数理解析研究所講究録
第 798 巻 1992 年 9-15

Optimality Conditions for Multivariate Tchebycheff Approximation Problems

多変数チェビシェフ近似問題に対する最適性条件

Hidefumi Kawasaki (Kyushu University)

川崎英文（九州大学・理学部）

1 9 9 1年1 1月1 1日

In this paper, we fitst give necessary and sufficient optimality conditions for a (local) best approximation for the general nonlinear Tchebycheff approximation problem (1). The conditions are stated in terms of the Lagrange function. Next, we characterize (local) strong uniqueness for the best approximation problem (1). The characterization is also stated in terms of the Lagrange function with the aid of the directional derivative of $S(x)$ defied in (1). The characterization is a local version of Fischer [4]. Finally, we characterize a best approximation and a strongly unique best approximation for the best approximation problem by multivariate affine functions. They are described in terms of alternation of the error function.

与えられた関数 $b(t)$ を性質のよくわかった関数、例えば n 次多項式、で近似する際、誤差を一様ノルムで評価する問題を Tchebycheff 近似問題と呼ぶ。Tchebycheff 近似問題は次の様に定式化される。

$$\text{Minimize}_{x\in R^N} \quad S(x) := \text{Sup}\{|b(t) - F(x,t)|;\ t \in T\} \tag{1}$$

ここで $b(t)$ はコンパクト集合 $T \subset R^p$ 上で定義された連続関数、$F(x,t)$ は $R^N \times T$ 上の連続関数とする。例えば、n 次多項式 $p \in P_n$ による近似問題に対しては

$$F(x,t) := x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n, \quad x := (x_0, \ldots, x_n) \in R^{n+1}$$

をとればよい。T は $\{1, 2, \ldots, n\}$ や $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, 0\}$ の様な離散集合でも、$\{t \in R^p;\ \| t \| \leq 1\}$ の様な領域でもかまわない。

Tchebycheff 近似における最も重要な結果のひとつは Tchebycheff の交代定理である。

定理 1 区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $b(t)$ を n 次多項式で近似するとき、$p \in P_n$ が最良近似であるための必要十分条件は、誤差関数 $r(t) := b(t) - p(t)$ が少なくとも $n+1$ 回交代することである。即ち、$n+2$ 個の点 $a \leq t_1 < \ldots < t_{n+2} \leq b$ が存在して

$$r(t_i) = (-1)^i \varepsilon \| r \|_\infty \quad i = 1, \ldots, n+2$$

ただし、εは 1 または-1 である。

Haar 条件を満たす関数族やスプライン関数による近似問題に対しても、最良近似解は誤差関数の交代性により特徴づけられる。see e.g. Nürnberger [11] 。更に、交代定理に基づくルメのアルゴリズムも広く知られるところである。see e.g. Cheney [2] 。また、これらの交代定理は zero property と呼ばれる近似関数のゼロ点の個数の評価式を用いて証明される。(最も良く知られた zero-property は「n 次多項式は高々 n 個の零点しか持たない。」である。) しかしながら多変数近似問題の場合、近似関数のゼロ点は離散集合ではなく、もはや zero property は使えない。

本講演の目的は、最良近似問題に対して数理計画法からのアプローチを試みる事である。zero property を用いないこの方法は多変数最良近似問題に対して有効である。

Tchebycheff 近似問題 (1) は無限個の不等式制約を持つ最適化問題、いわゆる半無限計画問題に帰着される。

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & r \\ \text{subject to} & b(t) - F(x,t) \leq r \ \ \forall t \in T \\ & F(x,t) - b(t) \leq r \ \ \forall t \in T. \end{array} \tag{2}$$

ここで、変数は $(x,r) \in R^{n+1}$である。更に、Tchebycheff 近似問題 (2) は $F : R^n \to C(T)$, $e \in C(T)$ を

$$e(t) \equiv 1, \quad F(x)(t) := F(x,t),$$

で定義し

$$C_+(T) := \{u \in C(T);\ u(t) \geq 0\ \forall t \in T\}$$

とおくことにより

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & r \\ \text{subject to} & re - b + F(x) \in C_+(T), \\ & re + b - F(x) \in C_+(T) \end{array} \tag{3}$$

と表せ、一般化された不等式制約を持つ関数空間における最適化問題としてとらえる事が出来る。

そこで先ず、次の最適化問題に対する最適性条件を紹介する。see e.g. Ben-Tal and Zowe [1] 。

$$\text{Minimize} \ \ f(x) \ \ \text{subject to} \ \ g(x) \in K. \tag{4}$$

ここで X, Vは Banach 空間、Kは Vの内部が空でない凸錐、$f : X \to R$, $g : X \to V$は C^1 級の写像とする。以下に於て、x^*を局所最適解とし、制約条件は x^*において次の正則条件を満たすと仮定する。

定義 1 制約条件 $g(x) \in K$が x^*において正則であるとは

$$\exists y \in X \ \ s.t.\ g(x^*) + g'(x^*)y \in intK.$$

Tchebycheff 近似問題と同値な問題 (3) は常に正則条件を満たす。

定理 2（1次の必要条件） $\exists v^* \in K^o$ *such that*

$$f'(x^*) + g'(x^*)^* v^* = 0,$$

$$< v^*, g(x^*) >= 0,$$

ここで、K^oは *polar cone* $\{v^*;\ < v^*, v > \leq 0\ \forall v \in K\}$ を表す。

定理 2 を (3) に適用するには写像 $F : R^n \to C(T)$ の連続微分可能性を保証しなければならないが、$F_x(x,t)$ が $R^n \times T$上連続であれば大丈夫であり

$$(F'(x)y)(t) = F_x(x,t)y$$

が成立する。

以下に於て、次の記号を用いる。x^*を R^Nの点とし、誤差関数を $r(t)$ 、その符号を$\sigma(t)$で表す。即ち

$$r(t) := b(t) - F(x^*, t),$$

$$\sigma(t) := \mathrm{sign} r(t).$$

Positive and negative extreme points 全体をそれぞれ $T_+(x^*), T_-(x^*)$ で表す。即ち

$$T_+(x^*) \ := \ \{t \in T;\ r(t) = \| r \|\}, \tag{5}$$

$$T_-(x^*) \ := \ \{t \in T;\ r(t) = - \| r \|\}. \tag{6}$$

また、これらの和集合を $T(x^*)$ で表す。

定理 2 を (3) に適用すると Kolmogorov criteria (see. e.g. Dem'yanov and Malzemov [3]) の local version である次の定理が得られる。

定理 3 $F(x^*,t)$ を局所最良近似とする。このとき、$t_1, \ldots, t_m \in T(x^*)$ $(3 \leq m \leq N+1)$ と全ては零ではない$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sigma(t_i) F_x(x^*, t_i) = 0 \in R^N. \tag{7}$$

また、$F(x,t)$ が x に関し線形ならば、*(7)* は最良近似であるための十分条件でもある。

Malozemov and Pevnyi[9] は Haar 空間に対し定理 3 より交代定理を導いた。しかし多変数近似問題の場合、Haar 条件は満たされないので彼らの結果は適用できない。一方、定理 3 は通常よく仮定される Haar 条件を必要としない。従って、多変数近似問題に対しても有効である。

ところで、(1) で定義された関数 $S(x)$ が微分可能ならば、局所最小点 x^*において

$$S'(x^*) = 0 \tag{8}$$

が成立する。しかしながら、一般には $S(x)$ は微分可能ではない。と言うより、微分不可能な事の方が標準的なのである。事実、n 次多項式による近似の場合、ある正定数 K が存在して

$$S(x) \geq S(x^*) + K \parallel x - x^* \parallel \quad \forall x \tag{9}$$

が成立する、Newman and Shapiro [10] 。不等式 (9) が成立するとき、$F(x^*, t)$ は強一意最良近似と呼ばれる。非線形最良近似問題に対しては (9) がすべての x に対して成立することは期待できないので、(9) が x^* の近傍で成立するとき強一意局所最良近似と呼ぶことにする。強一意局所最良近似解は方向微分

$$S'(x; y) := \lim_{\theta \to +0} \frac{S(x + \theta y) - S(x)}{\theta}$$

を用いて次のように特徴づけられる。

定理 4 次の 3 つの条件は同値である。

(a) $F(x^*, t)$ は強一意局所最良近似である。

(b) $S'(x^*; y) > 0 \ \forall y \neq 0$

(c) $\exists K > 0$ *such that* $S'(x^*; y) \geq K \parallel y \parallel \quad \forall y$

定理 4 と良く知られた公式 see e.g. Girsanov [5]

$$S'(x^*; y) = \max\{-\sigma(t) F_x(x^*, t) y;\ t \in T(x^*)\}$$

を組み合わせると強一意局所最良近似解の特徴付け定理が得られる。なお、十分性については Malozemov and Pevnyi[9] が証明を与えている。

定理 5 $F(x^*, t)$ を強一意局所最良近似とする。このとき、$t_1, \ldots, t_m \in T(x^*)$ $(3 \leq m \leq N + 1)$ とすべては零ではない $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sigma(t_i) F_x(x^*, t_i) = 0 \in R^N. \tag{10}$$

$$span\{F_x(x^*, t_i);\ i = 1, \ldots, m\} = R^N. \tag{11}$$

が成立する。

次に、定理 3，4 を多変数アフィン関数による近似問題に適用する。即ち

$$F(x, t) = x_0 + x_1 \tau_1 + \cdots + x_n \tau_n \tag{12}$$

ここで、τ_i は $t \in R^n$ の第 i 成分を表す。

定理 6 $F(x^*,t)$ が最良近似であるための必要十分条件は、$3 \leq k+l \leq n+2$ を満たす $k\ (\geq 1)$ 個の *positive extreme points* $t_1,\ldots,t_k$ と $l\ (\geq 1)$ 個の *negative extreme points* $t_{k+1},\ldots,t_{k+l}$ が存在して

$$rico\{t_1,\ldots,t_k\} \cap rico\{t_{k+1},\ldots,t_{k+l}\} \neq \phi. \tag{13}$$

が成立することである。ただし $rico\{t_1,\ldots,t_k\}$ は *the relative interior of the convex hull of* $\{t_1,\ldots,t_k\}$ を表す。

なお、

$$rico\{t_1,\ldots,t_k\} = \left\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i t_i;\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0\ \forall i\right\} \tag{14}$$

が成立する, Rockafellar [12]。

定理 7 $F(x^*,t)$ が強一意最良近似であるための必要十分条件は、$3 \leq k+l \leq n+2$ を満たす $k\ (\geq 1)$ 個の *positive extreme points* $t_1,\ldots,t_k$ と $l\ (\geq 1)$ 個の *negative extreme points* $t_{k+1},\ldots,t_{k+l}$ が存在して

$$rico\{t_1,\ldots,t_k\} \cap rico\{t_{k+1},\ldots,t_{k+l}\} \neq \phi. \tag{15}$$

$$aff\{t_1,\ldots,t_{k+l}\} = R^n. \tag{16}$$

が成立することである。ただし $aff\{t_1,\ldots,t_{k+l}\}$ は *the affine hull of* $\{t_1,\ldots,t_{k+l}\}$ を表す。

$n=2$ のとき、定理 6 , 7 はそれぞれ次のようになる。

定理 8 $n=2$ のとき、$F(x^*,t) = x_0^* + x_1^*\tau_1 + x_2^*\tau_2$ が最良近似であるための必要十分条件は次の 3 つの条件のいずれかが成立することである。

(a) 4 つの異なる *extreme points* があって

$$\sigma(t_1) = \sigma(t_2) = \sigma(t_3) = -\sigma(t_4),$$

$$t_4 \in \{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3 t_3;\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1,\ \lambda_i > 0\ \forall i\}$$

(b) 4 つの異なる *extreme points* があって

$$\sigma(t_1) = \sigma(t_2) = -\sigma(t_3) = -\sigma(t_4),$$

$$\{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2;\ 0<\lambda<1\} \cap \{\mu t_3 + (1-\mu)t_4;\ 0<\mu<1\} \neq \phi$$

(c) 3 つの異なる *extreme points* があって

$$\sigma(t_1) = \sigma(t_2) = -\sigma(t_3),$$

$$t_3 \in \{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2;\ 0<\lambda<1\}$$

定理 9 $n=2$ のとき、$F(x^*,t)=x_0^*+x_1^*\tau_1+x_2^*\tau_2$ が強一意最良近似であるための必要十分条件は次の 2 つの条件のいずれかが成立することである。

(a) affinely independent な 4 つの異なる *extreme points* があって

$$\sigma(t_1)=\sigma(t_2)=\sigma(t_3)=-\sigma(t_4),$$

$$t_4\in\{\lambda_1t_1+\lambda_2t_2+\lambda_3t_3;\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\ \lambda_i>0\ \forall i\}$$

(b) affinely independent な 4 つの異なる *extreme points* があって

$$\sigma(t_1)=\sigma(t_2)=-\sigma(t_3)=-\sigma(t_4),$$

$$\{\lambda t_1+(1-\lambda)t_2;\ 0<\lambda<1\}\cap\{\mu t_3+(1-\mu)t_4;\ 0<\mu<1\}\neq\phi$$

参考文献

[1] A. Ben-Tal and J. Zowe, "A Unufied Theory of first and Second Order Conditions for Extremum Problems in Topological Vector Spaces" *Mathematical Programming Study,* vol. 19, pp. 39–76, (1982).

[2] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory.* McGraw-Hill, New York, (1966).

[3] V. F. Dem'yanov and V. N. Malozemov, *Introduction to Minimax.* John Wiley and Sons, New York, (1974).

[4] T. Fischer, "Strong Unicity in Normed Linear Spaces" *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.,* vol. 11, pp. 255–266, (1990).

[5] I. V. Girsanov, *Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems.* Springer, New York, (1972).

[6] H. Kawasaki, "An envelope-like effect of infinitely many inequality constraints on second-order necessary conditions for minimization problems" *Mathematical Programming,* vol. 41, pp. 73–96, (1988).

[7] H. Kawasaki, "Second order necessary optimality conditions for minimizing a sup-type function" *Mathematical Programming,* vol. 49, pp. 213–229, (1991).

[8] H. Kawasaki, "Second-order necessary and sufficient optimality conditions for minimizing a sup-type function" to appear in *Applied Mathematics and Optimization.*

[9] V. N. Malozemov and A. B. Pevnyi, "Alternation Properties of Solutions of Nonlinear Minimax Problems" *Soviet Math. Dokl.,* vol. 14, pp. 1303–1306, (1973).

[10] D. J. Newman and H. S. Shapiro, "Some theorems on Chebyshev Approximation" *Duke Math. J.*, vol. 30, pp. 673–681, (1963).

[11] G. Nürnberger, *Approximation by Spline Functions.* Springer, New York, (1989).

[12] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis.* Princeton University Press, (1970).