数理解析研究所講究録
第798巻 1992年 54-60

劣化システムの遅れを伴う最適取替政策

鳥取大学工学部　河合　一　(KAWAI Hajime)
小柳　淳二　(KOYANAGI Junji)

1　はじめに

本稿では，連続時間マルコフ的劣化システムの最適点検・取替問題を議論する．この問題は，既に，文献[1], [2]で取り扱われ，最適政策の導出法，およびその構造が明らかにされているが，それらにおいては，予防取替は常に点検直後においてのみなされるという設定の下で考察されている．ここでは，この枠組を取替に遅れを許す方向に拡張し，最適点検・取替政策の構造について議論する．

2　劣化システムと保全政策

ここで取り扱うシステムは以下の性質を持つとする．

(1) システムは，その劣化の程度により分類されたいくつかの状態，$0, 1, \cdots, n, n+1$ をとる．ここで，　0 : 部品同様の状態，　$1, \cdots, n$: 劣化状態，　$n+1$: 故障状態であり，番号が大きい程劣化の程度が高いとする．

(2) 保全を行わないとき，システムの状態は故障状態を吸収状態とする連続時間マルコフ過程をなす．

(3) 状態iからは，$i+1$及び$n+1$への推移のみ可能である．

(4) システムの状態は故障を除き，点検によってのみ分かる．

(5) 故障時には，ただちに(事後)取替えを行うが，点検および取替によりシステムの状態が明らかになった時点では，次の行動をとりうる．

$I(t)$: t 時点後に点検する．ここで $0 < t \leq \infty$,

$M(t)$: t 時間後に(予防)取替を行う．ここで $0 \leq t \leq \infty$

ここで，$I(\infty), M(\infty)$ は共に，以後点検も予防取替も行わずに故障を待つ行動を意味する．

(6) 点検，取替時間は無視しうる．

(7) コストとしては，点検，取替に要するものだけを考慮する．

3 記号の定義と仮定

以下の記号を導入する，

α_i : i から $n+1$ への推移率（故障率），

β_i : i から $i+1$ への推移率（劣化率），$\beta_n \equiv 0.$

$\lambda_i \equiv \alpha_i + \beta_i,$

ここで，$\alpha_i \leq \alpha_j$, $i < j$ とする．

a : 1回当たりの点検コスト,

b : 1回当たりの予防取替コスト,

c : 1回当たりの事後取替コスト.

4 推移確率とその性質

$$S \equiv \{0, 1, \ldots, n\}$$

$P_{ij}(t)$: 状態 i から j への t 時間推移確率 ; $i \in S, j \in S \cup \{n+1\}$,

$$p_{ij}(t) \equiv dP_{ij}(t)/dt,$$

$$F_i(t) \equiv P_{i\ n+1}(t),$$

$$\overline{F}_i(t) \equiv 1 - F_i(t) = \sum_{j=i}^{n} P_{ij}(t),$$

$$f_i(t) \equiv dF_i(t)/dt,$$

$$\mu_i \equiv \int_0^\infty \overline{F}_i(t)/dt,$$

とする．

$P_{ij}(t)$ 等は次式をみたす.

$$P_{ij}(t) = 0, \quad i > j$$

$$P_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t},$$

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= -\lambda_i P_{ij}(t) + \beta_i P_{i+1j}(t) \\ &= -P_{ij}(t)\lambda_j + P_{i\ j-1}(t)\beta_{j-1}, \quad 0 \leq i < j \leq n, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$f_i(t) = \sum_{j=i}^{n} P_{ij}(t)\alpha_j.$$

$P_{ij}(t)$ に関し以下が成り立つ,（証明は文献[1]）.

補題 1　$P_{ij}(t)$ は，$(i,j)(i,j \in S)$, および $(j,t)(j \in S)$ に関し，TP_2 (Totally Positive of Order 2) である．すなわち，$i \le j, k \le l, s \le t$　に対し，

$$\begin{vmatrix} P_{ik}(s) & P_{il}(t) \\ P_{jk}(s) & P_{jl}(t) \end{vmatrix} \ge 0 \quad \square$$

全順序集合X上の実数値関数で，符号が高々1回変化し，変化するならば負から正へであるような関数の集合を$F(X)$で示す．TP_2関数の variation diminishing property より，以下が成り立つ．

補題 2　$h. \in F(S)$ ならば

$$\sum_{j \in S} P_{\cdot j} h_j \in F(S), \quad \sum_{j \in S} P_{ij}(\cdot) h_j \in F([0,\infty)) \quad \square$$

補題 3　$\overline{F}_i(t)$ は i に関し非増加，$f_i(t)/\overline{F}_i(t)$ は i,t に関し非減少．

略証　任意の $\theta \ge 0$ に対し，

$$f_i(t) - \theta \overline{F}_i(t) = \sum_{j \in S} P_{ij}(t)(\alpha_j - \theta),$$

α_i が非減少より，$\alpha. - \theta \in F(S)$．したがって，

$$f.(t) - \theta \overline{F}.(t) \in F(S), \quad f_i(\cdot) - \theta \overline{F}_i(\cdot) \in F([0,\infty))$$

$$\overline{F}_i(t) = \exp\left(\int_0^t f_i(x)/\overline{F}_i(x)dx\right) \quad \square$$

5　最適点検・取替政策と定式化

E_0 : 取替直後あるいは点検によりシステムの状態が0であることが分かった時点，

E_i, $i = 1,2,...,n$: 点検によりシステムの状態が i であることが分かった時点，

とする．問題は，各 $E_i(i \in S)$ において，長時間平均コストを最小にするような決定の組（すなわち，定常政策）を定めることとする．

政策 π を定めると，我々の決定過程は，取替時点を再生点とする再生報酬過程を形成する．そこで，$x_i(\pi)$, $y_i(\pi)$ をそれぞれ，π の下で，E_i から出発したときの次の取替迄の期待コストおよび期待時間とすると，問題は

$$\frac{x_0(\pi)}{y_0(\pi)}$$

を最小にする政策 π^* を定めることとなる．πの下での E_i における決定を $D_i(\pi)$ で示すと，$x_i(\pi), y_i(\pi)$, はそれぞれ以下で与えられる．

$$(5.1) \qquad x_i(\pi) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-P_{ii}(t)}\left\{a\overline{F}_i(t) + cF_i(t) + \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} P_{ij}(t)x_j(\pi)\right\}, & D_i(\pi) = I(t) \text{ のとき，} \\ b\overline{F}_i(t) + cF_i(t), & D_i(\pi) = M(t) \text{ のとき，} \end{cases}$$

$$(5.2)\qquad y_i(\pi)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-P_{ii}(t)}\left\{\displaystyle\int_0^t\overline{F}_i(t)dt+\sum_{j=i+1}^{n}P_{ij}(t)y_j(\pi)\right\}, & D_i(\pi)=I(t)\text{ のとき},\\ \displaystyle\int_0^t\overline{F}_i(t)dt & D_i(\pi)=M(t)\text{ のとき},\end{cases}$$

任意の実数gに対し，

$$v_i(\pi,g)\equiv x_i(\pi)-gy_i(\pi)$$

とすると，(5.1),(5.2)式より，

$$(5.3)\qquad v_i(\pi,g)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-P_{ii}(t)}\left\{a\overline{F}_i(t)+cF_i(t)+\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n}P_{ij}(t)v_j(\pi,g)-g\int_0^t\overline{F}_i(t)dt,\right\}\\ \hfill D_i(\pi)=I(t)\text{ のとき},\\ b\overline{F}_i(t)+cF_i(t)-g\displaystyle\int_0^t\overline{F}_i(t)dt,\\ \hfill D_i(\pi)=M(t)\text{ のとき}.\end{cases}$$

さて，$v_i(g)$ を

$$(5.4)\qquad v_i(g)=\min\{\min_{0<t\leq\infty}A_i(t;j)\min_{0\leq t\leq\infty}R_i(t;g)\},i\in S,$$

$$A_i(t;g)\equiv\frac{1}{1-P_{ii}(t)}\left\{a\overline{F}_i(t)+cF_i(t)+\sum_{j=i+1}^{n}P_{ij}(t)v_j(g)-g\int_0^t\overline{F}_i(t)dt\right\},$$

$$R_i(t;g)\equiv b\overline{F}_i(t)+cF_i(t)-g\int_0^t\overline{F}_i(t)dt,$$

で定義する． なお，$A_i(t;g)$, $B_i(t;g)$ は t に関し連続であり，$\lim_{t\to0}A_i(t;g)=\infty$ であるので，それぞれ最小値は，存在する．

補題 4 $v_i(g),i\in S$ はgに関し非増加凹関数（したがって連続）である．

証明略.

補題 5 $v_0(\pi^*,g^*)=\min_{\pi}v_0(\pi,g^*)=0$ なるπ^*,g^* が存在する．さらに，$g^*\in[0,\ c/\mu_0]$.

証明　補題4および以下による．

$$v_0(\pi,0)=x_0(\pi)>0,$$

$g>c/\mu_0$のとき，$D_0(\pi)=I(\infty)$ なるπに対し，

$$v_0(\pi,g)=c-g\mu_0<0\ \square$$

補題 6 補題 5. におけるπ^*,g^* について，

$$g^*=\min\frac{x_0(\pi)}{y_0(\pi)}=\frac{x_0(\pi^*)}{y_0(\pi^*)}.$$

証明　すべてのπに対し，

$$0 = x_0(\pi^*) - g^* y_0(\pi^*) \le x_0(\pi) - g^* y_0(\pi) \quad \square$$

さて，$d_i(g)$ を (5.4) 式の右辺を与える決定とする．(5.3), (5.4) 式から，

$$(d_0(g), d_1(g), \ldots, d_n(g)) \in \{\arg\min_{\pi} v_0(\pi, g)\}$$

なることは明らかである．

補題 7

$$v_i(g) = \min\{\min_{0<t\le\infty} H_i(t;g),\ \min_{0\le t\le\infty} R_i(t;g)\}, \quad i \in S, \tag{5.5}$$

$$H_i(t;g) \equiv a\overline{F}_i(t) + cF_i(t) + \sum_{j=i}^{n} P_{ij}(t)v_j(g) - g\int_0^t \overline{F}_i(t)dt.$$

$d_i(g)$ は (5.5) 式の右辺を与える．

証明　略 □

6　最適政策の性質

本節では，$d_i(g)$, $i \in S$の性質，したがって最適政策の性質について考察する．以下では，表現の簡潔化のため，$v_i(g)$, $A_i(t;g)$, $H_i(t;g)$, $d_i(g)$ 等の g は省略する．d_iは一般に一意的ではない，そのときには，$I(\infty)$, $R(0)$, $I(t; t < \infty)$, $R(t; t < \infty)$ の順に優先する．

補題 8　$d_n = I(\infty)$ あるいは $M(0)$.

証明

$$A_n(t) = c - g\mu_n + ae^{-\lambda_n t}/(1 - e^{-\lambda_n t}),$$
$$R_n(t) = c - g\mu_n - (c - b - g\mu_n)e^{-\lambda_n t},$$

$A_n(t)$ は単調減少，$R_n(t)$ は，$c - b - g\mu_n$の正，非正にしたがい，それぞれ単調増加，減少である．

補題 9　$d_n = I(\infty)$ ならば，$d_i = I(\infty)$, $i \in S$.

証明　補題8の証明から，$d_n = I(\infty) \iff c - g\mu_n \le b$. $d_{i+1} = \cdots = d_n = I(\infty)$ とする．

$$\begin{aligned}
&(1 - P_{ii}(t))[A_i(t) - A_i(\infty)] \\
&= a\overline{F}_i(t) + cF_i(t) + \sum_{j=i+1}^{n} P_{ij}(t)(c - g\mu_j) - g\int_0^t \overline{F}_i(x)dx - (1 - P_{ii}(t))(c - g\mu_i) \\
&= a\overline{F}_i(t) + g(\mu_i - \sum_{j=i}^{n} P_{ij}(t)\mu_j - \int_0^t \overline{F}_i(x)dx) = a\overline{F}_i(t) \ge 0,
\end{aligned}$$

したがって $d_i \neq I(t; t < \infty)$.

補題3. から，$\overline{F}_i(t)/\int_t^\infty \overline{F}_i(x)dx$ が i に関し非減少になることに注意すると，

$$\begin{aligned} R_i(t) - A_i(\infty) &= (b-c)\overline{F}_i(t) + g\int_t^\infty \overline{F}_i(x)dx \\ &= \overline{F}_i(t)[b - c + g\int_t^\infty \overline{F}_i(x)dx/\overline{F}_i(t)] \\ &\geq \overline{F}_i(t)[b - c + g\int_t^\infty \overline{F}_n(x)dx/\overline{F}_n(t)] \\ &= \overline{F}_i(t)(b - c + g\mu_n) \geq 0. \end{aligned}$$

したがって，$d_i \neq R(t; t < \infty)$ □

上の補題は，$c - g\mu_n \leq b$ ならば，$d_i = I(\infty)$, $i \in S$ を意味している．以下では，$c - g\mu_n > b$ の場合，したがって，$d_n = M(0)$ の場合を扱う．

定理 1 $d_i = M(0)$ ならば，$d_j = M(0)$, $j > i$.

証明　$c - b > 0$, $\overline{F}_i(t)$ は i に関し非増加であることから，$R_i(t)$ は i に関し非減少．したがって，$R_j(t) \geq b$, $j > i$．

$d_i = M(0)$, $d_k = M(0)$, $k \geq j+1$ とする．

(i) $c \leq a + b$ のとき，μ_i は i に関し非増加であることに注意すると，

$$\begin{aligned} &(1 - P_{jj}(t))[A_j(t) - b] = c - b - (c - a - b)\overline{F}_j(t) - g\int_0^t \overline{F}_j(x)dx \\ &\geq c - b - g\mu_j \geq c - b - g\mu_i = A_i(\infty) - b \geq 0 \end{aligned}$$

(ii) $c > a + b$ のとき，$\overline{F}_i(t)$ は i に関し非増加であることに注意すると，

$$\begin{aligned} &(1 - P_{jj}(t))[A_j(t) - b] \geq c - b - (c - a - b)\overline{F}_i(t) - g\int_0^t \overline{F}_i(x)dx \\ &= a\overline{F}_i(t) + cF_i(t) + \sum_{j=i}^{n} P_{ij}(t)b - g\int_0^t \overline{F}_i(x)dx - b \\ &\geq (1 - P_{ii}(t))[A_i(t) - b] \geq 0. \end{aligned}$$

したがって，$A_j(t) \geq b$ □.

補題 10 $d_i \neq M(0)$ ならば，

$$h_i \equiv -\lambda_i v_i + \beta_i v_{i+1} + \alpha_i(c - a) - g \leq 0$$

証明　$h_i(t) \equiv dH_i(t)/dt$, $r_i(t) \equiv dR_i(t)/dt$ とすると，(4.1) 式より

$$\begin{aligned} h_i(t) &= c\alpha_i - g - \lambda_i H_i(t) + \beta_i H_{i+1}(t) \\ r_i(t) &= c\alpha_i - g - \lambda_i R_i(t) + \beta_i R_{i+1}(t) \end{aligned}$$

したがって，$d_i = I(t)$ ならば，$h_i(t) = 0$, $H_i(t) = v_i$, $H_{i+1}(t) \geq v_{i+1}$ より $h_i < 0$．$d_i = M(t; t > 0)$ ならば，$r_i(t) = 0$, $R_i(t) = v_i$, $R_{i+1}(t) \geq v_{i+1}$ より $a_i \leq 0$.

補題 11 $h_\cdot \in F(S)$

証明　$d_i \neq M(0), i=0,1,\ldots,K-1, d_i = M(0), i=K,K+1,\ldots,n$ とする．$i \leq K-1$ に対し，$h_i < 0$．$i \geq K$ に対し，$h_i = (c-a-b)\alpha_i - g$．したがって，$h_\cdot \in F(\{K,K+1,\ldots,n\})$ □

補題 12 $r_i(\cdot) \in F([0,\infty)),\ r_\cdot(t) \in F(S)$.

証明　補題3および $r_i(t) = \overline{F}_i(t)[(c-b)f_i(t)/\overline{F}_i(t) - g]$

補題 13 $h_i(\cdot) \in F((0,t)), h_\cdot(t) \in F(S)$

証明　(4.1)式より，

$$h_i(t) = \sum_{j=i}^{n} P_{ij}(t) h_j$$

補題2, 11　□

補題12は，$R_i(t)$ は，t に関し，下へ単峰であることおよび，$r_i(t) > 0$ ならば，$r_j(t) > 0$, $j > i$ を意味している．また，補題13は，$H_i(t)$ は t に関し，下へ単峰であることおよび，$h_i(t) > 0$ ならば $h_j(t) > 0, j > i$ を意味している．このことから，最適政策に関し，次の定理を得る．

定理 2 $\arg\min_t H_i(t) = t_i,\ \arg\min_t R_i(t) = s_i$ とする．

$i = K, K+1, \ldots, n$ に対し，$d_i(g*) = M(0)$,

$i = 0, 1, \ldots, K-1$ に対し，$d_i(g*) = I(t_i),\ d_i(g*) = I(t_j),\ i < j$ ならば，$t_i \geq t_j$,

$d_i(g*) = R(s_i),\ d_i(g*) = R(s_j),\ i < j$ ならば，$s_i \geq s_j$.

参考文献

1. Mine, H and Kawai, H., "An optimal inspection and maintenance policy of a deteriorating system," J. Opns. Res. of Japan, Vol. 25, pp. 1–15, 1982.
2. Ohnishi M., Kawai H. and Mine H., "An optimal inspection and replacement policy for a deteriorating system," J. Appl. Prob., Vol. 23, pp. 973–988, 1986.