数理解析研究所講究録
第 795 巻 1992 年 89-103

抽象的 Besov 空間とその応用

筑波大学数学系　村松寿延 (Tosinobu Muramatu)

序. Banach 空間Xの非負作用素Aの分数ベキに関する一連の論文で小松彦三郎は空間

(0.1)　$D_q^\sigma(A):=\{x\in X;\ \lambda^\sigma A^n(\lambda+A)^{-n}x\in L_q^*(R^+;X)\}$

を導入し，詳しく研究している．ただし，σ は正数，$1\leqq q\leqq\infty$，nはσを越える最小の正整数，L_q^* は測度$d\lambda/\lambda$に関するL_q 空間を示し，Aが非負であるとは，負数がAのレゾルベント集合に属し，

(0.2)　$\sup\{\|\lambda(\lambda+A)^{-1}\|;\ \lambda>0\}=M<\infty$

が成立するこという．例えば，$X=L_p(R)$，$A=d/dt$（tはRの変数），のときAは非負作用素になり，$D_q^\sigma(A)=B_{p,q}^\sigma(R)$となり，$X=L_p(R^n)$，$A=-(\partial^2/\partial x_1^2+\cdots+\partial^2/\partial x_n^2)$，のときは，$D_q^\sigma(A)=B_{p,q}^{2\sigma}(R^n)$となる．ただし，微分作用素はいわゆる最大作用素とする．この意味で，一般の非負作用素Aについて（0.1）の空間を抽象的 Besov 空間と呼ぶことにする．

抽象的 Besov 空間は Besov 空間の単なる抽象的再構成ではない．例えば，−(Stokes 作用素) に関するこの空間はもはや古典的な Besov 空間ではないが，Navier-Stokes 方程式の函数解析的な研究において大変有用である．

Navier-Stokes 方程式の函数解析的研究は加藤敏夫・藤田宏のL_2 理論に始まり，近年そのL_p 理論が発展しているのだが，それらの研究の主な手段のひとつが作用素の分数ベキである．この分数ベキと抽象的 Besov 空間との関係は

（0.3）　$C_1\|x\|_{D^{\sigma}_{1}(A)}\leqq\|A^{\sigma}x\|_X\leqq C_2\|x\|_{D^{\sigma}_{\infty}(A)}$　（C_1とC_2は定数）

である．これから，抽象的 Besov 空間が分数ベキと同じように使えることが想像できるであろう．実は抽象的 Besov 空間は分数ベキよりは使い方がかなり易しく（ほとんど積分論だけでよい），したがってよい結果が楽に得られるのである．

Navier-Stokes 方程式の研究では上のσ（空間の次数という）が負の場合が必要である． われわれは負の次数の場合についても空間 $D^{\sigma}_{q}(A)$ を定義し，その性質を調べた．ここではさらに一般化し，ベキ函数λ^{σ} を重みの函数$\phi(\lambda)$ にした形で述べる．負次数の抽象的 Besov 空間の一部はDa Prato -Grisvard[5] が extrapolation spaces の名のもとに定義し研究している．

記号．Xを Banach 空間，ΩをR^n の開集合とするとき，$L_p(\Omega;X)$ でΩ上で定義された X-値強可測で，そのXでのノルムがL_p に属するもの全体のなす Banach 空間を示す．ξでΩの座標を表すとき測度$d\xi/|\xi|^n$ についてのL_pノルムをとるときは$L^{*}_{p}(\Omega;X)$ と書く．$L^{*}_{\infty-}(\Omega;X)$ は$L_p(\Omega;X)$ に属し，$|\xi|\to\infty$のとき$f(\xi)\to 0$となるfの全体を示す．

実数qに対して，$q<\infty-<\infty$ と約束する．

$\mathcal{L}(X,Y)$；XからYへの連続線型作用素の全体のなす空間．

$\mathcal{L}(X)=\mathcal{L}(X,X)$．$s\wedge t=\min\{s,t\}$，$s\vee t=\max\{s,t\}$．

１．**重みの函数の指標**．重みの函数とは正値可測函数ϕでその相似比

$$\widetilde{\phi}(t)=\sup\left\{\frac{\phi(ts)}{\phi(s)}\ ;\ s>0\right\} \tag{1.1}$$

がすべての正数tについて有限となる函数のことをいい，この場合，

$$\underline{\mathrm{ind}}\,\phi:=\sup_{0<t<1}\frac{\log\widetilde{\phi}(t)}{\log t}=\lim_{t\to 0}\frac{\log\widetilde{\phi}(t)}{\log t} \tag{1.2}$$

$$\overline{\mathrm{ind}}\,\phi:=\inf_{t>1}\frac{\log\widetilde{\phi}(t)}{\log t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\log\widetilde{\phi}(t)}{\log t} \tag{1.3}$$

を，それぞれ，ϕの左指標，ϕの右指標と呼ぶ．特に$\underline{\mathrm{ind}}\,\phi=\overline{\mathrm{ind}}\,\phi$ のとき

これをϕの指標といい，$\mathrm{ind}\,\phi$ で示す．定義により，（[18]p.43～p.46)

$$-\infty<\underline{\mathrm{ind}}\,\phi\leqq\overline{\mathrm{ind}}\,\phi<\infty \tag{1.4}$$

$$\underline{\mathrm{ind}}(\phi)^{\sigma}=\sigma\,\underline{\mathrm{ind}}\,\phi,\quad \overline{\mathrm{ind}}(\phi)^{\sigma}=\sigma\,\overline{\mathrm{ind}}\,\phi, \tag{1.5}$$

$$\overline{\mathrm{ind}}(1/\phi)=-\underline{\mathrm{ind}}\,\phi,\quad \underline{\mathrm{ind}}(1/\phi)=-\overline{\mathrm{ind}}\,\phi, \tag{1.6}$$

$$\underline{\mathrm{ind}}\,\phi+\underline{\mathrm{ind}}\,\psi\leqq\underline{\mathrm{ind}}(\phi\psi)\leqq\overline{\mathrm{ind}}(\phi\psi)\leqq\overline{\mathrm{ind}}\,\phi+\overline{\mathrm{ind}}\,\psi. \tag{1.7}$$

特に，ψが指標を持てば，

$$\underline{\mathrm{ind}}\,\phi+\mathrm{ind}\,\psi=\underline{\mathrm{ind}}(\phi\psi)\leqq\overline{\mathrm{ind}}(\phi\psi)=\overline{\mathrm{ind}}\,\phi+\mathrm{ind}\,\psi. \tag{1.8}$$

例．$\phi(t)=t^{\alpha}(\log t)^{\sigma}$ のとき $\mathrm{ind}\,\phi=\alpha$，

$\phi(t)=t^{\alpha}\vee t^{\beta}$ のとき，$\underline{\mathrm{ind}}\,\phi=\alpha\wedge\beta$，$\overline{\mathrm{ind}}\,\phi=\alpha\vee\beta$．

積分作用素の有界性を示すのに次の補題を使う．

補題１．$\widetilde{\phi}$を重みの函数ϕの相似比，$-\alpha<\underline{\mathrm{ind}}\,\phi\leqq\overline{\mathrm{ind}}\,\phi<-\beta$ とし，

$H_{\alpha,\beta}(t)=t^{\alpha}\wedge t^{\beta}$ とおく．$1\leqq r\leqq\infty$，$\lambda>0$ のとき，

$$\left\|\widetilde{\phi}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)H_{\alpha,\beta}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\right\|_{L_r^*(R^+)}=\left\|\widetilde{\phi}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)H_{\alpha,\beta}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right\|_{L_r^*(R^+)} \tag{1.9}$$

$$=\|\widetilde{\phi}(t)H_{\alpha,\beta}(t)\|_{L_r^*(R_1^+)}<\infty.$$

この補題と[18]p.38 の定理２．６ を使うと，

系1．α，β，$H_{\alpha,\beta}$ と $\widetilde{\varphi}$ は補題1と同じで，$1 \leqq p \leqq q \leqq \infty$，$K(\lambda, \mu)$ は $R^+ \times R^+$ 上の $\mathcal{L}(X, Y)$-値強可測函数で，

$$(1.10) \qquad \|K(\lambda, \mu)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqq C H_{\alpha,\beta}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \widetilde{\varphi}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \text{ a.e. } (\lambda, \mu),$$

が成立する．このとき，積分作用素

$$(1.11) \qquad Tf(\lambda) = \int_0^\infty K(\lambda, \mu) f(\mu) \frac{d\mu}{\mu}$$

は，$1 \leqq p \leqq q \leqq \infty$ について，$L^*_p(R^+; X)$ から $L^*_q(R^+; Y)$ への有界作用素である．

２．非負作用素．小松の定義を少し拡張して，

定義２．Banach 空間Xの線型作用素Aが非負であるとはある非負数 c_0 があって，(c_0, ∞) が $-A$ のレゾルベント集合に属し，

$$(2.1) \qquad \sup\{\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| ; \lambda > c_0\} = M < \infty,$$

が成立することをいう．

Aを非負作用素とし，$c > c_0$ を一つ固定する．正整数kにたいして，

$D^k(A) := \mathcal{D}(A^k)$，ノルムは $\|(c + A)^k x\|$，（$\mathcal{D}$は定義域を示す）

$D^{-k}(A) :=$ Xのノルム $\|(c + A)^{-k} x\|$ による完備化，

$D^0(A) := X$，$D^{-\infty}(A) := \cup_{k=0}^{\infty} D^{-k}(A)$，

と定義する．明らかに，kを正整数とすると，

$$D^{k+1}(A) \subset D^k(A) \subset D^0(A) \subset D^{-k}(A) \subset D^{-k-1}(A)$$

で，埋め込みは連続である．

以下，X は Banach 空間，AをXにおける非負作用素とする．

定義と簡単な計算により，

定理2． 任意の整数kについて$D^k(A)$はcの選び方によらない．

補題2．（a）$T\in\mathcal{L}(X)$である$\lambda>0$について，

$$(2.2)\qquad (\lambda+A)^{-1}T=T(\lambda+A)^{-1}$$

とすると，$TA\subset AT$で，（2.2）はすべての$\lambda>c_0$について成立する．

また，このときTの$D^{-\infty}(A)$への拡張$\mathcal{T}$で

"すべての整数kについて $\mathcal{T}$ は $D^k(A)$ で連続である"

という性質を持つものがただ一つ存在する．しかも次の性質を持つ：

Tが1対1ならば$\mathcal{T}$も1対1である．

$TX\subset D^j(A)$ならば すべてのkについて $\mathcal{T}D^k(A)\subset D^{k+j}(A)$,

$$(2.3)\qquad \|\mathcal{T}\|_{\mathcal{L}(D^k(A),D^{k+j}(A))}\leqq\|(c+A)^jT\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

特に，$(\lambda+A)^{-1}$についてこの結果を適用すると

系2． $\lambda>c_0$について$(\lambda+A)^{-1}$の$D^{-\infty}(A)$への拡張$\mathcal{R}_\lambda$で 性質：

各整数kについて $\mathcal{R}_\lambda$ は $D^k(A)$ で連続で，$\mathcal{R}_\lambda D^k(A)\subset D^{k+1}(A)$,

$$(2.4)\qquad \mathcal{R}_\lambda-\mathcal{R}_\mu=(\mu-\lambda)\mathcal{R}_\lambda\mathcal{R}_\mu,$$

$$(2.5)\qquad \|\mathcal{R}_\lambda\|_{\mathcal{L}(D^k(A),D^{k+1}(A))}\leqq 1+\frac{|\lambda-c|}{\lambda}M,$$

$$(2.6)\qquad \mathcal{R}_\lambda\mathcal{T}=\mathcal{R}_\lambda\mathcal{T},$$

を満たすものがただ一つ存在する．

3．抽象的 Besov 空間の定義．

定義3． Aを非負作用素，ϕを重みの函数とし，$1\leqq q\leqq\infty$，$c>c_0$とする．$\mathcal{A}_\lambda=1-\lambda\mathcal{R}_\lambda$とおく．$\ell$とnを $-\ell<\underline{\mathrm{ind}}\,\phi\leqq\overline{\mathrm{ind}}\,\phi<n$ を満たす最小の非負整数とする．このとき，

$$(3.1)\qquad D_q^\phi(A):=\{x\in D^{-\infty}(A)\,;\,\phi(\lambda)\lambda^\ell\mathcal{R}_\lambda{}^\ell\mathcal{A}_\lambda{}^n x\in L_q^*(I_c;X)\}$$

と定義し，ノルムを

（３．３）　$\|x\|_{D_q^\phi(A)} := |x|_{\phi,q,c} + \phi(c)\|c^\ell x\|_{D^\ell(A)}$,

（３．３）　$|x|_{\phi,q,c} := \|\phi(\lambda)\lambda^\ell \mathcal{R}_\lambda{}^\ell \mathcal{A}_\lambda{}^n x\|_{L_q^*(I_c;X)}$,

と定義する．ただし，$I_c = (c, \infty)$．

特に，$\phi(t) = t^\sigma$ のとき，$D_q^\phi(A) = D_q^\sigma(A)$ と書く．

定義により，

定理３． A，ϕ，q，ℓ と n を定義３のようにとる．このとき，$D_q^\phi(A)$ は Banach 空間で，c の取り方によらない．$\gamma > 1$ とするとき，

$$|x|_{\phi,q,\gamma c} \text{ と } |x|_{\phi,q,c}$$

$$\phi(\gamma c)\|(\gamma c)^\ell \mathcal{R}_{\gamma c}{}^\ell x\|_X \text{ と } \phi(c)\|c^\ell \mathcal{R}_c{}^\ell x\|_X$$

とはそれぞれ同値である．

X 上の有界線型作用素 T が（２．２）を満たすとき，補題２における T の拡張 $\mathcal{T}$ は $D_q^\phi(A)$ において連続である．

４．同値なノルム． この項では，

（４．１）　$|x|_{\phi,q,c;k,m} := \|\phi(\lambda)\lambda^k \mathcal{R}_\lambda{}^k \mathcal{A}_\lambda{}^m x\|_{L_q^*(I_c;X)}$,

と書く．

定理４． 非負整数 h，k，m を

$$-h < \underline{\mathrm{ind}}\,\phi,\quad -k < \underline{\mathrm{ind}}\,\phi \leqq \overline{\mathrm{ind}}\,\phi < m,$$

となるようにとる．このとき，$x \in D_q^\phi(A)$ となる必要十分条件は

$$x \in D^{-h}(A) \text{ かつ } \phi(\lambda)\lambda^k \mathcal{R}_\lambda{}^k \mathcal{A}_\lambda{}^m x \in L_q^*(I_c;X)$$

であって，

（４．２）　$C'\|x\|_{D_q^\phi(A)} \leqq |x|_{\phi,q,c;k,m} + \phi(c)\|c^\ell \mathcal{R}_c{}^\ell x\|_X$

$$\leqq C\|x\|_{D_q^\phi(A)}$$

である．ただし，CとC′はxとcに独立な正定数である．

$x\in D_q^\phi(A)$，$\lambda>c_0$ のとき，$\mathcal{R}_\lambda{}^h x\in\overline{\mathcal{D}(A)}$.

特に，$\underline{\mathrm{ind}}\,\phi>0$ のとき，$D_q^\phi(A)\subset\overline{\mathcal{D}(A)}$.

この定理を証明するための基本的な補題は

補題4．（積分表示）k，mを正整数，$\lambda>c_0$ とし，

(4.3)　$Q_{m,k}(t)=\sum_{j=0}^{k-1}\binom{m+j-1}{j}t^j$,　$c_{m,k}=k\binom{m+k-1}{k}$,

とおくと，$x\in\overline{\mathcal{D}(A)}$ に対して

(4.5)　$$x=c_{m,k}\int_\lambda^\infty\mu^{m-1}A^k(\mu+A)^{-m-k}x\,d\mu+Q_{m,k}(A(\lambda+A)^{-1})x.$$

証明．公式

$$\frac{d}{d\mu}Q_{m,k}(A(\mu+A)^{-1})=c_{m,k}\mu^{m-1}A^k(\mu+A)^{-m-k}$$

と "$\lambda\to\infty$ のとき $\lambda(\lambda+A)^{-1})x\to x$"（エルゴード定理）による．

系4．k，m，h，j を非負整数，$s>c_0$ とし，

$$\mu^{k-j}\mathcal{R}_\mu{}^k\mathcal{A}_\mu{}^m x\in L_1^*(I_s;X),\ x\in D^{-h}(A),$$

ならば，$x\in D^{-j}(A)$ で任意の $\lambda>c_0$ について，$\mathcal{R}_\lambda{}^j x\in\overline{\mathcal{D}(A)}$，そして，

(4.5) $\|\mathcal{R}_\lambda{}^j x\|\leqq C\|\mu^{k-j}\mathcal{R}_\mu{}^k\mathcal{A}_\mu{}^m x\|_{L_1^*(I_s;X)}+C'\lambda^{-j}\|s^h\mathcal{R}_s{}^h x\|$.

ただし，CとC′はxとsに独立な定数である．

定理4は補題4，系4および系1により証明できる．

5．**稠密性と包含関係．** ここで表記の基本的性質を述べる．証明は容易である．

定理5．（A）稠密性．ϕを重みの函数，$1 \leqq q \leqq \infty-$，kを正整数とすると，$D^k(A) \cap D^\phi_q(A)$ は $D^\phi_q(A)$ で稠密である．もっと詳しくいうと，任意の正整数mと$x \in D^\phi_q(A)$ について，$D^\phi_q(A)$ の位相で $\lambda \to \infty$ のとき $\lambda^m \mathcal{R}_\lambda{}^m x \to x$ である．

特に，$\underline{\mathrm{ind}}\,\phi \leqq 0$ のとき，$D^\phi_q(A)$ は $X \cap D^\phi_q(A)$ の $D^\phi_q(A)$ のノルムによる完備化に等しい．

（B）包含関係．ϕとψを重みの函数，σとτを実数，$1 \leqq q \leqq \infty$，$1 \leqq r \leqq \infty$とする．

（a）$t \geqq c$ で $\psi(t) \leqq C\phi(t)$，$q \leqq r$ ならば $D^\phi_q(A) \subset D^\psi_r(A)$．

（b）$\underline{\mathrm{ind}}(\phi/\psi) > 0$ ならば $D^\phi_q(A) \subset D^\psi_r(A)$，

特に$\sigma > \tau$ ならば $D^\sigma_\infty(A) \subset D^\tau_1(A)$．

（c）kを正整数とすると，$D^k_1(A) \subset D^k(A) \subset D^k_\infty(A)$，特に，$\mathcal{D}(A)$ がXで稠密ならば $D^k(A) \subset D^k_{\infty-}(A)$．

6．**補間定理**．抽象的 Besov 空間は実補間することによって得られる：

定理6．ϕを重みの函数，kとmを整数で $k < \underline{\mathrm{ind}}\,\phi \leqq \overline{\mathrm{ind}}\,\phi < m$，$1 \leqq q \leqq \infty$，とし，$\phi_0(t) = \phi(t)t^{-m}$，$\phi_1(t) = \phi(t)t^{-k}$ とおくと，

（6.1）　$S(q, \phi_0, D^m(A); q, \phi_1, D^k(A)) = D^\phi_q(A)$，

でノルムは同値である．ただし，左辺はいわゆる函数をパラメーターにする実補間空間（[18]を見よ）．特に，

$$(D^m(A),\ D^k(A))_{\theta, q} = D^\sigma_q(A),\quad \sigma = (1-\theta)m + \theta k,$$

である．

証明．左辺が右辺に含まれることを示すには定理4を使う．

右辺が左辺に含まれることを示すには補題４の積分表示を使えばよい．

この定理と反復補間定理を使うと，

系６．$1 \leqq q \leqq \infty$，σとτを実数，$0<\theta<1$，Y_0とY_1を

$$D_1^\sigma(A) \subset Y_0 \subset D_\infty^\sigma(A),\quad D_1^\tau(A) \subset Y_1 \subset D_\infty^\tau(A)$$

を満たす Banach 空間とすると，

(6.2) $\qquad (Y_0, Y_1)_{\theta,q} = D_q^\eta(A),\ \eta = (1-\theta)\sigma + \theta\tau.$

7．Aの拡張と昇降性．$\mathcal{D}(A)$ がXで稠密な場合を考える．

定理７．Aを定義域がXで稠密な非負作用素とするとAを $D^{-\infty}(A)$ 全体で定義された線型作用素$\mathcal{A}$ に拡張して，

“$\mathcal{A}$は $D^k(A)$ から $D^{k-1}(A)$ への作用素として連続”

となるようにでき，そしてこのような拡張は一つに限る．

さらに $\lambda > c_0$ のとき，$\lambda + \mathcal{A}$ の逆作用素$(\lambda + \mathcal{A})^{-1}$ が存在し，$\mathcal{R}_\lambda$ に等しく，

(7.1) $\quad D^{-h}(A) = \{x \in D^{-\infty}(A)\,;\,(c+\mathcal{A})^{-h}x \in X\} = (c+\mathcal{A})^h X,$

(7.2) $\quad \|x\|_{D^{-h}(A)} = \|(c+\mathcal{A})^{-h}x\|_X.$

系７．定理７の仮定のもとで，$\mathcal{A}$ を定理７の拡張とし，kを整数，mを正整数，$\psi(t) = t^{-m}\phi(t)$ とおく．このとき，

$$x \in D^k(A) \Leftrightarrow x \in D^{-\infty}(A) \text{ そして } \mathcal{A}^m x \in D^{k-m}(A),$$

$$x \in D_q^\phi(A) \Leftrightarrow x \in D^{-\infty}(A) \text{ そして } \mathcal{A}^m x \in D_q^\psi(A),$$

さらに，

(7.3) $\quad C'\|x\|_{D^k(A)} \leqq \|\mathcal{A}^m x\|_{D^{k-m}(A)} + \|(c+\mathcal{A})^{-h}x\|_X \leqq C\|x\|_{D^k(A)},$

と，

$$(7.4)\quad C'\|x\|_{D_q^\phi(A)} \leqq \|\mathscr{A}^m x\|_{D_q^\phi(A)} + \phi(c)\|c^h(c+\mathscr{A})^{-h}x\|_X \leqq C\|x\|_{D_q^\phi(A)},$$

が成立する．ただし h は，それぞれ，$-h<k$ または $-h<\underline{\mathrm{ind}}\,\phi$ を満た非負整数，C と C' は x と c に独立な正定数である．

8．$-A$ が C_0 半群の生成作用素になる場合．すなわち，

定理8．$-A$ が一様有界な C_0 半群 $\{T_t\}_{t\geqq 0}$ の生成作用素であるとする．つまり，

$$(8.1)\qquad \sup\{\|T_t\|\,;\,t\geqq 0\}=M<\infty,$$

とし，

$$(8.2)\qquad S(0)=0,\ S(t)=\int_0^t T_s\,ds\quad(t>0),$$

と定義し，$S(t)$ の $D^{-\infty}(A)$ への補題2による拡張を $\mathscr{S}(t)$ とする．非負整数 k と m を $-k<\underline{\mathrm{ind}}\,\phi\leqq\overline{\mathrm{ind}}\,\phi<m$ にとる．

このとき，$x\in D_q^\phi(A)$ となる必要十分条件は $x\in D^{-\infty}(A)$ そして

$$(8.3)\qquad \phi(t^{-1})t^{-k}\{I-T(t)\}^m\mathscr{S}(t)^k x\in L_q^*(R^+;X),$$

また，

$$(8.4)\qquad \|\phi(t^{-1})t^{-k}\{I-T(t)\}^m\mathscr{S}(t)^k x\|_{L_q^*(R^+;X)} + \phi(1)\|x\|_{D^{-h}(A)}$$

は $D_q^\phi(A)$ のノルムと同値である．ただし，$-h<\underline{\mathrm{ind}}\,\phi$．

この定理を証明するための鍵は次ぎの

補題8．m と n を整数で $0<n<m$ とする．このとき，$x\in\mathscr{D}(A^{n+1})$ に対して，

$$(8.5)\qquad A^n x=\frac{1}{K_{n,m}}\int_0^\infty t^{-n-1}\{I-T(t)\}^m x\,dx.$$

が成立する．ただし，

$$(8.6)\qquad K_{n,m}=\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{k+n+1}}{n\,!}k^n\log k.$$

定理８の証明．ℓとnを定義３のように取る．$AS(t)=I-T(t)$ であるから，補題２により，$\mathcal{S}(t)$ は$D^j(A)$ を$D^{j+1}(A)$ に写す．したがって，$x\in D_q^\phi(A)$ のとき $\mathcal{S}(t)^k x\in X$ である．ゆえに，補題４により

$$\phi(1/t)t^{-k}\{I-T(t)\}^m\mathcal{S}(t)^k x$$
$$=\int_1^\infty K(t,\lambda)\phi(\lambda)\lambda^\ell\mathcal{A}_\lambda{}^n\mathcal{R}_\lambda{}^\ell x\frac{d\lambda}{\lambda}+K_0(t)\phi(1)\mathcal{R}_1{}^\ell x,$$

$$K(t,\lambda)=c_{m+\ell,k+n}\frac{\lambda^m\phi(1/t)}{t^k\phi(\lambda)}A^k(\lambda+A)^{-m-k}\{I-T(t)\}^m S(t)^k,$$

$K_0(t)$

$$=\frac{\phi(1/t)}{t^k\phi(1)}Q_{\ell+m,k+n}(A(1+A)^{-1})(1+A)^{-m}\{I-T(t)\}^m S(t)^k,$$

である．$AS(t)=I-T(t)$ であるから，

$$\|K(t,\lambda)\|\leqq C\widetilde{\phi}(t^{-1}\lambda^{-1})H_{-k,m}(\lambda t),$$

$$\|K_0(t)\|\leqq C\widetilde{\phi}(t^{-1})H_{-k,m}(t),$$

ただし，$H_{-k,m}(t)=\min\{t^{-k},t^m\}$．

$$\int_0^\infty\widetilde{\phi}(t^{-1}\lambda^{-1})H_{-k,m}(\lambda t)\frac{d\lambda}{\lambda}=\int_0^\infty\widetilde{\phi}(t^{-1}\lambda^{-1})H_{-k,m}(\lambda t)\frac{dt}{t}$$
$$=\int_0^\infty\widetilde{\phi}(s^{-1})H_{-k,m}(s)\frac{ds}{s}<\infty,$$

であるから，[18]p.38の定理２．６により，（８．３）および

$$\|\phi(1/t)t^{-k}\{I-T(t)\}^m\mathcal{S}(t)^k x\|_{L_q^*(R^+;X)}\leqq C\|x\|_{D_q^\phi(A)},$$

をうる．

逆に，$x\in D^{-h}(A)$で（８．３）が成り立つとする．（８．４）と$AS(t)$

$=I-T(t)$ により，

$\phi(\lambda)\lambda^{\ell}\mathcal{A}_{\lambda}^{k+n}\mathcal{R}_{\lambda}^{\ell}x$

$$=C_1\int_0^{\infty}t^{-k-n}\{I-T(t)\}^{k+\ell+m+n}\phi(\lambda)\lambda^{\ell}\mathcal{R}_{\lambda}^{k+\ell+n}x\frac{dt}{t}$$

$$=C_1\int_0^{\infty}K_2(t,\lambda)\phi(1/t)\{I-T(t)\}^m\mathcal{S}(t)^k x\frac{dt}{t},$$

$$K_2(t,\lambda)=C_1\frac{\lambda^{\ell}\phi(\lambda)}{t^n\phi(1/t)}\{I-T(t)\}^{\ell+n}A^k(\lambda+A)^{-k-\ell-n},$$

である．そして，

$$\|K_2(t,\lambda)\|\leqq C_2\widetilde{\phi}(t^{-1}\lambda^{-1})H_{-k,m}(\lambda t),$$

より，$\phi(\lambda)\lambda^{\ell}\mathcal{A}_{\lambda}^{k+n}\mathcal{R}_{\lambda}^{\ell}x\in L_q^*(R^+;X)$ がわかり証明が終わる．

例．$X:=L_p(R)$，$x(s)\in X$ に対して

$$(T(t)x)(s)=x(s-t)$$

と定義すると，$\{T(t)\}$ は一様有界C_0群でその生成作用素は$-d/ds$．ゆえに，$A=d/ds$ に対して，例えば，$0<\sigma<1$ のとき，$x\in D_q^{\sigma}(A)$ となる必要で十分な条件は

"$x\in L_p(R)$ かつ $t^{-\sigma}\|x(s)-x(s-t)\|_{L_p(R)}\in L_q^*(R^+)$"

である．すなわち，この場合，抽象的 Besov 空間は古典的な Besov 空間に一致する．

付記．非線型偏微分方程式への応用は時間がないので省略する．[5]を参照してください．

文　献

[1] Aronszajn, N., Mulla, F. and Szeptycki, P.; On spaces of potentials connected with L^p classes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 13 (1963), 211-306.

[2] Bergh, J. and Löfström, J.; Interpolation spaces. An introduction. Grundlehren Math. Wiss. **223**, Springer, Berlin-Heiderberg-New York, 1976.

[3] Boyd, D. W.; The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces, Can. J. Math., **19** (1967), 599-616.

[4] Butzer, P. L. and Berens, H.; Semi-groups of operators and approximation. Grundlehren Math. Wiss. **145**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.

[5] Da Prato, G. and Grisvard, P.; Maximal regularity for evolution equations by interpolation and extrapolation. Jour. Funct. Analysis, **58** (1984),107-125.

[6] Kobayashi, T. and Muramatu, T.; Abstract Besov space approach to the nonstationary Navier-Stokes equations. to appear in Math. Methods in Applied Sciences.

[7] Komatsu, H., Fractional powers of operators. Pacific J. Math., **19** (1966), 285-346.

[8] Komatsu, H., Fractional powers of operators II: Interpolation spaces. Pacific J. Math., **21** (1967), 89-111.

[9] Komatsu, H., Fractional powers of operators III: Negative powers. J. Math. Soc. Japan **21** (1969), 205-220.

[10] Komatsu, H., Fractional powers of operators IV: Potential operators. J. Math. Soc. Japan **21** (1969), 221-228.

[11] Komatsu, H., Fractional powers of operators V: Dual operators J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA **17** (1970), 373-396.

[12] Komatsu, H., Fractional powers of operators VI: Interpolations of non-negative operators and imbedding theorem. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA **19** (1972), 1-63.

[13] Lions, J.-L. and Peetre, J., Sur une classe d'espaces d'interpolation. Publ. Math. I.H.E.S., **19** (1964), 5-68.

[14] Merucii, C.; Interpolation réele avec fonction paramètre : réitération et applications aux espaces $\Lambda^p(\varphi)$ ($0 < p \leq \infty$), C. R. Acad. Sci. Paris, I, **295** (1982), 427-430.

[15] Muramatu, T., Products of fractional powers of operators. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA **17** (1970), 581-590.

[16] Muramatu, T.; On Besov spaces of functions defined in general regions, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., **6** (1970/1971), 515-543.

[17] Muramatu, T.; Besov spaces and Sobolev spaces of generalized functions defined on a general region, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., **9** (1974),325-396.

[18] Muramatu, T.; Interpolation of spaces and linear operators, Kinokukniya-shoten, Tokyo, 1985 (in Japanese).

[19] Muramatu, T.; A remark on ergodic theorems for pseudo-resolvents, Proc. Japan Acad, **61** (1985), 59-62.

[20] Peetre, J.; New Thoughts on Besov Spaces, Duke Univ. Math. Ser. **1** (1974). Duruham, N. C., U.S.A.

[21] Stein, E. M.; Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, U.S.A., 1970.

[22] Taibleson, M. H.; On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space I, J. Math. Mech. **13** (1964), 407-479.

[23] Triebel, H.; Spaces of Besov-Hardy-Sobolev Type, Teubner-Texte Math., Teubner, Leipzig, 1978.

[24] Yoshikawa, A.; Fractional powers of operators, interpolation

theory and imbedding theorems, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, IA **18** (1971), 335-362.