{p-1} \leqq 1$ かつ $\|u_0\| \leqq \frac{1}{2}$

の下で(1.14)の解が $X$ に存在することが分る(この部分は routine work)。又、§2で $\|u_0\| \leqq C_0 \varepsilon$ が示されるから、(1.18)は

(1.19) $\quad p 2^p A \tilde{C} (C_0 \varepsilon)^{p-1} \leqq 1$ かつ $C_0 \varepsilon \leqq \frac{1}{2}$

より従う。ここで $C_0$ は $K$ にのみ依存する。ところで $\tilde{C}$ は一般に $A, p, K$ 及び $T$ に依存するが、特に、$T$ に依存しなければ $T(\varepsilon) = \infty$ が結論される。定理1の $\varepsilon_0$ としては(1.19)をみたす最大の $\varepsilon$ をとればよい。他方、$\tilde{C}$ が $T$ に依存する場合は、$\varepsilon_0 = 1/(2C_0)$ とおき、(1.19)の第1式をみたす $T$ を1つとると $T(\varepsilon) \geqq T$ が結論される。以上が大まかな仕組である。

§2. 斉次方程式の解 $u_0$ の decay rate. $u_0(x,t)$ を次の初期値問題の解とする：

$$(2.1)\quad \begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{in } R^2 \times [0,\infty), \\ &u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) \quad \text{for } x \in R^2. \end{aligned}$$

$f \in C^3(R^2)$, $g \in C^2(R^2)$ ならば (2.1) の $C^2$ の解 $u_0$ が一意的に存在し、かつ

$$(2.2)\quad u_0(x,t) = \partial_t M(f)(x,t) + M(g)(x,t)$$

と表わされることはよく知られている。ここで

$$(2.3)\quad M(f)(x,t) = \frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1} \frac{f(x+t\xi)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^t \frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\,d\rho \int_{|\omega|=1} f(x+\rho\omega)\,dS_\omega.$$

$$\left( n=3 \text{ のときは } M(f)(x,t) = \frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1} f(x+t\omega)\,dS_\omega \right).$$

この §の目的は、(1.2) の下で $u_0$ の decay rate を調べることである。簡単のため (1.2) における $C$ を 1 にとる。i.e.

$$(2.4)\quad \sum_{|\alpha|\leqq 3} |D_x^\alpha f(x)| + \sum_{|\beta|\leqq 2} |D_x^\beta g(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{(1+r)^{1+\kappa}} \quad \text{for } x \in R^2$$

を仮定する。ここで $r=|x|$, $\kappa>0$, $\varepsilon>0$。このとき

<u>定理 2.1.</u> ([7], Prop. 2.1).

$$(2.5)\quad \sum_{|\alpha|\leqq 2} |D_x^\alpha u_0(x,t)| \leqq C_0\,\varepsilon\,\Phi_0(r,t) \quad \text{for } (x,t) \in R^2 \times [0,\infty)$$

が成り立つ。ここで $C_0$ は $\kappa$ にのみ依存する定数，$\Phi_0$ は

$$(2.6)\quad \Phi_0(r,t)=\begin{cases} \dfrac{1}{(1+t+r)^{\kappa}} & \text{if } 0<\kappa<\dfrac{1}{2},\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{1+t+r}}\left(1+\log\dfrac{1+t+r}{1+|t-r|}\right) & \text{if } \kappa=\dfrac{1}{2},\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{1+t+r}\,(1+|t-r|)^{\kappa-(1/2)}} & \text{if } \dfrac{1}{2}<\kappa<1,\\[2mm] \dfrac{1+\log(1+|t-r|)}{\sqrt{1+t+r}\,\sqrt{1+|t-r|}} & \text{if } \kappa=1,\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{1+t+r}\,\sqrt{1+|t-r|}} & \text{if } \kappa>1 \end{cases}$$

で与えられる。

<u>Remarks</u> 1). decay rate (2.6) は $0\leqq r\leqq t$ では optimal である（c.f. [7] の Appendix）。

2). $n=3$ のとき $\Phi_0$ は

$$(2.7)\quad \Phi_0(r,t)=\begin{cases} (1+t+r)^{-\kappa} & \text{if } 0<\kappa<1,\\[2mm] \dfrac{1}{1+t+r}\left(1+\log\dfrac{1+t+r}{1+|t-r|}\right) & \text{if } \kappa=1,\\[2mm] (1+t+r)^{-1}(1+|t-r|)^{1-\kappa} & \text{if } \kappa>1 \end{cases}$$

に変る。この事実は Asakura [2] で示されているが，(2.5) の証明の論法からも分る（c.f. (2.11) の下の remark）。

又、$0 \leqq r \leqq t$ で optimal であることも示せる。

定理 2.1 の証明の概略．［7］の Prop. 2.1 の証明を整理してのべる。$0 \leqq t \leqq 1$ のときは，(2.3) の初めの表現を使うと容易に

$$(2.8) \quad \sum_{|\alpha| \leqq 2} |D_x^\alpha u_0(x,t)| \leqq 2\varepsilon \left(\frac{4}{1+t+r}\right)^{1+\kappa}, \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

が分るから、以下 $t \geqq 1$ とする。このときは，(2.2)，(2.3)，(2.4) より ($1+t \leqq 2t$ として)

$$(2.9) \quad \sum_{|\alpha| \leqq 2} |D_x^\alpha u_0(x,t)| \leqq \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^t \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \int_{|\omega|=1} \frac{dS_\omega}{(1+|x+\rho\omega|)^{1+\kappa}}$$

が従う。右辺の球面積分に次の補題を適用する。

補題 2.2.（［7］, Lemma 2.3）. $b(\lambda)$ は $[0,\infty)$ 上の連続関数，$n \geqq 2$，$x \in R^n \setminus 0$ かつ $\rho > 0$ ならば

$$\int_{|\omega|=1} b(|x+\rho\omega|)\, dS_\omega = 2^{3-n} \omega_{n-1} (r\rho)^{2-n} \times$$

$$\times \int_{|\rho-r|}^{\rho+r} \lambda\, b(\lambda)\, h(\lambda,\rho,r)\, d\lambda$$

が成り立つ。ここで $\omega_k = 2\sqrt{\pi^k} / \Gamma(\frac{k}{2})$ $(k \geqq 1)$，

$$h(\lambda,\rho,r) = \{\rho^2-(\lambda-r)^2\}^{\frac{n-3}{2}} \{(\lambda+r)^2-\rho^2\}^{\frac{n-3}{2}}.$$

この補題を $n=2$ として (2.9) に適用する。

$$\int_{|\omega|=1} \frac{dS_\omega}{(1+|x+\rho\omega|)^{1+\kappa}} = 4\int_{|\rho-r|}^{\rho+r} \frac{\lambda}{(1+\lambda)^{1+\kappa}} h(\lambda,\rho,r)d\lambda$$

かつ　$\lambda(1+\lambda)^{-1-\kappa} \leqq (1+\lambda)^{-\kappa}$　だから

$$(2.10)\quad \sum_{|\alpha|\leqq 2} |D_x^\alpha u_0(x,t)| \leqq 2\varepsilon I(r,t),$$

$$(2.11)\quad I(r,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \int_{|\rho-r|}^{\rho+r} \frac{h(\lambda,\rho,r)}{(1+\lambda)^\kappa} d\lambda$$

が従う。

<u>Remark.</u> $n=3$ のときは同様にして.

$$I(r,t) = \frac{1}{2r}\int_{|t-r|}^{t+r} \frac{1}{(1+\lambda)^\kappa} d\lambda$$

が従う。これより (2.5) with (2.7) が得られることは、$t \gtrsim 2r$ と $t \leqq 2r$ に場合分けし、前者では $t+r \sim t-r \sim t$，後者では $r \sim t+r$ に注意すれば容易に分る。

さて、(2.11) に戻る。積分の順序を交換する。$t > r$ のときは、$0 \leqq \rho \leqq t$，$|\rho-r| \leqq \lambda \leqq \rho+r$ は $0 \leqq \lambda \leqq t+r$，$|\lambda-r| \leqq \rho \leqq \min\{t, \lambda+r\}$ と同値だから

$$\int_0^t d\rho \int_{|\rho-r|}^{\rho+r} d\lambda = \int_{t-r}^{t+r} d\lambda \int_{|\lambda-r|}^{t} d\rho + \int_0^{t-r} d\lambda \int_{|\lambda-r|}^{\lambda+r} d\rho$$

と分れる。$r \geq t$ のときは、$0 \leqq \rho \leqq t$，$|\rho - r| \leqq \lambda \leqq \rho + r$ は $r - t \leqq \lambda \leqq r + t$，$|\lambda - r| \leqq \rho \leqq t$ と同値だから

$$\int_0^t d\rho \int_{|\rho - r|}^{\rho + r} d\lambda = \int_{r-t}^{r+t} d\lambda \int_{|\lambda - r|}^{t} d\rho$$

となる。従って

$$(2.12)\quad I_1(r,t) = \frac{2}{\pi}\int_{|t-r|}^{t+r} \frac{d\lambda}{(1+\lambda)^k}\int_{|\lambda - r|}^{t} \frac{\rho\, h(\lambda,\rho,r)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}\, d\rho ,$$

$$(2.13)\quad I_2(r,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\max\{0,\, t-r\}} \frac{d\lambda}{(1+\lambda)^k}\int_{|\lambda - r|}^{\lambda + r} \frac{\rho\, h(\lambda,\rho,r)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}\, d\rho$$

とおくと

$$(2.14)\quad I(r,t) = I_1(r,t) + I_2(r,t)$$

が成りたつ。次に、

$$(2.15)\quad h(\lambda,\rho,r) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - (\lambda - r)^2}\sqrt{(\lambda + r)^2 - \rho^2}}$$

に注意して、$\rho$ − 積分に公式

$$(2.16)\quad \int_a^b \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{b^2 - \rho^2}}\, d\rho = \frac{\pi}{2}$$

を適用する。$I_1$ では $a = |\lambda - r|$，$b = t$ とおき

$$(\lambda + r)^2 - \rho^2 \geqq (\lambda + r)^2 - t^2 \geqq (r+t)(\lambda + r - t)$$

と余分な因子を処理すると（2.12），（2.16）より

$$(2.17)\quad I_1 \leqq \frac{1}{\sqrt{t+r}} \int_{|t-r|}^{t+r} \frac{1}{(1+\lambda)^{\kappa}\sqrt{\lambda+r-t}}\,d\lambda$$

が得られる。$I_2$ では

$$t^2-\rho^2 \geqq t^2-(\lambda+r)^2 \geqq (t+r)(t-\lambda-r)$$

と処理すると

$$(2.18)\quad I_2 \leqq \frac{1}{\sqrt{t+r}} \int_0^{\max\{0,t-r\}} \frac{1}{(1+\lambda)^{\kappa}\sqrt{t-r-\lambda}}\,d\lambda$$

が得られる。更に $(t+r)^{-1/2} \leqq \sqrt{2}\,(1+t+r)^{-1/2}$ for $t \geqq 1$ に注意すると

$$(2.19)\quad I_1 \leqq \begin{cases} C_1 \Phi_0(r,t) & \text{if } 0<\kappa\leqq 1/2, \\ C_1 (1+t+r)^{-1/2}(1+|t-r|)^{(1/2)-\kappa} & \text{if } \kappa>\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$(2.20)\quad I_2 \leqq \begin{cases} C_2 (1+t+r)^{-1/2}(1+|t-r|)^{(1/2)-\kappa} & \text{if } 0<\kappa<1, \\ C_2 \Phi_0(r,t) & \text{if } \kappa\geqq 1 \end{cases}$$

が得られる。これらの証明には次の補題を使う（後でも使う）。

<u>補題 2.3.</u> $a$ が実数ならば

$$\int_{|t-r|}^{t+r} \frac{d\lambda}{(1+\lambda)^{a}\sqrt{\lambda+r-t}} \leqq C \begin{cases} (1+t+r)^{(1/2)-a} & \text{if } a<\frac{1}{2}, \\ 1+\log\dfrac{1+t+r}{1+|t-r|} & \text{if } a=\frac{1}{2} \\ (1+|t-r|)^{(1/2)-a} & \text{if } a>\frac{1}{2} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで $C$ は $a$ にのみ依存する。

<u>補題 2.4.</u> $a$ が実数, $0 \leqq r < t$ ならば

$$\int_0^{t-r} \frac{d\lambda}{(1+\lambda)^a\sqrt{t-r-\lambda}} \leqq C\begin{cases} (1+t-r)^{(1/2)-a} & \text{if } a<1 \\ \dfrac{1+\log(1+t-r)}{\sqrt{1+t-r}} & \text{if } a=1 \\ (1+t-r)^{-1/2} & \text{if } a>1 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで $C$ は $a$ にのみ依存する。

前者の証明は、[7] の p.10、後者は [7] の Lemma 3.10 の証明をみられたい。さて、$0<K<1/2$ のとき (2.20) の右辺が $\Phi_0$ でおさえられることに注意すれば、(2.5) は、(2.8), (2.10), (2.14), (2.19) 及び (2.20) から直ちに従う。定理 2.1 の証明終。

<u>§3. Basic a priori estimate.</u> この§では、(1.17) をいかにして引き出すかを考える。場合分けを避けるために初期 data の decay rate が"小さい"とき、i.e. (2.4) における $K$ を

$$(3.1) \qquad 0 < K < \frac{1}{2} + \frac{1}{p} < 1$$

に限る。この場合は、ノルムを (1.16) で与えることができる。$u_0$ については、(2.5) より $\|u_0\| \leqq C_0\varepsilon$ が $^\forall T>0$ について成り立つ。

以下、$u(x,t)\in C^0(R^2\times[0,T))$ かつ $\|u\|<\infty$ を仮定する。このとき、

(3.2) $|L(|u|^p)(x,t)|\leqq C_1\|u\|^p\Phi_1(r,t)$,

(3.3) $\Phi_1(r,t)\leqq C_2\Phi_0(r,t)$

が得られれば $\tilde{C}=C_1C_2$ とおくと (1.17) が従う。ここで $\Phi_1(r,t)$ は (2.6) で $K$ を $pK-2$ におきかえたものである。但し、$0<pK\leqq 2$ のときは、$\Phi_1(r,t)=(1+t+r)^{2-pK}$ とおく。

以下、(3.2), (3.3) について考える。

<u>命題3.1.</u> (3.1) の下で (3.2) が成り立つ。ここで $C_1$ は $p, K$ にのみ依存する。

<u>Remark</u> (3.1) を $K>(1/2)+(1/p)$ におきかえた場合、ノルムをどのように変えても $L(|u|^p)$ の decay rate (3.2) は $\Phi_1$ で $K=(1/2)+(1/p)$ とおいたものより良くならない (c.f. §4 の Remark 2))。

<u>命題3.2.</u> $n=2$ のとき、定理1の仮定及び (3.1) の下で (3.3) が成り立つ。ここで $C_2$ は $p, K$ にのみ依存する。

<u>証明.</u> (1.13) により、(1.6) と (3.1) を同時にみたす $K$ が存在することに注意する。又、(1.6) は $pK-2\geqq K$ と同値だから、(2.6) と $\Phi_1$ の定義より (3.3) が従う。

さて、命題3.1 の証明であるが、$K\neq 1/2$ のときは、

[7] の Prop. 3.1 の証明を整理した形でのべる。$K=1/2$ のときは、更に次の補題も使う。

<u>補題 3.3.</u> ([12], Prop. 4.3). 自然数 $g$ と $x \geqq 0$ に対して

$$\int_0^x \left(1+\log\frac{1+x}{1+y}\right)^g dy = C_g x - \sum_{k=1}^{g}\sum_{\nu=1}^{k} \frac{g!}{k!}\binom{k}{\nu} \times (\log(1+x))^\nu$$

$$\leqq C_g x$$

が成り立つ。ここで $C_g = \sum_{k=0}^{g} g!/k!$。

<u>証明.</u> 左辺を $I_g(x)$ とおくと部分積分により

$$I_g(x) = \left[(1+y)\left(1+\log\frac{1+x}{1+y}\right)^g\right]_{y=0}^{y=x} + g I_{g-1}(x)$$

$$= (1+x) - (1+\log(1+x))^g + g I_{g-1}(x)$$

が従う。ここで $I_0(x) = x$。今

$$J_k(x) = I_k(x)/k!$$

とおくと

$$J_k(x) = (k!)^{-1}\{(1+x) - (1+\log(1+x))^k\} + J_{k-1}(x).$$

これを $k=1,\dots,g$ について加えればよい。

<u>命題 3.1 の証明の概略.</u> $t \geqq 1$ のときは定理 2.1 の証明中の (2.17), (2.18) で $K$ を $pK-2$ とおきかえた式を出せばよい。初めに $t$ が小さいとき

$$(3.4)\quad |L(|u|^p)(x,t)| \leqq C\|u\|^p(1+t+r)^{-pK}, \quad 0\leqq t\leqq 1$$

を示そう。(1.16)より $|u(x,t)|\leqq \|u\|\Phi_0(r,t)$ だから(1.15)の初めの表現より

$$|L(|u|^p)(x,t)| \leqq \frac{\|u\|^p}{2\pi}\int_0^t (t-\tau)d\tau\int_{|\xi|<1}\frac{\Phi_0(\lambda,\tau)^p}{\sqrt{1-|\xi|^2}}d\xi$$

が従う。ここで $\lambda=|x+(t-\tau)\xi|$ とおいた。又、$0<K<1$ に注意すると(2.6)より

$$\Phi_0(\lambda,\tau)\leqq C(1+t+r)^{-K} \quad \text{for } 0\leqq\tau\leqq t\leqq 1$$

が従う(∵ $r\geqq 1$ のとき $1+\lambda-\tau\geqq r$ かつ $r\leqq 1+\lambda+\tau\leqq 1+t+r$)。これらより(3.4)は直ちに従う。

以下、$t\geqq 1$ とする。このときは(1.15)の後の表現より

$$|L(|u|^p)(x,t)|\leqq \frac{\|u\|^p}{2\pi}\int_0^t\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{(t-\tau)^2-\rho^2}}\int_{|\omega|=1}\Phi_0(\lambda,\tau)^p dS_\omega$$

が従う。ここで $\lambda=|x+\rho\omega|$ とおいた。更に補題2.2を使うと、(2.10)と同様にして

$$(3.5)\quad |L(|u|^p)(x,t)|\leqq\|u\|^p I(r,t),$$

$$(3.6)\quad I(r,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^t d\tau\int_0^{t-\tau}\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{(t-\tau)^2-\rho^2}}\int_{|\rho-r|}^{\rho+r}\lambda\Phi_0(\lambda,\tau)^p\times$$

$$\times\, h(\lambda,\rho,r)\,d\lambda$$

が得られる。ここで $h(\lambda,\rho,r)$ は(2.15)で与えられる。又、(3.6)における $(\rho,\lambda)$ 積分の範囲は、(2.11)で

$t$を$t-\tau$におきかえたものと同じだから、(2.14)に分けたのと同じ論法で

(3.7) $\quad I(r,t) = I_1(r,t) + I_2(r,t)$

と分けることができる。ここで

$$I_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^t d\tau \int_{|t-\tau-r|}^{t-\tau+r} \lambda \Phi_0(\lambda,\tau)^p d\lambda \int_{|\lambda-r|}^{t-\tau} \frac{\rho\, h(\lambda,\rho,r)}{\sqrt{(t-\tau)^2-\rho^2}}\, d\rho,$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\max\{0,t-r\}} d\tau \int_0^{t-\tau-r} \lambda \Phi_0(\lambda,\tau)^p d\lambda \int_{|\lambda-r|}^{\lambda+r} \frac{\rho\, h(\lambda,\rho,r)}{\sqrt{(t-\tau)^2-\rho^2}}\, d\rho$$

である。更に$\rho$-積分に(2.16)を適用する。$I_1$では

$$\begin{aligned}(\lambda+r)^2-\rho^2 &\geq (\lambda+r)^2-(t-\tau)^2\\ &= (\lambda+r+t-\tau)(\lambda+r-t+\tau)\end{aligned}$$

と処理して

(3.8) $$I_1 \leq \int_0^t d\tau \int_{|t-\tau-r|}^{t-\tau+r} \frac{\lambda \Phi_0(\lambda,\tau)^p\, d\lambda}{\sqrt{\tau+\lambda+r-t}\,\sqrt{t+r-(\tau-\lambda)}}$$

が従う。$I_2$では

$$\begin{aligned}(t-\tau)^2-\rho^2 &\geq (t-\tau)^2-(\lambda+r)^2\\ &= (t-\tau+\lambda+r)(t-\tau-\lambda-r)\end{aligned}$$

として

(3.9) $$I_2 \leq \int_0^{\max\{0,t-r\}} d\tau \int_0^{t-\tau-r} \frac{\lambda \Phi_0(\lambda,\tau)^p\, d\lambda}{\sqrt{t-r-(\tau+\lambda)}\,\sqrt{t+r-(\tau-\lambda)}}$$

が得られる。更に、変数変換

(3.10) $\quad \alpha = \tau + \lambda \quad , \quad \beta = \tau - \lambda$

を施す。(2.6)により $\Phi_0(\lambda, \tau)$ は $\tau+\lambda$, $|\tau-\lambda|$ のみの関数だから

$$(3.11)\quad \Psi(\alpha,\beta) = \begin{cases} (1+\alpha)^{-\kappa} & \text{if } 0<\kappa<1/2, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\left(1+\log\dfrac{1+\alpha}{1+\beta}\right) & \text{if } \kappa = \dfrac{1}{2} \\ (1+\alpha)^{-1/2}(1+\beta)^{(1/2)-\kappa} & \text{if } \dfrac{1}{2}<\kappa<1 \end{cases}$$

とおくと $\Phi_0(\lambda,\tau) = \Psi(\alpha, |\beta|)$ となる。又、$|\beta| \leqq \alpha$, $\lambda \leqq \alpha$ に注意すると、(3.8), (3.9), (3.10) より

$$I_1 \leqq \frac{1}{2}\int_{|t-r|}^{t+r} \frac{\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\alpha+r-t}} \int_{-\alpha}^{t-r} \frac{\Psi(\alpha,|\beta|)^p}{\sqrt{t+r-\beta}}\, d\beta,$$

$$I_2 \leqq \frac{1}{2}\int_{0}^{\max\{0,\, t-r\}} \frac{\alpha\, d\alpha}{\sqrt{t-r-\alpha}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\Psi(\alpha,|\beta|)^p}{\sqrt{t+r-\beta}}\, d\beta$$

と評価されるが、$\beta$－積分はいずれも

$$2\int_0^{\alpha} \frac{\Psi(\alpha,\beta)^p}{\sqrt{t+r-\beta}}\, d\beta$$

でおさえられる。以上をまとめて、(3.5), (3.6), (3.7) より

<u>補題 3.4.</u>

(3.12) $\quad |L(|u|^p)(x,t)| \leqq \|u\|^p \left(I_1(r,t) + I_2(r,t)\right),$

$$(3.13)\quad I_1 \leqq \int_{|t-r|}^{t+r} \frac{\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\alpha+r-t}} \int_0^{\alpha} \frac{\Psi(\alpha,\beta)^p}{\sqrt{t+r-\beta}}\, d\beta ,$$

$$(3.14)\quad I_2 \leqq \int_0^{\max\{0,t-r\}} \frac{\alpha\, d\alpha}{\sqrt{t-r-\alpha}} \int_0^{\alpha} \frac{\Psi(\alpha,\beta)^p}{\sqrt{t+r-\beta}}\, d\beta$$

が成りたつ。ここで $\Psi$ は (3.11) で与えられる。

更に、(3.13), (3.14) から、(2.17), (2.18) で $K$ を $pK-2$ とおいた式を引き出すには次の補題を証明すればよい。

<u>補題 3.5.</u> (3.1) を仮定する。このとき $0 \leqq \alpha \leqq t+r$ に対して

$$(3.15)\quad J(\alpha) \equiv \int_0^{\alpha} \frac{\Psi(\alpha,\beta)^p}{\sqrt{t+r-\beta}}\, d\beta \leqq \frac{C}{\sqrt{t+r}\,(1+\alpha)^{pK-1}}$$

が成りたつ。ここで $C$ は $p, K$ にのみ依存する。

<u>証明の方針.</u> 初めに $K \neq 1/2$ とする。このときは、(3.11) により

$$\Psi(\alpha,\beta) = (1+\alpha)^{-\mu}(1+\beta)^{-\nu}$$

の形である。ここで $\mu+\nu=K$, かつ (3.1) より

$$(3.16)\quad p\nu < 1$$

が従う。

$$J(\alpha) = \int_0^{\alpha/2} d\beta + \int_{\alpha/2}^{\alpha} d\beta \equiv J_1(\alpha) + J_2(\alpha)$$

と分けると

$$J_1(\alpha) \leqq \frac{1}{(1+\alpha)^{p\mu}} \sqrt{\frac{2}{t+\nu}} \int_0^{\alpha} (1+\beta)^{-p\nu} d\beta$$

だから、(3.16)により(3.15)が$J_1$について成り立つ。

又、

$$J_2(\alpha) \leqq (1+\alpha)^{-p\mu}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^{-p\nu} \int_{\alpha/2}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{t+\nu-\beta}} d\beta$$

だから

$$(3.17) \quad \int_{\alpha/2}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{t+\nu-\beta}} d\beta \leqq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+\nu}} \alpha \quad \text{for } 0 \leqq \alpha \leqq t+\nu$$

より(3.15)が従う。$K=1/2$のときは

$$\Psi(\alpha,\beta) = (1+\alpha)^{-1/2}\left(1+\log\frac{1+\alpha}{1+\beta}\right)$$

かつ

$$\frac{1+\alpha}{1+\beta} \leqq 2 \quad \text{for } \beta \geqq \frac{\alpha}{2}$$

だから$J_1(\alpha)$に補題3.3を適用すると、上と同様にして(3.15)が$C=\sqrt{2}\,C_q + (1+\log 2)^p$として成り立つ。ここで$q$は$p \leqq q$をみたす最小の自然数である。

結び、$0 \leqq t \leqq 1$のとき(3.2)は(3.4)より従う。$t \geqq 1$のときは、補題3.4, 3.5より、(2.17), (2.18)で$K$を$pK-2$とおきかえた式が成り立つから、定理2.1の証明と同様にして(3.2)が得られる。命題3.1の証明終。

## §4. Remarks.

Remark 1. ((1.9)の証明について)。初めに、(1.7)又は(1.8)より(3.1)及び

(4.1) $\quad 0 < \kappa < 2/(p-1)$, i.e., $2 - p\kappa + \kappa > 0$

が従うことに注意する(c.f. (1.13))。又、(2.5)と(1.16)より $\|u_0\| \leqq C_0 \varepsilon$ が従うから、(1.9)は次の補題より従う。(c.f. §1の最後の部分)。

補題 4.1. $n = 2$ のとき、(1.7)又は(1.8)の下で

(4.2) $\quad |L(|u|^p)(x,t)|$

$$\leqq C\|u\|^p \Phi_0(r,t)(1+T)^{2-(p-1)\kappa}$$
$$\text{for } (x,t) \in R^2 \times [0,T)$$

が成り立つ。ここでノルムは(1.16)で与えられ、$C$ は $p$, $\kappa$ にのみ依存する。

証明の方針. (3.4)により $1 \leqq t < T$ と仮定してよい。初めに

(4.3) $\quad r \leqq 2t, \ t \geqq 1$

の場合を考える。補題3.4及び3.5は、(3.1)かつ(4.1)の下でも成り立つことに注意する。$\therefore$ $j = 1, 2$ に対して

(4.4)$_j$ $\quad I_j(r,t) \leqq C_j \Phi_0(r,t)(1+T)^{2-(p-1)\kappa}$
$$\text{for } (x,t) \in R^2 \times [1,T)$$

を示せば十分である。(3.13), (3.15)より

$$I_1 \leqq \frac{C}{\sqrt{t+r}} \int_{|t-r|}^{t+r} \frac{(1+\alpha)^{2-pk}}{\sqrt{\alpha+r-t}}\, d\alpha$$

であるが

$$(1+\alpha)^{2-pk} = (1+\alpha)^{2-pk+k}(1+\alpha)^{-k}$$

とみると、(4.1), (4.3) より

$$I_1 \leqq \frac{C}{\sqrt{t+r}} (1+3t)^{2-pk+k} \int_{|t-r|}^{t+r} \frac{d\alpha}{(1+\alpha)^k \sqrt{\alpha+r-t}}$$

が従う。更に補題 2.3 を使うと $(4.4)_1$ が得られる。

$I_2$ についても同様である。次に

(4.5) $\qquad r \geqq 2t \geqq 2$

の場合を考える。(1.15), (1.16) より

$$|L(|u|^p)(x,t)| \leqq \frac{\|u\|^p}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{(t-\tau)^2-\rho^2}} \int_{|\omega|=1} \Phi_0(\lambda,\tau)^p dS_\omega$$

が従う。ここで $\lambda = |x+\rho\omega|$ とおいた。又、

$$r-t+\tau \leqq \lambda \leqq r+t-\tau$$

に注意すると、(2.6), (4.5) より

$$\Phi_0(\lambda,\tau) \leqq (1+\log 3)\left(1+\frac{r}{2}\right)^{-k} \quad \text{for } 0<k<1$$

が従う。∴

$$|L(|u|^p)(x,t)| \leqq (1+\log 3)^p \|u\|^p\, t^2 \left(1+\frac{r}{2}\right)^{-pk}$$

かつ (4.5) により

$$(1+r)^{-pk} \leqq C(1+t+r)^{-k}(1+t)^{k-pk}$$

だから (4.2) が従う。

<u>Remark 2.</u> (2.4) における $k$ が"大きい"場合については殆んど触れなかつたが、$k > \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ のときは、(3.2) における $L(|u|^p)$ の decay rate が $k$ に応じて良くなることは期待できない。煩雑さを避けるために

$$(4.6) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{p} < k < 1$$

を仮定する。このとき、(2.6) で $k - \frac{1}{2} > p^{-1}$ となることに注意する。今

$$(4.7) \quad \frac{1}{p} < \nu \leqq k - \frac{1}{2}$$

なる $\nu$ を1つ固定して (1.16) を

$$(4.8) \quad \|u\|_\nu = \sup |u(x,t)| / \Phi_\nu(r,t)$$

におきかえる。ここで sup は $(x,t) \in R^2 \times [0,T)$ でとり、

$$\Phi_\nu(r,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t+r}\,(1+|t-r|)^\nu}$$

である。このとき、命題 3.1 は次のように変る (c.f. [7] の Prop. 3.2 及び Remark 3.4)。

<u>命題 4.2.</u> (4.6) を仮定する。このとき

$$(4.9) \quad |L(|u|^p)(x,t)| \leqq C_2 \|u\|_\nu^p \Phi_2(r,t) \quad \text{for } (x,t) \in R^2 \times [0,T)$$

が成り立つ。ここで $\Phi_2$ は $\Phi_1$ で $k = 2^{-1} + p^{-1}$ とおいたもの, i.e., (2.6) で $k = (p-2)/2$ とおいたも

のである。又、$C_2$ は $p, \nu$ にのみ依存する。

注意、$\nu = \min\{K-(1/2), (p-3)/2\}$ とおくと $p > p_0(2)$ の下で (4.7) 及び $\Phi_2 \leqq C\Phi_\nu$ が成り立つことに注意する。Glassey [4] は、$f, g$ の台がコンパクト (従って (1.2) で $K>1$) のとき、(4.8) の $\Phi_\nu$ を $\Phi_2$ でおきかえたノルムで (4.9) が成り立つことを $p > p_0(2)$ の下で示した。

命題4.2の証明の方針. 命題3.1と異る点のみをのべる。補題3.4までは同じである。但し、(3.4) の $pK$ を $(p/2)+p\nu$ におきかえ、(3.11) を

$$\Psi(\alpha, \beta) = (1+\alpha)^{-1/2}(1+\beta)^{-\nu}$$

とおきかえる。又、(3.16) は $p\nu > 1$ に変るから (3.15) は

$$J(\alpha) \leqq \frac{C}{\sqrt{t+r}}(1+\alpha)^{-p/2}$$

と変る。他は前と同じである。

Remark 3. 今まで $n=3$ の場合については殆んど触れなかったが、$n=2$ の場合と異る点のみを簡単にのべる。§2では (2.3) が

$$(2.3)' \quad M(f)(x,t) = \frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1} f(x+t\omega)\,dS_\omega$$

と成る。又、補題 2.2 を使った部分は

$$\int_{|\omega|=1} \frac{1}{(1+|x+t\omega|)^{1+\kappa}}\, dS_\omega = \frac{2\pi}{rt}\int_{|t-r|}^{t+r} \frac{\lambda}{(1+\lambda)^{1+\kappa}}\, d\lambda$$

となる。従って (2.11) は

$$(2.11)' \quad I(r,t) = \frac{1}{2r}\int_{|t-r|}^{t+r} \frac{1}{(1+\lambda)^{\kappa}}\, d\lambda$$

と成る。これより (2.5) における $\Phi_0$ が (2.7) で与えられることが容易に分る ( c.f. (2.11) の下の Remark )。

§3では (3.1) を

$$(3.1)' \quad 0 < \kappa < 1 + \frac{1}{p}$$

とおきかえる。この理由は (2.6) と (2.7) の差による。i.e. ① $\kappa-(1/2) < 1/p$ $(n=2)$ が $\kappa-1 < 1/p$ $(n=3)$ に変り, ② $n=2$ のときの制限 $\kappa<1$ が $n=3$ では不要になる, ことの2点である。又、(3.2) における $\Phi_1$ は (2.7) で $\kappa$ を $p\kappa-2$ とおきかえたものになる。

理由は、(1.15) が

$$(1.15)' \quad L(u)(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t (t-\tau)\,d\tau \int_{|\omega|=1} u(x+(t-\tau)\omega,\tau)\, dS_\omega$$

と成るために、(3.6) が

$$(3.6)' \quad I(r,t) = \frac{1}{2r}\int_0^t d\tau \int_{|t-\tau-r|}^{t-\tau+r} \lambda\, \Phi_0(\lambda,\tau)^p\, d\lambda$$

と変る。積分領域が (3.8) と同じであることに注意すると

(3.13) に似た式

$$(3.13)' \quad I \leqq \frac{1}{2r}\int_{|t-r|}^{t+r} \alpha\, d\alpha \int_0^{\alpha} \Psi(\alpha,\beta)^p\, d\beta$$

が得られる。ここで $\Psi(\alpha,\beta)$ は (2.7) で $t+r$, $|t-r|$ をそれぞれ $\alpha, \beta$ におきかえたものである。

ここで、(3.1)' 及び補題 3.3 を使うと

$$I(r,t) \leqq \frac{C}{2r}\int_{|t-r|}^{t+r} \frac{1}{(1+\alpha)^{pk-2}}\, d\alpha$$

が得られる。これは (2.11)' で $k$ を $pk-2$ とおきかえたものである。

§4 の Remark 1 では

$$(1.7)' \quad p > p_0(3), \quad 0 < k < \frac{2}{p-1}$$

又は

$$(1.8)' \quad 1 < p \leqq p_0(3) \text{ かつ } 0 < k < 1+\frac{1}{p}$$

の下で (3.1)' と (4.1) が成り立つから (4.2) も前と同様にして得られる。Remark 2 では (4.6), (4.7) を

$$(4.6)' \quad k > 1+\frac{1}{p}, \quad (4.7)' \quad \frac{1}{p} < \nu \leqq k-1,$$

に、又、(4.8) で $\Phi_\nu$ を

$$\Phi_\nu(r,t) = (1+t+r)^{-1}(1+|t-r|)^{-\nu}$$

とおきかえると (4.9) が得られる。ここで $\Phi_2$ は $\Phi_1$ で

$K = 1 + p^{-1}$, i.e. (2.7) で $K = p-1$ とおいたものである。終。

## 参考文献

[1] Agemi R. and Takamura H., The lifespan of classical solutions to nonlinear wave equations in two space dimensions, Hokkaido Univ. Preprint Series in Math. #118 (1991).

[2] Asakura F., Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with slowly decreasing initial data in three space dimensions, Comm. in P.D.E., 11(13), 1459-1487 (1986).

[3] Glassey R.T., Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations, Math. Z., 177, 323-340 (1981).

[4] Glassey R. T., Existence in the large for $\square u = F(u)$ in two space dimensions, Math. Z., 178, 233-261 (1981).

[5] John F., Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions, Manuscripta Math., 28, 235-268 (1979).

[6] John F., Nonlinear wave equations, Formation of singularities, Pitcher Lectures in the mathematical sciences, Lehigh Univ., University Lecture Series, A.M.S. Providence (1990).

[7] Kubota K., Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with initial data of non-compact support in low space dimensions, Hokkaido Univ. Preprint Series in Math. #129 (1991).

[8] Lindblad H., Blow-up for solutions of $\square u = |u|^p$ with small initial data, Comm. in P.D.E. 15(6), 757-821 (1990).

[9] Schaeffer J., The equation $u_{tt} - \Delta u = |u|^p$ for the critical value of p, Proc. of Royal Soci. of Edinburgh, 101 A, 31-44 (1985).

[10] Sideris T.C., Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions, J. Diff. Equations 52, 378-406 (1984).

[11] Tsutaya K., Global existence theorem for semilinear wave equations with noncompact data in two space dimensions, to appear in J. Diff. Eq.

[12] Tsutaya K., Global existence and the life span of solutions of semilinear wave equations with data of non compact support in three space dimensions, Preprint (1991).

[13] Tsutaya K., A global existence theorem for semilinear wave equations with data of non compact support in two space dimensions, to appear in Comm. in P.D.E.

[14] Zhou Yi, Life span of classical solutions to $\Box u = |u|^p$ in two space dimensions, Preprint (Fudan Univ. 1990).