数理解析研究所講究録
第 795 巻 1992 年 63-67

ある微分作用素の準楕円性と徹準楕円性について

阪大理　森岡達史　(Tatsushi Morioka)

§0. 序

Pをなめらかな係数を持つ$\mathbb{R}^n$上の微分作用素とする。Pが準楕円型(Hypoelliptic)であるとは、

$$\operatorname{sing\,supp} u = \operatorname{sing\,supp} Pu \quad \text{for} \quad u \in \mathcal{D}'$$

が成り立つことをいう。また，Pが徹準楕円型(Microhypoelliptic)であるとは，

$$WF\,u = WF(Pu) \quad \text{for} \quad u \in \mathcal{D}'$$

が成り立つことをいう。$\pi : T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$を自然な射影とすると、$\operatorname{sing\,supp} u = \pi(WF\,u)$だから，徹準楕円型作用素は必ず準楕円型になる。しかし，逆は必ずしも成り立たない。次の微分作用素を考えよう。

$$L = D_x^{2\ell} + x^{2k} D_y^{2m} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2$$

ここで$D_x = -i\partial_x$，k, ℓ, mは正の整数である。谷口[6]は、Lは準楕円型になることを示した。Parenti - Rodino[5]は$k \geqq m-\ell$のとき、かつそのときに限ってLは徹準楕円型に

なることを示した。彼らの結果より、$k<m-\ell$ のとき、L は準楕円型であって厳準楕円型でない。本文では、次の微分作用素

$$L = D_x^{2\ell} + g(x) D_y^{2m} \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

$$g(x) \in C^\infty, \quad g(0)=0, \quad g(x)>0 \ \text{ for } x \neq 0$$

の準楕円性と厳準楕円性について考える。$g(x)$ が無限次で消える場合も含めた結果を報告する。

§1. 結果

論理は同じなので、次元を一般にして結果を述べる。L を次の微分作用素とする。

(1.1) $\quad L = a(x, y, D_x) + g(x) b(x, y, D_y)$

$$\text{in } \mathbb{R}^n = \mathbb{R}_x^{n_1} \times \mathbb{R}_y^{n_2}, \quad n_1 \geqq 1, \quad n_2 \geqq 1.$$

(A.1) $\quad a(x, y, D_x)$ は 2ℓ 次の微分作用素で、ある定数 $C>0$ が存在して、

$$\mathrm{Re}\, a(x, y, \xi) \geqq C|\xi|^{2\ell}, \qquad |\xi| : 十分大$$

が成り立つ。

(A.2) $\quad b(x, y, D_y)$ は $2m$ 次の微分作用素で、ある定数 $C>0$ が存在して、

$$\mathrm{Re}\, b(x, y, \eta) \geqq C|\eta|^{2m} \qquad |\eta| : 十分大$$

が成り立つ。

(A.3) $\quad g(0)=0,\quad g(x)>0\ \text{for}\ x\neq 0$

注. $a(x,y,D_x)=D_x^{2\ell}$, $b(x,y,D_y)=D_y^{2m}$ とすると，
a, b は (A.1), (A.2) をみたす。

定理1. (A.1)−(A.3) のもとで、L は準楕円型になる。

森本[1]は (A.1)−(A.3) とさらに次の条件(G)を仮定してLの準楕円性を証明した。

(G) ある正の定数 C と τ : $0<\tau<(2\ell m+2m-2\ell)^{-1}$ が存在して、任意の α に対して

$$|D^\alpha g(x)|\leqq C\, g(x)^{1-\tau|\alpha|}$$

が $x=0$ の近傍で成り立つ。▨

定理1は (G) を仮定していないので，森本[1]の改良になっている。L の厳準楕円性については次のことが言える。

定理2. L は (A.1)−(A.3) をみたすとする。

(i) $\ell\geqq m$ のとき、L は厳準楕円型である。

(ii) $\ell<m$ のとき

$z_0=(x^0,y^0;\xi^0,\eta^0)\in T^*\mathbb{R}^n$ $(x^0,\xi^0\in\mathbb{R}^{n_1},\ y^0,\eta^0\in\mathbb{R}^{n_2})$, $|\eta^0|\neq 0$ とする。次の条件 (A.4) を仮定する。

(A.4) ある正の定数 C とある τ : $0<\tau<(2m-2\ell)^{-1}$ が存在して、任意の α : $|\alpha|\leqq 2m-2\ell$ に対して

$$|D^\alpha g(x)|\leqq C\, g(x)^{1-\tau|\alpha|}$$

が $x=0$ の近傍で成り立つ。▨

このとき、$u\in\mathcal{D}'$, $z_0\notin WF(Lu)$ ならば、$z_0\notin WF\,u$ が成り立つ。▨

(A.4) は (G) よりも弱い条件になっている。$n_1=1$, $g(x)=x^{2k}$ のとき、(A.4) は $k\geqq m-\ell$ と同値である。したがって (A.4) は、

$$L=D_x^{2\ell}+x^{2k}D_y^{2m}\quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

が準楕円型になるための必要十分条件になっている。(§0 を参照。) $g(x)$ が無限次で消える場合も条件 (A.4) は一般には除けない。その例として、森本－森岡[2]は次の微分作用素を考察した。

$$\begin{cases} L_k=D_x^{2\ell}+g_k(x)\,D_y^{2m} \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \\ g_k(x)=e^{-1/|x|}\sin^{2k}(\pi/|x|)+e^{-1/|x|^2} \\ k=1,2,3\ \cdots\cdots \end{cases}$$

$m\geqq \ell+2$, $k\leqq m-\ell-1$ のとき、$z_0=(0,0;0,1)\in T^*\mathbb{R}^2$ に対してある $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ が存在し、$z_0\notin WF(L_k u)$ かつ $z_0\in WF\,u$ が成り立つ。しかし、定理1より L_k は任意の k に対して準楕円型である。

文献表

[1] Y. Morimoto, J. Math. Soc. Japan 30 (1978), 327 - 358

[2] Y. Morimoto - T. Morioka, to appear in Publ. RIMS. Kyoto Univ.

[3] T. Morioka, Osaka J. Math 28 (1991), 563 - 578

[4] T. Morioka, to appear in Publ. RIMS. Kyoto Univ.

[5] C. Parenti - L. Rodino, Boll. Un. Mat. 17 - B (1980), 390 - 409

[6] K. Taniguchi, Osaka J. Math 11 (1974), 221 - 238