数理解析研究所講究録
第7[illegible]巻 1992年 68-88


# 半線形実主要型方程式系に対する polarization set の伝播

京大 理 土居 伸一 (Shin-ichi Doi)

## §0 序

N. Dencker [D] は、ベクトル値超関数 (distribution) に対して polarization set (略して pol. set) を定義した。それは波面集合の精密化で、最も特異性の高い成分を表している。そして擬微分作用素 (略して PsDOp) の系に対し、実主要型 (real principal type) という概念を定義し、その方程式系の解の pol. set の伝播 (特異性の伝播の精密化) を示した。同様に $H^s$ の意味での pol. set も定義でき、対応した結果が成り立つ ([G])。

一方 非線形偏微分方程式の解の特異性の伝播や相互作用についての研究が1970年代後り頃から盛んに行われている ([Be] の参考文献を参照せよ)。

本稿の目標は、非線形偏微分方程式系の解の pol. set を調べること、特に半線形実主要型の場合にその伝播を示すこと

である。その際、滑らかでない表象をもつ作用素を取り扱う必要があるため、元の pol. set の定義のままでは不備であるように思える。そこでこの報告では新しい pol. set を導入することを試みた。これは元の pol. set に含まれ、同様の基本的性質をみたしている。そしてこの新しい pol. set について前に述べた目標を実行した。

§1 新しい polarization set の導入

まず準備からはじめる。$z_0=(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^d\times(\mathbb{R}^d\setminus 0)$, $r>0$ に対して次のようにおく：

$$M(z_0,r)=\{a\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d});\ a(z)=1\ (z=z_0 \text{ の近傍で}),\ \operatorname{supp} a\subset\{z;\ |z-z_0|<r\},\ 0\le a\le 1\},$$

$$M(z_0)=\bigcup_{r>0} M(z_0,r)\ 。$$

$a,b\in M(z_0)$ に対し、$a\ll b \iff \operatorname{supp} a$ の近傍で $b=1$ と定める。$\{a_n(x,D)\}_{n=1}^\infty$ は micro localizer と呼ばれる（ただし $a_n(x,\xi)=a(x,\frac{\xi}{n})$, $n\in\mathbb{N}$）。micro localizer に関して詳しくは [M1, 2], [T] を参照せよ。

ここで $H^s$ の意味での波面集合 $WF^s$ の特徴付を掲げておく。

<u>補題1.1</u>（cf [T]） $u\in H^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ に対し次は同値である。

(1) $z_0\notin WF^s(u)$ 又は $u\in H^s_{z}$

(2) $^\exists a\in M(z_0)$ s.t. $\{\|a_n(x,D)\|\}_{n=1}^\infty\in h^s$

(3) $\exists r>0\ \forall a\in M(z_0,r)\quad \{\|a_n(x,D)u\|\}_{n=1}^{\infty}\in h^s$。

ただし $h^s=\{\{e_n\}_{n=1}^{\infty};\ e_n\in\mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s-1}e_n^2<\infty\}$ $s\in\mathbb{R}$,

$h^{\infty}=\bigcap_{s\in\mathbb{R}} h^s$, $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ である。

$X$を$\mathbb{R}^d$の開集合とする。$\mathcal{D}'(X,\mathbb{C}^N)$を$X$上の$\mathbb{C}^N$値超関数全体とする。$\mathbb{C}^N$の標準基底により $u\in\mathcal{D}'(X,\mathbb{C}^N)\Leftrightarrow u=(u_j)_{j=1}^N$, $u_j\in\mathcal{D}'(X)$ とみなせる。$\mathcal{E}'(X,\mathbb{C}^N)$, $H^s_{loc}(X,\mathbb{C}^N)$ etc も同様に定める。

さて $z_0=(x_0,\xi_0)\in X\times(\mathbb{R}^d\setminus 0)$, $s\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $h\in(\mathbb{C}^N)'$ とする。このとき $u\in\mathcal{E}'(X,\mathbb{C}^N)$ が $h$ 成分に関して $z_0$ で micro-local に $H^s$ の滑らかさをもつということを定義したい。これについて三つの案が思い浮かぶ。

(1) $h\cdot u=\sum_{j=1}^N h_j u_j\in H^s_{z}$。

(2) 0階 classical PsDOp の $1\times N$ 系 $P$ があり、$Pu\in H^s_{z}$ でかつ $P_0(z_0)=h$ (ただし $P_0$ は $P$ の主表象)。

(3) $\|a_n(x,D)h\cdot u\|\ll\|a_n(x,D)u\|+e_n$ $(n\in\mathbb{N})$, ただし $a\in M(z_0,r)$, $r>0$ 十分小, $\{e_n\}\in h^s$。

この内 (1) は $\mathbb{C}^N\to X$ の $C^\infty$ 級の基底のとりかえにより不変でない。(2) は Dencker の採用したものである。ここでは(3) を明確化する形で $u\in H^s(z_0,h)$ という概念を定義する。

**定義1.2** $u\in\mathcal{E}'(X,\mathbb{C}^N)$ に対し、$u\in H^s(z_0,h)$ とは、任意の $\varepsilon>0$ に対し、$r>0$ が存在し、次の条件をみたすことと定める：$a\subset\subset b$ なる任意の $a,b\in M(z_0,r)$ に対し、$a,b,\varepsilon,r$ にはよるが、$n\in\mathbb{N}$ にはよらない $C>0$, $\{e_n\}_1^\infty\in h^s$ がとれて、

$$\|a_n(x,D)h\cdot u\|\leq\varepsilon\|a_n(x,D)u\|+Cn^{-1}\|b_n(x,D)u\|$$
$$+e_n\quad(n\in\mathbb{N})$$

が成立する。

**定義1.2′** $u\in\mathcal{D}'(X,\mathbb{C}^N)$ に対し $u\in H^s(z_0,h)$ とは、ある $\varphi\in C_0^\infty(X)$, $\varphi=1$ ($x=x_0$ の近傍で) があって $\varphi u\in H^s(z_0,h)$ となることと定める。(もちろん $\varphi$ のとり方によらない。) さらに次のようにおく：

$$H^s(u)=\{(z,h)\in X\times(\mathbb{R}^d\setminus 0)\times(\mathbb{C}^N)';\ u\in H^s(z,h)\},$$
$$H^s(u,z)=\{h\in\mathbb{C}^N;\ u\in H^s(z,h)\}。$$

**定義1.3** ($H^s$ energy polarization set, $E^s(u)$)。
$u\in\mathcal{D}'(X,\mathbb{C}^N)$ の $H^s$ energy pol. set $E^s(u)$ を次のように定義する：

$$E^s(u)=\{(z,w)\in X\times(\mathbb{R}^d\setminus 0)\times\mathbb{C}^N;\ h\cdot w=0,\ \forall h\in H^s(u)\}。$$

ここで $h\cdot w$ は $(\mathbb{C}^N)'\times\mathbb{C}^N$ 上の双線形形式である。又 $E^s(u,z)$ を $E^s(u)$ の $z\in X\times(\mathbb{R}^d\setminus 0)$ 上の fiber とする。

**注意1.4** $E^s(u)$ は $\xi$ について conic, $w$ について linear

である。特に $E^s(u,z)$ は $\mathbb{C}^N$ の部分空間である。$E^s(u)$ は一般に $X\times(\mathbb{R}^n\setminus 0)\times\mathbb{C}^N$ で閉じていないが、若干の定義の修正により閉にできる（しかし繁雑なのでここでは略する）。

注意1.5　$M$ を可算基をもつ $C^\infty$ 級多様体，$E$ をその上の $C^\infty$ 級ベクトル束（$\mathbb{C}$ 上の），$E'$ を $E$ の双対ベクトル束，$\Omega$ を $M$ 上の $C^\infty$ 級 density 束とし、$\mathcal{D}'(M,E)=C_0^\infty(M,E'\otimes\Omega)'$ とおく。すると $u\in\mathcal{D}'(M,E)$ に対し $E^s(u)$ と $H^s(u)$ が順に誘導束 $\pi^*E$ と $\pi^*E'$ の部分集合として定義できる。ただし $\pi: T^*M\setminus 0\to M$ は自然な射影である。

比較のため Dencker [D] $(s=\infty)$, Gérard [G] $(s\in\mathbb{R})$ による $H^s$ pol. set, $WF^s_{pol}$ の定義を引用しておく。

定義1.6　$u\in\mathcal{D}'(X,\mathbb{C}^N)$ の $H^s$ pol. set $WF^s_{pol}(u)$ を次で定める：

$$WF^s_{pol}(u)=\bigcap_{A:\,Au\in H^s} N_A$$

$$N_A=\{(z,w)\in(T^*X\setminus 0)\times\mathbb{C}^N\ ;\ w\in \operatorname{Ker} A_0(z)\}\ 。$$

ただし $A$ は0階 classical PsDOp の $1\times N$ 系で、$A_0$ はその主表象である。

命題1.7　$E^s(u)\subset WF^s_{pol}(u)$, $u\in\mathcal{D}'(X,\mathbb{C}^N)$ 。

証明は略す。次に具体例をあげる。

<u>例 1.8</u> $u=(u_1,u_2)=(f(D)\delta\ ,\ \delta\ )\in H_{loc}^{-\frac{d}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^2)$ $\forall\varepsilon>0$
$f(\xi)=\log(2+|\xi|^2)$, $\delta$ : Dirac の delta 関数 とすると.
$s\geq-\frac{d}{2}$ のとき.

$$\begin{cases} E^s(u)=\{(0,\xi,(w_1,0));\ \xi\in\mathbb{R}^d\setminus 0,\ w_1\in\mathbb{C}\}\cup 0, \\ WF^s_{pol}(u)=\{(0,\xi,w);\ \xi\in\mathbb{R}^d\setminus 0,\ w\in\mathbb{C}^2\}\cup 0 。\end{cases}$$

ただし $0=(T^*\mathbb{R}^2\setminus 0)\times\{0\}^2$ と略している。

<u>例 1.9</u> $u=(u_1,u_2)=((x_{1+})^a(x_{2+})^b,(x_{1+})^a)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}^2)$,
$\in H_{z_0}^{a+\frac{1}{2}-\varepsilon}$ $(\forall\varepsilon>0)$, $0<a,b$, $z_0=((0,0),(\pm1,0))$ とすると

$$\begin{cases} E^s(u,z_0)=\mathbb{C}\times\{0\} & (a+\frac{1}{2}\leq s<a+b+\frac{1}{2}) \\ WF^s_{pol}(u,z_0)=\mathbb{C}^2 & (s\geq a+\frac{1}{2}) \end{cases}$$ 。

ただし $t_+=\max\{t,0\}$。

$E^s(u)$は $WF^s_{pol}(u)$ と同様の基本的性質をみたしている。

<u>命題1.10</u> $\pi(E^s(u)\setminus 0)=WF^s(u)$ $(u\in\mathcal{D}'(X,\mathbb{C}^N))$。
ただし $\pi:(T^*X\setminus 0)\times\mathbb{C}^N\to T^*X\setminus 0$ は射影である。

<u>命題1.11</u> $P$を$m$階 classical PsDOp の$M\times N$系とし, $P_m$をその主表象とする。このとき $u\in\mathcal{D}'(X,\mathbb{C}^N)$ に対し.

$$P_m(z)E^s(u,z)\subset E^{s-m}(Pu,z)\qquad z\in T^*X\setminus 0$$

が成立し. 特に$M=N$で$P$が$z$で elliptic ならば上式で等号が成り立つ。($P$は properly supported と暗黙の内に仮定されている。)

証明は余力があれば§3で行う。

## §2 主結果

Xを$\mathbb{R}^d$の開集合とし、X上の一般の非線形偏微分作用素系

(2.1) $P[u] = F(x, \partial^\alpha u(x))_{|\alpha|\le m}$

を考える。ただし $u=(u_1,\cdots,u_N)$ で $F(x,u_\alpha)_{|\alpha|\le m} = (F_j)_{1\le j\le M}$ は $\{(x,u_\alpha)_{|\alpha|\le m};\ x\in X,\ u_\alpha=(u_{1,\alpha},\cdots,u_{N,\alpha})\in\mathbb{R}^N\}$ から $\mathbb{C}^M$ への $C^\infty$ map である。Pが半線形のときは、

(2.2) $P[u] = P_m(x,D)u + G(x,\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le m-1}$

という形をとる。ここで $P_m(x,D)u$ は線形の最高階の部分で $G(x,\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le m-1}$ は残りである。

<u>定理2.1</u>　$u\in \tilde{C}^{m+\rho}\cap H^s_{loc}(X,\mathbb{R}^N)$, $\rho>0$, $s\le s_1\le s+\rho$, (2.1)を仮定する。このとき

(2.3) $P_m(z)E^{s_1}(u,z)\subset E^{s_1-m}(P[u],z)$, $z\in T^*X\setminus 0$

ただし

$$P_m(x,\xi) = \sum_{|\beta|=m}\left(\frac{\partial F_j}{\partial u_{k,\beta}}(x,\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le m}\right)_{\substack{\downarrow j=1,\cdots,m \\ \rightarrow k=1,\cdots,m}} (i\xi)^\beta 。$$

特に $z\notin WF^{s_1-m}(P[u])$ ならば、次がなりたつ：

(2.4) $E^{s_1}(u,z)\subset \ker P_m(z)$

また $M=N$ で $P_m(z)$ が可逆ならば(2.3)で等号がなりたつ。

定理2.1′ $u\in\tilde{C}^{m-1+\rho}\cap H^s_{loc}(X,\mathbb{R}^N)$, $\rho>0$, $s\leqq s_1\leqq s+\rho+1$, (2.2)を仮定すると定理2.1に対応した主張が成立する。

注意 $\tilde{C}^r$ は $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ のとき $W^{\infty,r}_{loc}$ を、$r>0$, $r\notin\mathbb{N}$ のとき $C^{[r]}$ 級でかつ $[r]$ 回導関数が皆 $r-[r]$ 次 Hölder 連続であることを表わす。又 $u\in H^s_{loc}(X,\mathbb{R}^N)\iff{}^\forall j$ $u_j\in H^s_{loc}(X)$ かつ $u_j$ は実数値である。

約束 以後 $M=N$, (2.2)を仮定して話を進める。

ここで[D]より2つの定義を必要な形で引用しておく。

定義2.2 $P$ が $(x_0,\xi_0)\in T^*X\setminus 0$ で実主要型であるとは、$N\times N$ の $(1-m)$ 次正斉次($C^\infty$)表象 $\tilde{P}_{1-m}(x,\xi)$ が存在して

$$\tilde{P}_{1-m}(x,\xi)\,P_m(x,\xi)=q_1(x,\xi)\,I_N\quad\left((x_0,\xi_0)\text{の近傍で}\right)$$

が成りたつことを言う。ただし $q_1(x,\xi)$ は実主要型のスカラー表象である。つまり $q_1(x,\xi)$ は実数値で、$q_1=0$ ならば $dq_1$ と $\xi dx$ とは一次独立である。このとき

$$R_P=\{z\in T^*X\setminus 0\,;\ \det P_m(z)=0\text{ かつ }P\text{ は }z\text{ で実主要型である}\}$$

は超曲面であり、$T_z\gamma=(T_zR_P)^\sigma=\langle H_{q_1}(z)\rangle$ $(z\in\gamma)$ なる曲線 $\gamma\subset R_P$ を $P$ の陪特性曲線とよぶことにする。($V^\sigma$ は $\sigma=d\xi\wedge dx$ に対する $V$ の直交空間を示し、$H_{q_1}=\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial q_1}{\partial\xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial q_1}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)$ は $q_1$ に対する Hamilton vector 場である。)

定義 2.3 $\gamma$ を $P$ の陪特性曲線, $L$ を $\gamma\times\mathbb{C}^N$ の $C^1$ 級複素直線部分束(底空間 $\gamma$), $u\in C^{m+1}(X,\mathbb{R}^N)$ とする。$L$ が $(P,u)$ の($\gamma$ 上の) Hamilton orbit であるとは, $L\subset N_P=\{(z,w)\in(T^*X\setminus 0)\times\mathbb{C}^N;\ w\in\ker P_m(z)\}$ であり $L$ が局所的に次の解 $w\in C^1(\gamma_0,\mathbb{C}^N)$ ($\gamma_0\subset\gamma$) ではられることと定める:

$$(2.5)\quad \left(H_{q_1}+\frac{1}{2}\{\widetilde{P}_{1-m},P_m\}+i\,\widetilde{P}_{m-1}P^{s}_{m-1}\right)w=0\quad(\gamma_0\text{上})。$$

ただし $q_1$, $\widetilde{P}_{1-m}$ は定義 2.2 のもので

$$\{\widetilde{P}_{1-m},P_m\}=\sum_{j=1}^{d}\left(\partial_{\xi_j}\widetilde{P}_{1-m}\,\partial_{x_j}P_m-\partial_{x_j}\widetilde{P}_{1-m}\,\partial_{\xi_j}P_m\right)$$

$$P^{s}_{m-1}=P_{m-1}-(2i)^{-1}\sum_{j=1}^{d}\partial_{x_j}\partial_{\xi_j}P_m$$

$$P_{m-1}(x,\xi)=\sum_{|\beta|=m-1}\left(\frac{\partial G_j}{\partial u_{k,\beta}}\left(x,\partial^{\alpha}u(x)\right)_{|\alpha|\le m-1}\right)_{1\le j,k\le N}(i\xi)^{\beta}$$

である。

注意 $\gamma_0=\{z(t):|t|<\varepsilon\}$, $\dot{z}(t)=H_{q_1}(z(t))$ とすると. (2.5) は $w(z(t))$ に対する常微分方程式系になる.

定理 2.4 $u\in\widetilde{C}^{m+1+\rho}\cap H^{s}_{loc}(X,\mathbb{R}^N)$, $\rho>0$, $s\le s_1\le s+\rho$ を仮定する。$L$ を $(P,u)$ の $\gamma$ 上の Hamilton orbit とする。$\gamma\cap WF^{s_1+1-m}(P[u])=\phi$ ならば.

$$E^{s_1}(u)\cap L=\gamma\times\{0\}\ \text{または}\ L。$$

言いかえると，$(P,u)$ の $\gamma$ 上の Hamilton orbit $L_1,\cdots,L_k$ があって次式がなりたつ：

$$E^{s_1}(u)|_\gamma = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k \quad (\text{直和})。$$

注意　以上の定理の中の $s, s_1$ の範囲は，(2.1)，(2.2) の形に対応するスカラーの場合（[Bo]，[Me]）のものを含んでいる。（ただし $p \in N$ は除く。）

注意　$P$ が線形ならば，$u \in \mathcal{D}'(X, \mathbb{C}^N)$，$s_1 \in \mathbb{R}$ でこれまでの定理の主張が成りたつ。これは $WF^s_{pol}$ に対する Dencker, Gérard の結果に対応している（[D]，[G]）。

最後に例をあげる。これは $WF^s_{pol}$ が非線形問題では $E^s$ に比べて不安定なことを示している。

例 2.5　$\mathbb{R}^2$ 上で次の $3\times 3$ 系を考える：

$$P[u] \equiv \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 & 0 \\ -u_2\partial_1 & 0 & \partial_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x_{1+})^{a-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ただし $a>1$，$t_+ = \max\{t, 0\}$。解の一つに

$$u_1 = (x_{1+})^a,\quad u_2 = (x_{2+})^a,\quad u_3 = (x_{1+})^a (x_{2+})^a$$

がある。これは任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$u \in \tilde{C}^a \cap H^{a+\frac{1}{2}-\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3),\quad \notin H^{a+\frac{1}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$$

をみたす。$z_0=((0,0),(\pm 1,0))$ とおく。定理2.1より

$$E^s(u,z_0)=\mathbb{C}\times\{0\}\times\{0\}\quad (a+\tfrac{1}{2}\leq s<2a-\tfrac{1}{2})$$

である（実際はもっと一般の $a, s$ で成立する）。一方

$$WF^s_{pol}(u,z_0)=\mathbb{C}\times\{0\}\times\mathbb{C}\quad (s\geq a+\tfrac{1}{2})\text{。}$$

例2.6　$\mathbb{R}^2$上で次の3×3系を考える：

$$P[u]\equiv\begin{bmatrix}\partial_1 & 0 & 0\\ 0 & \partial_1 & 0\\ 0 & 0 & \partial_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}u_2u_3\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=0\text{。}$$

この解の一つに $a>0$ として

$$u_1=\frac{1}{a+1}(x_{1+})^{a+1}(x_{2+})^a,\quad u_2=(x_{2+})^a,\quad u_3=(x_{1+})^a$$

がある。このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$u\in\tilde{C}^a\cap H^{a+\frac{1}{2}-\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3),\ \notin H^{a+\frac{1}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$$

である。Pの陪特性曲線の一つの$\gamma$をとる：

$$\gamma:\ z=((t,0),(0,\pm 1))\quad t\in\mathbb{R}\text{。}$$

このとき定理2.4から $a+\frac{1}{2}\leq s<2a+\frac{1}{2}$ ならば $\dim E(u,z(t))$ は $t\in\mathbb{R}$ で一定なはずである。実際このとき

$$E(u,z(t))=\mathbb{C}\left(\frac{1}{a+1}(t_+)^{a+1},1,0\right)\quad t\in\mathbb{R}$$

である。一方 $s\geq a+\frac{1}{2}$ で

$$WF^s_{pol}(u,z(t))=\begin{cases}\mathbb{C}\left(\frac{1}{a+1}(t_+)^{a+1},1,0\right) & t\neq 0\\ \mathbb{C}^2\times\{0\} & t=0\end{cases}$$

となり、$\dim WF^s_{pol}(u,z(t))$ は一定でない。

## §3 証明

$X$の標準座標により$T^*X \cong X\times\mathbb{R}^q$とみなして証明を進めれば十分である。ただし証明に飛躍のあることを了承されたい。

<u>命題1.10の証明</u>　$u\in\mathcal{E}'(X,\mathbb{C}^N)$, $z_0\in X\times(\mathbb{R}^q\setminus 0)$に対し，

『$E^s(u,z_0)=\{0\}$ $\Leftrightarrow$ $z_0\notin WF^s(u)$』を示せばよい。

($\Rightarrow$) 定義1.2を$h=(0,\cdots,0,\overset{j}{1},0,\cdots,0)$, $r>0$十分小で適用し，$j$にかんする和をとると，$^\forall a\subset\subset b\in M(z_0,r)$に対し，

$$\|a_n(x,D)u\|\leqq\frac{C}{n}\|b_n(x,D)u\|+e_n\quad n\in\mathbb{N}$$

が成立する($^\exists C>0$, $^\exists\{e_n\}\in h^s$)。任意の列$a^0\subset\subset a^1\subset\subset a^2\subset\subset\cdots\in M(z_0,r)$をとり，上の評価をくり返すと

$$\|a_n^0(x,D)u\|\leqq C_j n^{-j}\|a_n^j(x,D)u\|+e_n^j\quad n\in\mathbb{N}$$

が言える($^\exists C_j>0$ $^\exists\{e_n^j\}\in h^s$)。ゆえに$\{\|a_n(x,D)\|\}_1^\infty\in h^s$，よって補題1.1から$z_0\notin WF^s(u)$。

($\Leftarrow$) 補題1.1より明らか。

<u>命題1.11の証明</u>　$u\in\mathcal{E}'(X,\mathbb{C}^N)$としてよい。$z_0=(x_0,\xi_0)$, $|\xi_0|=1$とし，$w\notin E^{s-m}(Pu,z_0)$ならば$w\notin P_m(z_0)E^s(u,z_0)$となることを示す。$w\notin E^{s-m}(Pu,z_0)$より定義1.3から$\bar{h}w\neq 0$なる$h\in H^{s-m}(Pu,z_0)$がある。$f(\xi)=|\xi|^{-m}$ ($|\xi|\geqq 1$)なる$f(\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^q)$をとる。$^\forall a\subset\subset{}^\forall b\subset\subset{}^\forall c\in M(z_0,r)$に対し，

$$\|a_n(x,D)h\cdot P_m(z_0)u\|$$
$$\leq \|a_n(x,D)h\cdot(P_m(z_0)-f(D)P)u\| + \|a_n(x,D)h\cdot f(D)Pu\|$$
$$= A_n + B_n\ ,$$
$$A_n \leq \varepsilon_1(r)\|a_n(x,D)u\| + C_1 n^{-1}\|c_n(x,D)u\| + e_n^1\ ,$$
$$B_n \leq K n^{-m}\|a_n(x,D)h\cdot Pu\| + C_2 n^{-1}\|c_n(x,D)u\| + e_n^2$$
$$\leq K n^{-m}\{\varepsilon_2(r)\|a_n(x,D)Pu\| + C_3 n^{-1}\|b_n(x,D)Pu\|$$
$$+ e_n^3\} + C_2 n^{-1}\|c_n(x,D)u\| + e_n^2$$
$$\leq \varepsilon_3(r)\|a_n(x,D)u\| + C_4 n^{-1}\|c_n(x,D)u\| + e_n^4\ ,$$

ただし $\{e_n^1\}$, $\{e_n^2\}\in h^\infty$, $\{e_n^3\}\in h^{s-m}$, $\{e_n^4\}\in h^s$, $C_j>0$, $K>0$, $\varepsilon_j(r)>0$ 。$K$, $\varepsilon_j(r)$ は $a, b, c$ によらず、$r\downarrow 0$ のとき $\varepsilon_j(r)\downarrow 0$ である。従って ${}^tP_m(z_0)h\in H^s(u,z_0)$ 。$h\cdot w\neq 0$ なので $w\notin P_m(z_0)E^s(u,z_0)$ である。

§2の定理の証明には Bony [Bo], Meyer [Me] による para-differential calculus を用いる。記号の説明もかねて §4でまとめ直しておくので参照されたい。

定理2.1の証明. $u\in\mathcal{E}'(X,\mathbb{R}^N)$, $F$ は $x$ についてコンパクトな台をもつとして証明すれば十分である。補題4.1より

$$P[u] = T_Q(x,D)u + f,\quad f\in H^{s+\rho-m}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^N)\ ,$$

ただし
$$Q(x,\xi) = \sum_{|\beta|\leq m}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{k,\beta}}(x,\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq m}\right)_{\substack{\downarrow j=1,\dots,N\\ \to k=1,\dots,N}}\cdot(i\xi)^\beta\ 。$$

よって $E^{s_1-m}(P[u]) = E^{s_1-m}(T_Q(x,D)u)$ $(s \le s_1 \le s+\rho)$ となり、次の命題に帰着される。

命題3.1 $u \in H^s(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$ $(s \le s_1 \le s+\rho)$, $P(x,\xi) \in B^m_\rho$, $P_m(x,\xi) \in C^m_\rho$ (共に $N \times N$ 行列で、$P_m$ は $|\xi| \ge 1$ で $\xi$ について $m$次正斉次) でさらに $P(x,\xi) - P_m(x,\xi) \in C^{m-\min\{\rho,1\}}_{\rho-\min\{\rho,1\}}$ ならば

$$P_m(z)E^{s_1}(u,z) \subset E^{s_1-m}(P(x,D)u, z), \quad z \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1}.$$

証明 命題1.11の証明の $s$ を $s_1$ に、$\{e_n^1\}, \{e_n^2\} \in h^\infty$ の $h^\infty$ を $h^{s+\rho}$ にかえればよい(多少飛躍がある)。

定理2.1′の証明 定理2.1の証明で $f \in H^{s+\rho-m}$ を $f \in H^{s+1+\rho-m}$ にかえればよい。

定理2.4の証明 $\gamma$ を十分小さい曲線に分割してその各に対し定理を証明すればよいので、はじめから $\gamma$ は十分小としてよい。よって supp $u$, supp $P_m(\cdot,\xi)$, supp $G(\cdot,u_\alpha)_{|\alpha|\le m-1}$ は全て $X$ のあるコンパクト集合に含まれていると仮定して十分である。さらに定義2.2の $\tilde{P}_{1-m}$, $q_1$ ($|\xi| \le \frac{1}{100}$ で $C^\infty$ になるように調節する) があって

$$\begin{cases} \tilde{P}_{1-m}(x,\xi)P_m(x,\xi) = q_1(x,\xi)I \quad \text{on } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \\ \tilde{P}_{1-m}(x,D)P[u] \in H^{s_1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N) \\ q_1 \text{ は実数値で } \gamma \text{ の近傍で実主要型} \end{cases}$$

となるとしてよい。補題4.1より

$$G(x,\partial^\alpha u) - \sum_{\ell=0}^{m-1} T_{p_\ell}(x,D)\,u \in H^{s+\rho-(m-1)}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N),$$

ただし

$$p_\ell(x,\xi) = \sum_{|\beta|=\ell} \left( \frac{\partial G_j}{\partial u_{k,\beta}}(x,\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le m-1} \right)_{\substack{\downarrow j=1,\dots,N \\ \to k=1,\dots,N}} \cdot (i\xi)^\beta .$$

ゆえに

$$\tilde{p}_{1-m}(x,D)\left(P_m(x,D)+\sum_{\ell=0}^{m-1} T_{p_\ell}(x,D)\right)u \in H^{s_1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^N)$$

である。これを表象展開して整とんすると（多少飛躍があるが）

$$\left(q(x,D)\,I + Q(x,D)\right)u = {}^{\exists}f \in H^{s_1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^N)$$

とかける。ただし $q = q_1 + \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}\partial_{\xi_j} q_1$, $Q \in B^0_\rho$ （$N\times N$ 行列）でさらに $Q - T_{Q_0} \in B^{-\min\{\rho,1\}}_{\rho-\min\{\rho,1\}}$ が成りたつ。ただし

$$Q_0 = \frac{1}{2i}\{\tilde{p}_{1-m}, P_m\} + \tilde{p}_{1-m} P^s_{m-1} + \tilde{p}^s_{-m} P_m ,$$

$$\{\tilde{p}_{1-m}, P_m\} = \sum_{j=1}^{d}\left(\partial_{\xi_j}\tilde{p}_{1-m}\,\partial_{x_j}P_m - \partial_{x_j}\tilde{p}_{1-m}\,\partial_{\xi_j}P_m\right),$$

$$P^s_{m-1} = P_{m-1} - \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{d}\partial_{x_j}\partial_{\xi_j}P_m$$

$$\tilde{p}^s_{-m} = -\frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{d}\partial_{\xi_j}\partial_{x_j}\tilde{p}_{1-m} .$$

さて $(z_0, w_0) = (x_0, \xi_0, w_0) \in L\setminus 0$ に対して

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \nabla_\xi q_1(x(t), \xi(t)/|\xi(t)|) \\ \dot{\xi}(t) = -\nabla_x q_1(x(t), \xi(t)/|\xi(t)|)\,|\xi(t)| \\ \dot{w}(t) = -i\,Q_0(x(t), \xi(t)/|\xi(t)|) \\ x(0) = x_0,\ \xi(0) = \xi_0,\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

の解を $(z(t), w(t)) = (x(t), \xi(t), w(t))$ $t\in\mathbb{R}$ とおく。このとき $(z_0, w_0) \notin E^{s_1}(u)$ を仮定し、$(z(t), w(t)) \notin E^{s_1}(u)$ $({}^\forall t \in \mathbb{R})$ を言おう。定義1.2より $h_0\cdot w_0 \neq 0$ なる $h_0 \in H^{s_1}(u, z_0)$

が存在する。$h(t)$を次の解としよう：

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = i\,{}^{t}Q_0(x(t), \xi(t)/|\xi(t)|)\,h(t) \\ h(0) = h_0 \end{cases}$$

すると $\frac{d}{dt}(h(t)\cdot w(t)) \equiv 0$ より $h(t)\cdot w(t) \equiv h_0\cdot w_0 \neq 0$ となる。従って $h(t) \in H^{s_1}(u, z(t))$ を示せば十分である。

$T>0$ を固定する（$T<0$ の場合も同様に扱える）。各 $a \in M(z(T), r)$ に次の解 $a(t) = a(t, x, \xi)$ を対応させる：

$$(*)\begin{cases} (\partial_t + H_{q_1})\,a(t, x, \xi) = 0, & 0 \le t \le T \\ a(T, x, \xi) = a(x, \xi) \end{cases}$$

すると $a$ によらない $r(t) > 0$ で $\sup_{0\le t\le T} r(t) \downarrow 0$ ($r \downarrow 0$) となるものがあり、$a(t) \in M(z(t), r(t))$ がなりたつ。又 $a_n(x,\xi) = a(x, n^{-1}\xi)$ を $t=T$ での値とする解は $a_n(t,x,\xi) = a(t, x, \frac{\xi}{n})$ で与えられる ($n \in \mathbb{N}$)。（正確には (*) での $q_1$ は $\xi \neq 0$ で1次正斉次であるように変更したものを用いる。）

任意の $a \subset\subset b \subset\subset c \in M(z(T), r)$ に対応する (*) の解を $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ とする。すると

$$\begin{aligned}
&(D_t + q(x,D))\,a_n(t,x,D)\,h(t)\cdot u \\
&= [D_t + q(x,D), a_n(t,x,D)]\,h(t)\cdot u + a_n(t,x,D)\,h(t)\cdot f \\
&\quad + a_n(t,x,D)\,h(t)\cdot (Q_0(z(t)) - Q(x,D))\,u \\
&\equiv f_n^1(t) + f_n^2(t) + f_n^3(t)
\end{aligned}$$

$$\|f_n^1(t)\| \le C_1 n^{-1} \|b_n(t,x,D)u\| + e_n^1 ,$$

$$\|f_n^2(t)\| \le e_n^2 ,$$

$$\|f_n^3(t)\| \le \Big(\sup_{x,\xi} |h(t)\cdot(Q_0(z(t)) - Q(x,\xi))\, b_n(t,x,\xi)| + C_2 n^{-\frac{\nu}{2}}\Big)$$

$$\times \|a_n(t,x,D)u\| + C_3 n^{-1}\|b_n(t,x,D)u\| + e_n^3$$

が $n \in N$, $0 \le t \le T$ で成立する。ただし $\{e_n^1\} \in h^\infty$, $\{e_n^2\}, \{e_n^3\} \in h^{s_1}$, $C_j > 0$, $\nu = \min\{1, \frac{2\rho}{\rho+2}\}$。（ここにも多少飛躍がある）。以上を合わせて

$$\|f_n^0(t)\| \le \varepsilon_1(r)\|a_n(t,x,D)u\| + C_4 n^{-1}\|b_n(t,x,D)u\| + e_n^4$$

を得る（$C_4 > 0$, $\{e_n^4\} \in h^{s_1}$, $\varepsilon_1(r) > 0$, $\varepsilon_1(r) \downarrow 0$ （$r \downarrow 0$ で））。

$u_n(t) = a_n(t,x,D)\, h(t)\cdot u$ とおくと、

$$\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2 = 2\,\mathrm{Im}\,(q(x,D)u_n(t) - f_n^0(t), u_n(t))$$

$$\le 2\,(k_1\|u_n(t)\| + \|f_n^0(t)\|)\,\|u_n(t)\|$$

だから、

$$\frac{d}{dt}\|u_n(t)\| \le k_1\|u_n(t)\| + \|f_n^0(t)\|$$

従って

$$\|u_n(t)\| \le e^{k_1 T}\|u_n(0)\| + \int_0^T e^{k_1(T-s)}\|f_n^0(s)\|\,ds$$

$$\le k_2\,(\|u_n(0)\| + \sup_{0\le t\le T}\|f_n^0(t)\|) 。$$

ただし $k_1, k_2 > 0$ は $q$, $T$ にしかよらない。$h_0 \in H^{s_1}(u, z_0)$ なので後で述べる補題3.2を使うと、

$$\|u_n(0)\| \le \varepsilon_2(r)\|a_n(0,x,D)u\| + C_5 n^{-1}\|b_n(0,x,D)u\| + e_n^5$$

$$\le \varepsilon_3(r)\|a_n(x,D)u\| + C_6 n^{-1}\|c_n(x,D)u\| + e_n^6$$

が言える。ここで $\{e_n^5\}, \{e_n^6\} \in h^{s_1}$, $C_j > 0$, $\varepsilon_j(r) > 0$ で $r \downarrow 0$ のとき $\varepsilon_j(r) \downarrow 0$ である。同様の評価が $\|f_n^0(t)\|$ についても行え、結局 $C > 0$, $(e_n) \in h^{s_1}$ があって

$$\|a_n(x,D) h(T) \cdot u\| \leq \varepsilon(r) \|a_n(x,D) u\| + C n^{-1} \|c_n(x,D) u\| + e_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

が成りたつ。これは $h(T) \in H^{s_1}(u, z(T))$ を意味する。

<u>補題 3.2</u> 任意の $a \subset\subset b \in M(z(T), r)$ に対して

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|a_n(t,x,D) u\|$$
$$\leq K \|a_n(x,D) u\| + C n^{-1} \|b_n(x,D) u\| + e_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

が成りたつ。ただし $\{e_n\} \in h^{s_1}$, $C, K > 0$ で $K$ は $q, Q, T$ にのみ依存する。

<u>略証</u> $a = a^0 \subset\subset a^1 \subset\subset \cdots \subset\subset a^k = b$ $(k = [\rho] + 1)$ なる $a^j \in M(z(T), r)$ をとり、各 $j = 0, \cdots, k-1$ に対し、

$$\frac{d}{dt} \|a_n^j(t,x,D) u\| \leq K \|a_n^j(t,x,D) u\| + C n^{-1} \|a_n^{j+1}(t,x,D) u\| + e_n$$

なる評価を得る。ただし $K = K(q, Q, T) > 0$, $C > 0$, $\{e_n\} \in h^{s_1}$ である。これに Gronwall の補題を使い、得られた不等式を $j$ に関してたしあわせればよい。

## §4 Paradifferential Calculus

主に[Bo],[Me],[Hö]に従って述べる。

まず $\rho \geq 0$ に対しノルム $|\cdot|_\rho$ を定義する：

$$|f|_\rho = \sum_{|\alpha|\leq\rho} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha f(x)| \quad (\rho\in\mathbb{Z}),$$

$$|f|_\rho = |f|_{[\rho]} + \sum_{|\alpha|=[\rho]} \sup_{x,h\in\mathbb{R}^d} \frac{\partial^\alpha f(x+h)-\partial^\alpha f(x)}{|h|^{\rho-[\rho]}} \quad (\rho\notin\mathbb{Z})。$$

次に表象クラスを定める。$m\in\mathbb{R}$, $\rho\geq 0$ とする。

$(C^m_\rho)$ $p(x,\xi)\in C^m_\rho \iff |p^{(\alpha)}(\cdot,\xi)|_\rho \leq C_\alpha \langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}$, $\xi\in\mathbb{R}^d$

$(\forall\alpha\ \exists C_\alpha>0)$

$(A^m_\rho)$ $p(x,\xi)\in A^m_\rho \iff p(x,\xi)\in C^m_\rho$ かつ $|p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)|\leq C_{\alpha\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho+|\beta|-|\alpha|}$, $x,\xi\in\mathbb{R}^d$

$(\forall\alpha, \forall|\beta|>\rho\ \exists C_{\alpha\beta}>0)$ 。

一般に $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$ の部分集合 $S$ と $\mu>0$ に対して

$$S[\mu] = \{p(x,\xi)\in S : \operatorname{supp}\hat{p}_{x\to\eta}(\eta,\xi)\subset\{|\eta|\leq\mu|\xi|\}\}$$

とおくことにする。特に $B^m_\rho = A^m_\rho[\frac{1}{10}]$ とおく。

注意　$\rho\notin\mathbb{N}$ のとき $A^m_\rho$, $B^m_\rho$ は[Me]の定義と一致する。

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$ から $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)[\mu]$ $(\mu>0)$ への写像を作ろう。

$0\leq\varphi\leq 1$, $\varphi(x)=0$ $(|x|\geq 1)$, $\varphi(x)=1$ $(|x|\leq\frac{1}{2})$ なる $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

をとり、

$$\chi_\mu(\eta,\xi) = \varphi\left(\frac{\eta}{\mu|\xi|}\right)(1-\varphi(\xi)),$$

$$T_p^\mu(x,\xi) = \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to x}(\chi_\mu(\eta,\xi)\hat{p}_{x\to\eta}(\eta,\xi)), \quad p\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$$

により $\chi_\mu$, $T^\mu$ を定める。$T^\mu$ が求める写像である。特に

$T = T^{\frac{1}{100}}$ とおく。($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ に深い根拠はない。)

補題 4.1 (cf [Me]) $u\in\mathcal{E}'\cap\tilde{C}^{m+\rho}\cap H^s(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^N)$ ($\rho>0$, $m\in\{0\}\cup\mathbb{N}$) とし．$F(x,u_\alpha)_{|\alpha|\le m}$ を $\{(x,u_\alpha)_{|\alpha|\le m}: x\in\mathbb{R}^d,\ u_\alpha=(u_{1,\alpha},\cdots,u_{N,\alpha})\in\mathbb{R}^N\}$ から $\mathbb{C}^M$ への $x$ についてコンパクトな台をもつ $C^\infty$ 写像とする。このとき $^\forall\mu>0$ に対し．

$$F(x,\partial^\alpha u(x))_{|\alpha|\le m}=T_p^{\mu}(x,D)u+f_\mu,\quad {}^\exists f_\mu\in H^{s+\rho-m}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^M)$$

と分解できる。ただし

$$p(x,\xi)=\sum_{|\beta|\le m}\left(\frac{\partial F_j}{\partial u_{k,\beta}}(x,\partial^\alpha u(x))_{|\alpha|\le m}\right)_{\substack{\downarrow j=1,\cdots,M\\ \to k=1,\cdots,N}}\cdot(i\xi)^\beta .$$

補題 4.2 (cf [Hö]) $p\in S^m_{1,1}[\mu]$, $0<\mu<1$ ならば $p(x,D):H^{s+m}\to H^s$ はすべての $s\in\mathbb{R}$ で有界である。単に $p\in S^m_{1,1}$ ならば $s>0$ に対し有界である。

補題 4.3 (cf [Bo], [Hö]) $p\in A^m_\rho[\mu]$, $0<\mu<1$, $\mathrm{Re}\,p\ge 0$ とすると $\nu=\min\{1,\frac{2\rho}{\rho+2}\}$ で次がなりたつ:

$$\mathrm{Re}\,(P(x,D)u,u)\ge -C_\mu(p)\|u\|^2_{H^{\frac{m-\nu}{2}}},\quad u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

ただし $C_\mu(\cdot)$ は $A^m_\rho$ 上連続なあるセミノルムである。

補題 4.4 (cf [Me], [Hö]) $p_1\in S^{m_1}_{1,1}$, $p_2\in A^{m_2}_{\rho_2}[\mu_2]$, $0<\mu_2<1$, ならば $p_1(x,D)\,p_2(x,D)\equiv q(x,D)$, $q\in S^{m_1+m_2}_{1,1}$ でさらに $q-\sum_{|\alpha|\le\rho_2}\frac{1}{\alpha!}p_1^{(\alpha)}p_{2(\alpha)}\in S^{m_1+m_2-\rho_2}_{1,1}$ である。特に $p_1\in A^{m_1}_{\rho_1}[\mu_1]$ ならば $q\in A^{m_1+m_2}_{\min\{\rho_1,\rho_2\}}[\mu_1+\mu_2+\mu_1\mu_2]$ である。

補題 4.5 (cf [Hö]) $p\in A^m_\rho[\mu]$, $0<\mu<1$ ならば $p(x,D)^*=q(x,D)$, $q\in A^m_\rho[\frac{\mu}{1-\mu}]$, $q-\sum_{|\alpha|\le\rho}\frac{1}{\alpha!}D_x^\alpha\partial_\xi^\alpha\bar{p}\in S^{m-\rho}_{1,1}$ である。

補題4.6 (cf. [Me]) $m \in \mathbb{R}$、$\mu > 0$, $\rho \geq 0$ とする。

(1) $T^{\mu} : S \to S[\mu]$ は有界である ( $S = A^m_\rho, C^m_\rho$ 又は $S^m_{1,1}$ )。

(2) $I - T^{\mu} : A^m_\rho \to A^{m-\rho}_0,\ C^m_\rho \to C^{m-\rho}_0,\ S^m_{1,0} \to S^{-\infty}$ は有界である。

(3) $C^m_\rho \ni p \mapsto T^{\mu}{}^{(\alpha)}_{p\,(\beta)} - T^{\mu}_{p^{(\alpha)}_{(\beta)}} \in S^{m-\rho-|\alpha|}_{1,1}[\mu] \quad (\forall\alpha, \forall|\beta| \leq \rho)$,

$j=1,2$, $C^{m_j}_\rho \ni p_j \mapsto T^{\mu}_{p_1p_2} - T^{\mu}_{p_1} T^{\mu}_{p_2} \in S^{m_1+m_2-\rho}_{1,1}[2\mu]$ 。

## References


[Doi] S. Doi, to appear in J. Math. Kyoto. Univ.

[Be] M. Beals, "Propagation and interaction of singularities in nonlinear hyperbolic problems," Birkhäuser, 1989.

[Bo] J. M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. **14** (1981), 209–246.

[D] N. Dencker, *On the propagation of polarization sets for systems of real principal type*, J. Funct. Anal. **46** (1982), 351–373.

[G] C. Gérard, *Réflexion du front d'onde polarisé des solutions de systémes d'équations aux dérivées partielles*, C. R. Acad. Sc. Paris **297** (1983), 409–412.

[Hö] L. Hörmander, *Pseudo-differential operators of type 1,1*, Comm. Partial Diff. Eq. **13:9** (1988), 1085–1111.

[Me] Y. Meyer, *Remarques sur un théorème de J. M. Bony*, Suppl. ai Rend. del Circolo mat. di Palermo **II:1** (1981), 1–20.

[M1] S. Mizohata, "On the Cauchy problem," Academic Press, 1985.

[M2] S. Mizohata, *On the Cauchy problem for hyperbolic equations and related problems —micro-local energy method—*, in "Hyperbolic equations and related topics," Kinokuniya, 1986, pp. 193–233.

[T] Y. Takei, *A fine microlocalization and hypoellipticity*, J. Math. Kyoto. Univ **29** (1989), 127–157.