数理解析研究所講究録
第798巻 1992年 38-48

多項過程モデルによる ルックバックオプションの価格の上・下界評価

大西 匡光　　　　　　児玉 孝雄
京都大学 工学部 数理工学科　　　伊藤忠商事株式会社

茨木 俊秀
京都大学 工学部 数理工学科

アブストラクト

予め定められた期日(満期日)に規定の方法で定まる価格で証券を買う,あるいは売る権利をオプションと言い,その適正な市場価格を評価することが現代のファイナンス理論における重要な研究対象となっている.本報告で扱うルックバックオプションとは,原証券を,オプションの満期日において,その発行日からの原証券の価格の最安値で買う,あるいは最高値で売ることのできる権利である.

本報告では原証券の価格が多項過程に従うものと仮定して,ルックバックオプションの上・下界を評価した.まず一期間問題に対して,オプションの価格の上・下界を評価する問題を,状態条件付き請求権の考え方を用いて,同一の制約条件のもとで共通の目的関数を最大化あるいは最小化する2つの線形計画問題として定式化し,それらの最適解を特徴づけた.つぎに多期間問題に対して,一期間問題の結果を繰り返し利用することにより,オプションの価格の上・下界の評価式を得た.さらに市場の投資家の危険回避性を考慮することによって,同様の手法を用い,よりタイトな上・下界を得ることができた.

1 序論

証券市場において取引きされる証券(株式など)に関する権利(を記した証券)のことをオプションと言う.コールオプションとは規定の方法で定まる価格(権利行使価格)で,原証券を買う権利,プットプションとは,同じく権利行使価格で,原証券を売る権利のことを言う.

本報告では,現在のところは日本の証券市場では取引きされていないが,アメリカ合衆国ではすでに取引きが行われているルックバックオプションと呼ばれる複合的なオプションを取り扱い,その価格の上・下界を評価する問題を議論する.ルックバックオプションとは,原証券を,オプションの満期日において,その発行日からの原証券の価格の最安値で買う(ルックバック・コールオプション),あるいは最高値で売る(ルックバック・プットオプション)ことができる権利のことである.通常のオプションでは権利行使価格はその発行日において予め定められており,その満期日での価格は原証券の当日の価格のみで定まる.しかしながらルックバックオプションの価格は,その満期日において,原証券の当日の価格だけでは定まらず,その発行日からの価格変動の過程(サンプルパス)に依存する点で異なっている.

通常のオプションについては,Black and Scholes [1] が原証券の価格が幾何 Brown 運動に従うとし,"市場に裁定機会が存在しない"という仮定のもとでオプションの価格の評価式を与えた.それ以来,多くの研究者がオプションの価格評価の問題を議論してきた.Cox, Ross and Rubinstein [3] は離散時間モデルを扱

い, 原証券の価格が 2 項過程に従うとして, オプションの価格を評価し, さらにある極限操作を施せば, [1] と同じ結果を得ることを示した. Ritchken [7], Ritchken and Kuo [8, 9] は [3] の 2 項過程を多項過程に一般化したモデルを扱った. まず 1 期間問題に対し, 状態条件付き請求権を想定することによって, オプションの価格の上・下界を評価する問題を, 同一の制約条件のもとで共通の目的関数を最大化・最小化する 2 つの線形計画問題として定式化した. つぎにこの方法を繰り返し利用することによって, 満期日までの残り期間が多期間であるときのオプションの価格の上・下界を得ている. さらに市場の投資家の危険回避性を考慮することで, 上述の線形計画問題にそれを表現した制約式を追加することで, よりタイトな上・下界を得た. また Iwaki and Kijima [5] は連続時間モデルを扱い, 証券の価格が出生死滅過程に従うものとして, オプションの価格の上・下界を評価した.

一方 ルックバックオプションについては Goldman, Sosin and Gatto [4] が [1] と同様の仮定のもとで, 価格の評価式を導いた. また 河合 [11] は原証券の価格に 2 項過程を仮定した離散時間モデルを用いて価格の評価式を与え, さらにそれに極限操作を施せば [4] と同じ結果を得ることを示した.

本報告では離散時間モデルを考え, 証券の価格が多項過程に従うと仮定して, ルックバックオプションの価格の上・下界を評価する問題を議論する. まず 1 期間問題に対し, 状態条件付き請求権を想定することによって, オプションの価格の上・下界を評価する問題を, 同一の制約条件のもとで共通の目的関数を最大化・最小化する 2 つの線形計画問題として定式化する. つぎにこの方法を繰り返し利用することによって, 満期日までの残り期間が多期間であるときのオプションの価格の上・下界を導出する. さらに市場の投資家の危険回避性を考慮することで, 上述の線形計画問題にそれを表現した制約式を追加することで, よりタイトな上・下界を導く. これらの方法は通常のオプションの価格の上・下界の評価に対して [7], [8, 9] が用いたものをルックバックオプションに適用できるように修正したものであるが, [7], [8, 9] ではなされていないその正当性の吟味についても注意深く行う.

2 モデルと仮定

ルックバックオプションとは株式などの証券をオプションの満期日に, その発行日からの原証券の価格の最安値で買うあるいは最高値で売ることのできる権利 (を記した証券) のことである. 原証券を最安値で買うことのできる権利をルックバック・コールオプション, 最高値で売ることのできる権利をルックバック・プットオプションと言う. 本報告ではオプションの発行日から満期日までを T 期間に分割した離散時間モデルを考える. 原証券の価格変動過程としては, オプションの満期日までの残り期間が $t\ (=1,2,\cdots,T)$ のときの価格を s としたとき, 次期, すなわち, 残り期間が $t-1$ のときには確率 q_j で $u_j s\ (j=1,2,\cdots,n)$ となる, いわゆる, 多項過程を仮定する. 一般性を失うことなく,

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \tag{2.1}$$

と仮定する. いまオプションの満期日までの残り期間を t, 現在の原証券の価格を s, オプションの発行日から現在までの原証券の最安値, 最高値をそれぞれ, s_{min}, s_{max} とするときのルックバック・コールオプション, ルックバック・プットオプションの市場価格をそれぞれ $C(s,s_{min},t)$, $P(s,s_{max},t)$ で表す, ただし $t=0,1,\cdots,T$, $0 \leq s_{min} \leq s \leq s_{max}$ である. $t=0$ (満期日) においては, ルックバックオプションの性質より,

$$C(s,s_{min},0) = s - s \wedge s_{min} = s - s_{min}, \tag{2.2}$$

$$P(s,s_{max},0) = s \vee s_{max} - s = s_{max} - s \tag{2.3}$$

が成立する, ただし

$$a \wedge b := \min\{a,b\},$$

$$a \vee b := \max\{a,b\}$$

なる記法を用いている.

本報告では,紙面の都合上,ルックバック・コールオプションの価格の評価のみを行うことにする(ルックバック・プットオプションの価格の評価も同様である).

議論を進めるにあたって以下の仮定を設ける.

仮定 2.1

A1 市場に裁定機会は存在しない.

A2 オプションの発行日から満期日までの間に原証券の配当はなく,その売買の取引きに手数料あるい税金はかからない.

A3 無危険資産が存在し,その利子率は既知で,オプションの発行日から満期日まで一定である(便宜上

$$R := 1 + [\text{ 無危険資産の利子率 }]$$

と定義する). □

仮定 A1 より,

- 原証券の収益率と無危険資産の利子率の間には

$$u_1 \leq R < u_n \tag{2.4}$$

なる関係式が成立しなければならない,

- 同じ収益流を生む証券,あるいは,証券のポートフォリオは同じ市場価格を持たなければならない,

などの市場の性質が導かれる.

3 ルックバック・コールオプション

この節では市場の投資家の危険回避性を仮定し,それを考慮する場合としない場合,それぞれについてルックバック・コールオプションの価格を評価する.

3.1 市場の投資家の危険回避性を考慮しない場合

3.1.1 一期間問題

オプションの満期までの残り期間が $t = 1$ (次期が満期日)の場合を考える.ある状態が起こったとき,そしてそのときに限り 1 単位の配当を受け取ることができる状態条件付き請求権というものを考える.ここでは価格 s の証券が次期(満期日)に価格 $u_j s$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ になることを"状態 j が起こる"といい,状態 j が起こったとき,そしてそのときに限り 1 単位の配当を受ける状態条件付き請求権の現在の価格を e_j とする.もし各状態 $j\ (= 1, 2, \cdots, n)$ に対する状態条件付き請求権をすべて 1 単位ずつ所有していれば,次期にはどのような状態が起こっても確実に 1 単位の配当を受け取ることができる.一方 次期に確実に 1 単位の配当を受ける無危険資産の現在の価格は,仮定 A3 から,R^{-1} である.従って仮定 A1 より次の関係式が成り立つ:

$$\sum_{j=1}^{n} e_j = R^{-1} \quad \left(\sum_{j=1}^{n} R e_j = 1 \right). \tag{3.1}$$

また，これらの状態条件付き請求権の適当なポートフォリオで，その収益流を実現できる証券の価格は，やはり仮定 A1 より，このポートフォリォの価格と等しくなければならないことことに注意すると，まず原証券の価格に関しては，

$$s=\sum_{j=1}^{n} e_j(u_j s) \quad \left(s=R^{-1}\sum_{j=1}^{n} Re_j(u_j s)\right), \tag{3.2}$$

あるいは，両辺の s を消去して，

$$\sum_{j=1}^{n} e_j u_j = 1 \tag{3.3}$$

が成立する (Re_j, $j=1,2,\cdots,n$ はリスク中立確率とも解釈される). 同様にオプションの満期日までの残り期間を $t=1$, 現在の原証券の価格を s, オプションの発行日から現在までの原証券の価格の最安値を s_{min} とするときのルックバック・コールオプションの価格 $C(s,s_{min},1)$ に関しても次式が成立する:

$$C(s,s_{min},1)=\sum_{j=1}^{n} e_j C(u_j s, u_j s\wedge s_{min}, 0) \tag{3.4}$$

$$\left(C(s,s_{min},1)=R^{-1}\sum_{j=1}^{n} Re_j C(u_j s, u_j s\wedge s_{min}, 0)\right).$$

e_j, $j=1,2,\cdots,n$ のすべての値が定まれば，上式 (3.4) より $C(s,s_{min},1)$ の値は定まる．しかしながらそれらの値は分からず，情報としては，無危険資産の利子率および現在の原証券の価格のみが与えられている．従って，ルックバック・コールオプションの価格の上・下界を評価する問題は，e_j, $j=1,2,\cdots,n$ を決定変数とし，式 (3.1), (3.3) を同一の制約条件，式 (3.4) を共通の目的関数とする，以下のような 2 つの線形計画問題として定式化できる．

$$\mathbf{C1}\quad \left\{\begin{array}{c}\text{maximize}\\ \text{or}\\ \text{minimize}\end{array}\right\}\quad \sum_{j=1}^{n} e_j C(u_j s, u_j s\wedge s_{min}, 0), \tag{3.5}$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{j=1}^{n} e_j u_j = 1, \tag{3.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} e_j = R^{-1}, \tag{3.7}$$

$$e_j \geq 0,\ \ j=1,2,\cdots,n. \tag{3.8}$$

定理 3.1 次期を満期日とするルックバック・コールオプションの価格 $C(s,s_{min},1)$ の線形計画問題 **C1** の最適値によって定まる上界を $\bar{C}(s,s_{min},1)$, 下界を $\underline{C}(s,s_{min},1)$ と表すと，

$$\bar{C}(s,s_{min},1) = R^{-1}\{\alpha C(u_1 s, u_1 s\wedge s_{min},0)+(1-\alpha)C(u_n s, u_n s\wedge s_{min},0)\}, \tag{3.9}$$

$$\underline{C}(s,s_{min},1) = R^{-1}\{\beta C(u_h s, u_h s\wedge s_{min},0)+(1-\beta)C(u_{h+1} s, u_{h+1} s\wedge s_{min},0)\} \tag{3.10}$$

が成立する，ただし，

$$\alpha := \frac{u_n - R}{u_n - u_1} \tag{3.11}$$

とし，$u_h \leq R < u_{h+1}$ である $h\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ を用いて，

$$\beta := \frac{u_{h+1} - R}{u_{h+1} - u_h} \tag{3.12}$$

とする． □

3.1.2 多期間問題

一期間問題と同様の考え方より，オプションの満期日までの残り期間を $t\ (=1,2,\cdots,T)$，現在の原証券の価格を s，オプションの発行日から現在までの原証券の価格の最安値を s_{min} とするときのルックバック・コールオプションの価格 $C(s,s_{min},t)$ は次式を満足する:

$$C(s,s_{min},t)=\sum_{j=1}^{n}e_jC(u_js,u_js\wedge s_{min},t-1). \tag{3.13}$$

しかしながら，いま $C(u_js,u_js\wedge s_{min},t-1)$ は求められておらず，かわりに上界 $\bar{C}(u_js,u_js\wedge s_{min},t-1)$ と下界 $\underline{C}(u_js,u_js\wedge s_{min},t-1)$ が与えられている．

$$\begin{aligned} C(s,s_{min},t) &\le \max_{e\in E}\sum_{j=1}^{n}e_jC(u_js,u_js\wedge s_{min},t-1) & (3.14)\\ &\le \max_{e\in E}\sum_{j=1}^{n}e_j\bar{C}(u_js,u_js\wedge s_{min},t-1) & (3.15)\end{aligned}$$

であるので，$t=0,1,2,\cdots,T$ に対して，

$$\begin{aligned} \bar{C}(s,s_{min},0) &:= C(s,s_{min},0), & (3.16)\\ \bar{C}(s,s_{min},t) &:= \max_{e\in E}\sum_{j=1}^{n}e_j\bar{C}(u_js,u_js\wedge s_{min},t-1),\ t=1,2,\cdots,T & (3.17)\end{aligned}$$

と再帰的に定義すれば，これらは $C(s,s_{min},t)$ の上界を与える．ただし，E は 制約条件式 (3.6), (3.7), (3.8) を満たす $e=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 全体の集合，すなわち，

$$E:=\left\{e=(e_1,e_2,\cdots,e_n):\sum_{j=1}^{n}u_je_j=1,\sum_{j=1}^{n}e_j=R^{-1},e_j\ge 0,\ j=1,2,\cdots,n\right\} \tag{3.18}$$

と定義される．

定理 3.2 オプションの満期日までの残り期間を $t\ (=1,2,\cdots,T)$，現在の証券の価格を s，オプションの発行日から現在までの原証券の価格の最安値を s_{min} とするとき，式 (3.16), (3.17) で定義されるルックバック・コールオプションの価格の上界 $\bar{C}(s,s_{min},t)$ は

$$\bar{C}(s,s_{min},t)=R^{-1}\{\alpha\bar{C}(u_1s,u_1s\wedge s_{min},t-1)+(1-\alpha)\bar{C}(u_ns,u_ns\wedge s_{min},t-1)\} \tag{3.19}$$

を満たし，さらに u に関して単調減少で凸なある関数 $\bar{c}(u,t)$ を用いて，

$$\bar{C}(s,s_{min},t)=s\cdot\bar{c}\left(\frac{s_{min}}{s},t\right) \tag{3.20}$$

と書き表すことができる． □

系 3.1 $u_1u_n=1$ と仮定すると，

$$\begin{aligned}\bar{C}(s,s_{min},t) &= R^{-t}\left[\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{t}{2}\rfloor}\sum_{k=0}^{m}+\sum_{m=\lfloor\frac{t}{2}\rfloor+1}^{t}\sum_{k=2m-t}^{m}\right]\\ &\quad\left\{A(t,m-k)\alpha^m(1-\alpha)^{t-m}\left(u_1^mu_n^{t-m}s-s_{min}\wedge u_1^ks\right)\right\} & (3.21)\end{aligned}$$

を満たす．ただし $\lfloor a\rfloor$ は a を超えない最大の整数を表す．また

$$A(i,j) := \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i \\ j-1 \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

であり，$j \leq -1$, $j \geq i+1$ なら $A(i,j) := 0$ とする． □

定理 3.3 オプションの満期日までの残り期間を $t\ (= 0, 1, 2, \cdots, T)$，現在の原証券の価格を s，オプションの発行日から現在までの原証券の価格の最安値を s_{min} とするとき，

$$\underline{C}(s, s_{min}, 0) \ := \ C(s, s_{min}, 0), \tag{3.23}$$

$$\underline{C}(s, s_{min}, t) \ := \ \min_{e \in E} \sum_{j=1}^{n} e_j \underline{C}(u_j s, u_j s \wedge s_{min}, t-1), \ t = 1, 2, \cdots, T \tag{3.24}$$

と再帰的に定義すれば，

$$\underline{C}(s, s_{min}, t) = R^{-1}\{\beta \underline{C}(u_h s, u_h s \wedge s_{min}, t-1) + (1-\beta)\underline{C}(u_{h+1} s, u_{h+1} s \wedge s_{min}, t-1)\} \tag{3.25}$$

を満たす． □

系 3.2

$$1 \leq u_h \leq R < u_{h+1} \tag{3.26}$$

と仮定すると，

$$\underline{C}(s, s_{min}, t) = R^{-t} \left\{ \sum_{j=0}^{t} \begin{pmatrix} t \\ j \end{pmatrix} \beta^j (1-\beta)^{t-j} \left(u_h^j u_{h+1}^{t-j} s - s_{min} \right) \right\} \tag{3.27}$$

を満たす． □

式 (3.26) は次期に原証券の価格が，現在の価格よりは高いが，現在は同じ価格の無危険資産の価格よりは安くなる可能性を示す．

系 3.3 $u_h u_{h+1} = 1$ と仮定すると，

$$\begin{aligned} \underline{C}(s, s_{min}, t) \ &= \ R^{-t} \left[\sum_{m=0}^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{m} + \sum_{m=\lfloor \frac{t}{2} \rfloor + 1}^{t} \sum_{k=2m-t}^{m} \right] \\ & \quad \left\{ A(t, m-k) \beta^m (1-\beta)^{t-m} \left(u_h^m u_{h+1}^{t-m} s - s_{min} \wedge u_h^k s \right) \right\} \end{aligned} \tag{3.28}$$

を満たす． □

3.2 市場の投資家の危険回避性を考慮する場合

市場の投資家の危険回避性を考慮した議論に進むにあたり，仮定 2.1 に加えて，次の仮定を設ける．その意味は明かであろう．

仮定 3.1

A4 $\qquad R < \sum_{i=1}^{n} q_i u_i.$

この仮定は原証券の期待収益率が無危険資産の利子率より大きいことを述べている．

3.2.1 一期間問題

市場の投資家の危険回避性を考慮する場合 S, 状態条件付き請求権の現在の価格 $e_j,\ j=1,2,\cdots,n$ は次のように表される (Cox, Ross and Rubinstein [2] 参照):

$$e_j = q_j d_j,\ j=1,2,\cdots,n, \tag{3.29}$$

ただし,

q_j: 状態 j の起こる確率,

d_j: 状態 j における市場の平均投資家の富に対する限界効用

であり,

$$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$$

を満たす. よって, 市場の投資家の危険回避性を考慮しない場合における線形計画問題 **C1** は, 市場の投資家の危険回避性を考慮すると, 次の線形計画問題 **C2** に置き変わる (付録参照):

$$\mathbf{C2}\quad \left\{\begin{array}{c}\text{maximize}\\ \text{or}\\ \text{minimize}\end{array}\right\}\quad \sum_{j=1}^{n} y_j \hat{C}_j(s, s_{min}, 0), \tag{3.30}$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{j=1}^{n} y_j \hat{u}_j = 1, \tag{3.31}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = R^{-1}, \tag{3.32}$$

$$y_j \geq 0,\ j=1,2,\cdots,n, \tag{3.33}$$

ただし, $j=1,2,\cdots,n$ に対して

$$\hat{u}_j := \frac{\sum_{i=1}^{j} u_i q_i}{\sum_{i=1}^{j} q_i}, \tag{3.34}$$

$$\hat{C}_j(s, s_{min}, 0) := \frac{\sum_{i=1}^{j} q_i C(u_i s, u_i s \wedge s_{min}, 0)}{\sum_{i=1}^{j} q_i} \tag{3.35}$$

$$\tag{3.36}$$

と定義する.

定理 3.4 市場の投資家の危険回避性を考慮した場合, 次期を満期日とし, 原証券の価格を s, それまでの原証券の価格の最安値を s_{min} とするときのルックバック・コールオプションの価格 $C(s, s_{min}, 1)$ の線形計画問題 **C2** によって定まる上界を $\bar{C}_{RA}(s, s_{min}, 1)$, 下界を $\underline{C}_{RA}(s, s_{min}, 1)$ と表すと

$$\bar{C}_{RA}(s, s_{min}, 1) = R^{-1}\left\{\hat{\alpha}\hat{C}_1(s, s_{min}, 0) + (1-\hat{\alpha})\hat{C}_n(s, s_{min}, 0)\right\}, \tag{3.37}$$

$$\underline{C}_{RA}(s, s_{min}, 1) = R^{-1}\left\{\hat{\beta}\hat{C}_h(s, s_{min}, 0) + (1-\hat{\beta})\hat{C}_{h+1}(s, s_{min}, 0)\right\} \tag{3.38}$$

が成立する, ただし,

$$\hat{\alpha} := \frac{\hat{u}_n - R}{\hat{u}_n - \hat{u}_1} \tag{3.39}$$

であり, $\hat{u}_h \leq R < \hat{u}_{h+1}$ を満たす $h \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ を用いて

$$\hat{\beta} := \frac{\hat{u}_{h+1} - R}{\hat{u}_{h+1} - \hat{u}_h} \tag{3.40}$$

とする. □

3.2.2 多期間問題

定理 3.5 市場の投資家の危険回避性を考慮した場合，オプションの満期日までの残り期間を $t\ (=0,1,2,\cdots,T)$，現在の証券の価格を s，オプションの発行日から現在までの原証券の価格の最安値を s_{min} とするとき，

$$\begin{aligned}\bar{C}_{RA}(s,s_{min},0) &:= C(s,s_{min},0), &(3.41)\\ \bar{C}_{RA}(s,s_{min},t) &:= R^{-1}\left\{\hat{\alpha}\hat{\bar{C}}_1(s,s_{min},t-1)+(1-\hat{\alpha})\hat{\bar{C}}_n(s,s_{min},t-1)\right\}, &(3.42)\\ &\quad\ t=1,2,\cdots,T\end{aligned}$$

と再帰的に定義すれば，これは $C(s,s_{min},t)$ の上界を与える，ただし，

$$\hat{\bar{C}}_j(s,s_{min},t-1):=\frac{\sum_{i=1}^{j}q_i\bar{C}_{RA}(u_is,u_is\wedge s_{min},t-1)}{\sum_{i=1}^{j}q_i},\quad j=1,2,\cdots,n \tag{3.43}$$

と定義する． □

定理 3.6 市場の投資家の危険回避性を考慮した場合，オプションの満期日までの残り期間を $t\ (=0,1,2,\cdots,T)$，現在の証券の価格を s，オプションの発行日から現在までの原証券の価格の最安値を s_{min} とするとき，

$$\begin{aligned}\underline{C}_{RA}(s,s_{min},0) &:= C(s,s_{min},0), &(3.44)\\ \underline{C}_{RA}(s,s_{min},t) &:= R^{-1}\left\{\hat{\beta}\hat{\underline{C}}_h(s,s_{min},t-1)+(1-\hat{\beta})\hat{\underline{C}}_{h+1}(s,s_{min},t-1)\right\}, &(3.45)\\ &\quad\ t=1,2,\cdots,T\end{aligned}$$

と再帰的に定義すれば，これは $C(s,s_{min},t)$ の下界を与える，ただし，

$$\hat{\underline{C}}_j(s,s_{min},t-1):=\frac{\sum_{i=1}^{j}q_i\underline{C}_{RA}(u_is,u_is\wedge s_{min},t-1)}{\sum_{i=1}^{j}q_i},\quad j=1,2,\cdots,n \tag{3.46}$$

と定義する． □

4 数値計算例

以下のパラメーターのもとでルックバック・コールオプションの価格の上・下界を数値計算した:

$$\begin{aligned}&s=1,\quad R=1.05,\quad n=4\\ &u_1=0.8,\quad u_2=1,\quad u_3=1.1,\quad u_4=1.25\end{aligned}$$

表 1, 2, 3 はそれぞれ $(s,s_{min})=(1.0,0.8),(1.0,0.9),(1.0,1.0)$ におけるルックバック・コールオプションの価格に対して，本報告で提案した市場の危険回避性を考慮しない場合の上界 $\bar{C}(s,s_{min},t)$ と下界 $\underline{C}(s,s_{min},t)$ の値の残り期間 t に関する振る舞いを数値的に示したものである．

満期日までの残り期間が多くなれば，それだけ価格の変動の幅は大きくなり，従って，ルックバックオプションの価格が高くなると考えられる．実際，数値計算結果からもその事実を読み取ることができる．また，s_{min} の値が小さいほど価格は高いものとなっている．

表 1, 2, 3 のいずれにおいても，価格の上・下界の幅は残り期間が増えても，それほど広がっていく様子は見られず，従って本報告で提案したルックバックオプションの価格の評価方法は実用的なものと言えるだろう．

5 結論

Ritchken and Kuo [8] で用いられた通常のオプションの価格の上・下界を評価する方法を，ルックバックオプションに対しても修正して，適用を試みたところ，一期間問題に関しては何の条件も仮定せず適用でき，多期間問題に関しても適当な条件を付け加えることによって，その価格の上・下界の評価式を得ることができた．また，市場の投資家の危険回避性を仮定することによって，同様の手法を用い，よりタイトな上・下界を得ることができた．

一方 Ritchken and Kuo [9] においては，市場の投資家の選好あるいは危険回避性に関して，確率優位 (Stochastic Dominance)，あるいは絶対危険回避 (Absolute Risk Aversion) などに基づく，より高次の条件を仮定して，オプションの価格の上・下界の評価を行っている．これらの方法がルックバックオプションに対しても適用できるかどうかについては今後の課題である．最後に本報告での手法は，他の複合オプションの価格の評価に対しても，適用することが可能であると考えられる．

謝辞

本研究を進めるに当たり，適切な助言を頂いた京都学園大学，瀬川良之講師に心から感謝致します．

参考文献

[1] Black, F. and Scholes, M. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, vol. 81, 637–659.

[2] Cox, J. C., Ross, S. A. and Rubinstein, M. (1976), "The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options," *The Bell Journal of Economics*, vol. 7, 407–425.

[3] Cox, J. C., Ross, S. A. and Rubinstein, M. (1979), "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Finnancial Economics*, vol. 7, 1093–1110.

[4] Goldman, M. B., Sosin, H. B. and Gatto, M. A. (1979), "Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High," *Journal of Finance*, vol. 34, 1111–1127.

[5] Iwaki, H. and Kijima, M. (1990), "Option Pricing for a Birth–Death Stock Price Model," Research Report No. 90–07, Graduate School of Systems Management, The University of Tsukuba, Tokyo.

[6] Perrakis, S. and Ryan, P. (1984), "Option Pricing Bounds in Discrete Time," *Journal of Finance*, vol. 39, 519–525.

[7] Ritchken, P. H. (1985), "On Option Pricing Bounds," *Journal of Finance*, vol. 40, 1219–1233.

[8] Ritchken, P. H. and Kuo, S. (1988), "Option Bounds with Finite Revision Opportunities," *Journal of Finance*, vol. 43, 301–308.

[9] Ritchken, P. H. and Kuo, S. (1989), "On Stochastic Dominance and Decreasing Absolute Risk Averse Option Pricing Bounds," *Managment Science*, vol. 35, 51–59.

[10] 飯原 慶雄 (1980)，投資決定論，日本経済評論社，東京．

[11] 河合 一 (1990)，"2 項過程によるルックバックオプションの評価，"「計画数学におけるモデル化と解析」シンポジウム報文集，pp.106–111.

A　付録

市場の投資家の危険回避性を考慮した場合, そうでない場合の線形計画問題 **C1** に, 市場の投資家の危険回避性をを表現した, 新たな制約式を付け加えることにより, 次の線形計画問題を得る:

$$\textbf{C1'}\quad \left\{\begin{array}{c}\text{maximize}\\ \text{or}\\ \text{minimize}\end{array}\right\} \quad \sum_{j=1}^{n} q_j d_j C(u_j s, u_j s \wedge s_{min}, 0), \tag{A.1}$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{j=1}^{n} q_j d_j u_j = 1, \tag{A.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j d_j = R^{-1}, \tag{A.3}$$

$$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 0. \tag{A.4}$$

ここで, 次のような変数 $x_j,\ j = 1, 2, \cdots, n$ を導入する:

$$\sum_{i=j}^{n} x_i = d_j,\ \ j = 1, 2, \cdots, n.$$

すると, 問題 **C1'** は次のように等価に書き変えることができる:

$$\textbf{C1''}\quad \left\{\begin{array}{c}\text{maximize}\\ \text{or}\\ \text{minimize}\end{array}\right\} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{j} q_i C(u_i s, u_i s \wedge s_{min}, 0)\right), \tag{A.5}$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} u_j q_j\right) x_j = 1, \tag{A.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} q_j\right) x_j = R^{-1}, \tag{A.7}$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = 1, 2, \cdots, n. \tag{A.8}$$

最後に

$$y_j := \left(\sum_{i=1}^{j} q_i\right) x_j$$

とおくと, 問題 **C1''** は次のようになる:

$$\textbf{C2}\quad \left\{\begin{array}{c}\text{maximize}\\ \text{or}\\ \text{minimize}\end{array}\right\} \quad \sum_{j=1}^{n} y_j \hat{C}_j(s, s_{min}, 0), \tag{A.9}$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{j=1}^{n} y_j \hat{u}_j = 1, \tag{A.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = R^{-1}, \tag{A.11}$$

$$y_j \geq 0,\ \ j = 1, 2, \cdots, n, \tag{A.12}$$

ただし，$j = 1, 2, \cdots, n$ に対して，

$$\hat{u}_j := \frac{\sum_{i=1}^{j} u_i q_i}{\sum_{i=1}^{j} q_i}, \tag{A.13}$$

$$\hat{C}_j(s, s_{min}, 0) := \frac{\sum_{i=1}^{j} q_i C(u_i s, u_i s \wedge s_{min}, 0)}{\sum_{i=1}^{j} q_i} \tag{A.14}$$

と定義する．

表 1: $(s, s_{min}) = (1.0, 0.8)$

t	1	2	3	4	5	10
$\bar{C}$	0.2381	0.3030	0.3459	0.3932	0.4297	0.5831
$\underline{C}$	0.2381	0.2517	0.2909	0.3320	0.3683	0.5086

表 2: $(s, s_{min}) = (1.0, 0.9)$

t	1	2	3	4	5	10
$\bar{C}$	0.1852	0.2527	0.3074	0.3565	0.3991	0.5625
$\underline{C}$	0.1429	0.1723	0.2135	0.2546	0.2924	0.4474

表 3: $(s, s_{min}) = (1.0, 1.0)$

t	1	2	3	4	5	10
$\bar{C}$	0.1323	0.2023	0.2689	0.3199	0.3684	0.5419
$\underline{C}$	0.0476	0.0930	0.1362	0.1773	0.2165	0.3861