数理解析研究所講究録
第 798 巻 1992 年 140-150

Fuzzy Linear Programming

金沢大学大学院　桑野　裕昭（ Hiroaki Kuwano ）
金沢大学教育学部　久志本　茂（ Shigeru Kushimoto ）

概要

ファジィ理論を用いた線形計画問題を取り扱った。問題は、各係数が三角型で相互作用のない可能性変数によって定義された最大化問題として定式化されている。このような問題での“最適値”は、問題自体のもつあいまいさから、意思決定者があいまいさなく振る舞おうともあいまいさを伴うと考えられる。そこで、われわれは可能性変数としての“最適値”を定義して、その具体的な形態を示す。

1．予備的な事項

ファジィ線形計画問題

$$(\mathrm{FLP})\quad \begin{array}{ll} \text{maximize} & \tilde{c}^{T} x \\ \text{subject to} & \tilde{A} x \leq \tilde{b},\ x \geq 0 \end{array}$$

を考える。ここで、$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$;$i \in I = \{1, \cdots, m\}$,$j \in J = \{1, \cdots, n\}$ $(n \geq m)$,$\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_m)^T$,$\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_n)^T$であり、$\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{c}_j$ $(i \in I, j \in J)$は、相互作用のない三角型の可能性変数(ファジィ数)であるとする。これら可能性変数$\tilde{N}$を$\tilde{N} = (n_L, n^1, n_U)$で表し、その$\alpha$-レベル集合を閉区間$N_\alpha = [n_L{}^\alpha, n_U{}^\alpha]$で表す。特に、$\alpha = 1$のときには、$n_L{}^\alpha = n_U{}^\alpha = n^1$と表す。

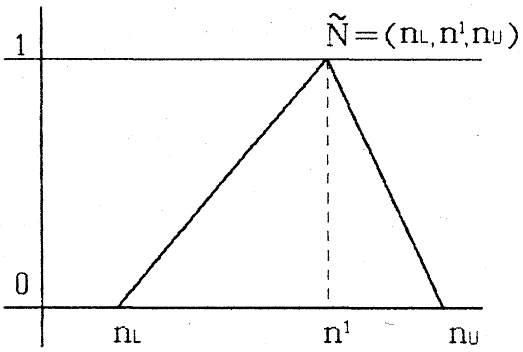

図1:三角型可能性変数$\tilde{N}$

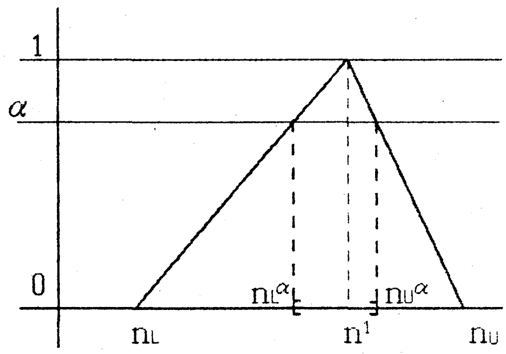

図2:α-レベル集合

定義1. 可能性αを与えられた実行可能領域とは、

$$X(\alpha) = \{x \geq 0 \mid A^\alpha x \leq b^\alpha\},$$

$$A^\alpha = (a_{ijL}{}^\alpha),\ b^\alpha = (b_{1U}{}^\alpha, \cdots, b_{nU}{}^\alpha)$$

なる$\mathbb{R}^n$の部分集合である。

定義2. 可能性βを与えられた上限目的関数、下限目的関数をそれぞれ、

$$c_L{}^{\beta T} x = \sum_{j=1}^{n} c_{jL}{}^\beta x_j,\quad c_U{}^{\beta T} x = \sum_{j=1}^{n} c_{jU}{}^\beta x_j$$

によって定義する。

定義1,2を用いて、次の3つの可能性線形計画問題を定義する。

$$(\text{PLP-}\alpha)\quad \begin{array}{ll} \text{maximize} & c^{1T}x \\ \text{subject to} & x \in X(\alpha) \end{array}$$

$$(\text{PLP}_L\text{-}\alpha)\quad \begin{array}{ll} \text{maximize} & c_L^{\beta T}x \\ \text{subject to} & x \in X(\alpha) \end{array}$$

$$(\text{PLP}_U\text{-}\alpha)\quad \begin{array}{ll} \text{maximize} & c_U^{\beta T}x \\ \text{subject to} & x \in X(\alpha) \end{array}$$

$\alpha=\beta=1$の場合、これらは同一の問題となる。それをMLPと呼ぶ。以下ではMLPの実行可能領域X(1)は非空であり、MLPは最適解を持つと仮定する。

2. MLP-αとPLP-αの関係

定義3. $0\leq\alpha\leq 1$を固定し、x_0, $x^*(\alpha)$でそれぞれ、MLP, PLP-αの最適解を表すとする。このとき、αがMLPに適合するとは、

$$c^1 \in \mathscr{C}\{a_{iL}^{\alpha} \mid i \in I(x_0)\};$$

$$I(x_0)=\{i \in I \mid a_i^1 x_0 = b_i^1\},$$

$$a_i^1=(a_{i1}^1, \cdots, a_{in}^1)$$

が成立することをいう。このと

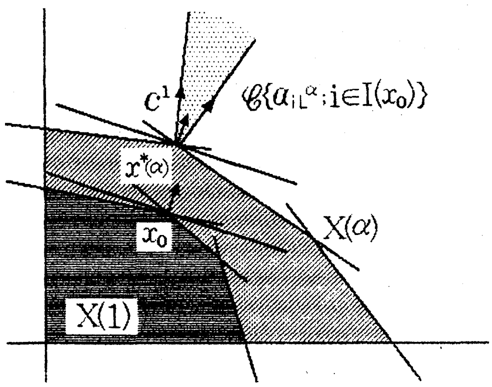

図3:対応する最適解

き、$x^*(\alpha)$はx_0に対応する最適解と呼ばれ、また、FLPのα-最適解とも呼ばれる。

定理1．MLPの最適解をx_0とし、$I(x_0)=\{1,2,\cdots,p\}$とする。また、$0\leq\alpha<1$を固定する。このとき、

$$
(\mathrm{JLP})\quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & (u-v)^T c^1 \\ \text{subject to} & (u-v)^T D^\alpha \geq 0,\ u\geq 0,\ v\geq 0 \end{array}
$$

の最適値が非負であることとαがMLPに適合すること、すなわち、

$$c^1\in\mathscr{C}\{a_{iL}^\alpha \mid i\in I(x_0)\}$$

が成立することとは必要十分条件をなす。ここで、

$$D^\alpha=(a_{1L}^{\alpha T},a_{2L}^{\alpha T},\cdots,a_{pL}^{\alpha T})$$

である。

証明：十分性；JLPの最適値が非負であるので、$y=u-v$とおけば、

$$y^T c^1<0,\quad y^T D^\alpha\geq 0$$

を満たすyは存在しない。したがって、Farkas' lemmaより

$$D^\alpha r=c^1,\quad r\geq 0$$

となるrが存在する。ゆえに

$$c^1\in\mathscr{C}\{a_{1L}^\alpha,\cdots,a_{pL}^\alpha\}$$

必要性；上の証明を逆から辿ればよい。

次に、MLPに対応するαが与えられたとして、それに関するPLP-α

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^{1T}x \\ \text{subject to} & A^{\alpha}x \leq b^{\alpha},\ x \geq 0 \end{array}$$

を考える。仮定より、$c^{1} \in \mathscr{C}\{\alpha_{iL}^{\alpha}; i \in I(x_{0})\}$が成立している。この標準形を

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \overline{c}^{1T}\overline{x} = c^{1T}x + 0^{T}\lambda \\ \text{subject to} & \overline{A}^{\alpha}\overline{x} = b^{\alpha},\ \overline{A}^{\alpha} = (A^{\alpha} \mid E_{m}) \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)} \\ & \overline{x}^{T} = (x^{T} \mid \lambda^{T}) \geq 0. \end{array}$$

とおく。拡大係数行列$\overline{A}^{\alpha}$を最適解$x^{*}(\alpha)$に関して、基底行列B^{α}と非基底行列N^{α}に分割し、必要ならば添え字を付け替えておく。同様に目的関数$\overline{c}^{1}$の係数ベクトルも$\overline{c}_{B}^{1}$と$\overline{c}_{N}^{1}$とに分割しておく。すなわち、

$$\overline{A}^{\alpha} = (B^{\alpha} \mid N^{\alpha}),\quad \overline{c}^{1T} = (\overline{c}_{B}^{1T} \mid \overline{c}_{N}^{1T})$$

とおく。また、次のような2つの行列を用意する。

$$G = (0 \mid E_{n}) \in \mathbb{R}^{n \times (m+n)}$$

$$H = (E_{m} \mid 0) \in \mathbb{R}^{m \times (m+n)}$$

仮定とシンプレックス法の最適性の判定基準より、

$$\overline{c}_{N}^{1T} - \overline{c}_{B}^{1T}(B^{\alpha})^{-1}N^{\alpha} \leq 0$$

が成立している。これをG，Hを用いて変形すると

$$\{\overline{c}_{N}^{1T} - \overline{c}_{B}^{1T}(B\alpha)^{-1}N\alpha\}^{T}$$

$$= \{(G\,\overline{c}^{1})^{T} - (H\,\overline{c}^{1})^{T}(B^{\alpha})^{-1}N^{\alpha}\}^{T}$$

$$= [G - (N^{\alpha})^{T}\{(B^{\alpha})^{T}\}^{-1}H]\,\overline{c}^{1} \le 0$$

となる。

以降の議論で用いる記号を次のように定義しておく。

$\Gamma(\alpha) = G - (N^{\alpha})^{T}\{(B^{\alpha})^{T}\}^{-1}H \in \mathbb{R}^{n\times(m+n)}$,

$S(\alpha) = \{\beta \mid \Gamma(\alpha)\overline{c}_{L}^{\beta} \le 0,\ \Gamma(\alpha)\overline{c}_{U}^{\beta} \le 0,\ 0 \le \beta \le 1\}$,

$\beta_{0}(\alpha) = \min S(\alpha)$,

$$Z(\alpha,\beta) = \begin{cases} \{z \mid c_{L}^{\beta T}x^{*}(\alpha) \le z \le c_{U}^{\beta T}x^{*}(\alpha)\} & \\ & \beta \in S(\alpha)\text{とき} \\ \phi, & \text{その他の場合} \end{cases}$$

3. $x^{*}(\alpha)$によって制限された最適値$\tilde{Z}(\alpha)$

(FLP)の“最適値”を分解定理[1]に従って定義する。

定義4. α-最適解$x^{*}(\alpha)$によって制限された$\tilde{Z}(\alpha)$とは、$\tilde{Z}(\alpha)$をβ-レベル集合とするような可能性変数である。つまり、$Z(\alpha)$は次に示す可能性分布をもつ可能性変数である。

$$\Pi_{\tilde{Z}(\alpha)}(z) = \sup_{\beta\in S(\alpha)} \beta\, I_{Z(\alpha,\beta)}(z)$$

ここで、$I_{Z(\alpha,\beta)}$は$Z(\alpha,\beta)$の定義関数を表す。

この定義のままでは、$\tilde{Z}(\alpha)$の可能性分布は一体どのようなものか見当がつかないので、その具体的な形態を以下で導

くが、その前に補題を示す。

補題 $\beta \in S(\alpha)$とする。このとき任意の$\beta'(\beta < \beta' \leq 1)$に対し、$\beta' \in S(\alpha)$が成立する

証明：任意の$\beta'(\beta < \beta' \leq 1)$に対し$\Gamma(\alpha)\overline{C}_L^{\beta'} \leq 0$が成立することのみを示す。簡単のため$\overline{C}_L$のj番めの要素$\bar{c}_{jL}^{\beta}$が0の場合には、可能性変数$\tilde{0}=(0,0,0)$と考える。定義より、

$$\overline{C}_L^{\beta} = (\bar{c}_{1L}^{\beta}, \cdots, \bar{c}_{n+m,L}^{\beta}) = \overline{C}_L + (\overline{C}^1 - \overline{C}_L)\beta$$

であり、$\Gamma(\alpha) = (\gamma(\alpha)_{ij})$は$\beta$によらない。

従って、$\Gamma(\alpha)\overline{C}_L$のi番めの不等式を$\beta$で微分すると、

$$\{\Sigma_{j=1}^{n+m}\gamma(\alpha)_{ij}\bar{c}_{jL}^{\beta}\}' = \Sigma_{j=1}^{n+m}\gamma(\alpha)_{ij}(\bar{c}_j^1 - \bar{c}_{jL}) \equiv d_i$$

を得る。ここで、d_iは定数である。

①，$d_i \geq 0$のとき

$\beta = 1$の場合には、シンプレックス法の最適性の判定基準より

$$\Sigma_{j=1}^{n+m}\gamma(\alpha)_{ij}\bar{c}_j^1 \leq 0$$

が成立している。また、$d_i \geq 0$より不等式の左辺はβに関して単調増加であるから、任意の$\beta'(<1)$に対して、

$$\Sigma_{j=1}^{n+m}\gamma(\alpha)_{ij}\bar{c}_{jL}^{\beta'} \leq 0$$

が成立する。

②，$d_i < 0$のとき

$\beta \in S(\alpha)$であるから、①と同様に最適性の判定基準より

$$\sum_{j=1}^{n+m} \gamma(\alpha)_{ij} \bar{c}_{jL}{}^{\beta} \le 0$$

が成立している。また、$d_i < 0$より不等式の左辺はβに関して単調減少であるから、任意の$\beta'(\beta < \beta' \le 1)$に対して、

$$\sum_{j=1}^{n+m} \gamma(\alpha)_{ij} \overline{c}_{jL}{}^{\beta'} \le 0$$

が成立する。よって、①，②より題意が示された。

次にα-最適解$x^*(\alpha)$によって制限されたα-最適値$\check{Z}(\alpha)$の可能性分布の具体的な形態を与える定理を示す。

定理2．MLPに適合したαが与え得られているとする。このとき、α-最適解$x^*(\alpha)$によって制限されたα-最適値$\tilde{Z}(\alpha)$の可能性分布は、$x^*(\alpha) \neq 0$ならば、

$$\Pi_{\tilde{Z}(\alpha)}(z) = \begin{cases} \dfrac{z - c_L{}^T x^*(\alpha)}{(c^1 - c_L)^T x^*(\alpha)}, & z \in Z_L, \\ \dfrac{c_U{}^T x^*(\alpha) - z}{(c_U - c^1)^T x^*(\alpha)}, & z \in Z_U, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

となり、$x^*(\alpha) = 0$ならば$\Pi_{\tilde{Z}(\alpha)} = I_{\{0\}}$となる。ここで、

$$Z_L = (-\infty,\ c^{1T} x^*(\alpha)] \cap \operatorname{int} Z(\alpha, \beta_0(\alpha))$$

$$Z_U = \operatorname{int} Z(\alpha, \beta_0(\alpha)) \cap [c^{1T} x^*(\alpha),\ +\infty)$$

とする。

証明：$x^*(\alpha) = 0$の場合は、最適解は0となるので自明。

そこで、$\mathcal{X}^*(\alpha)=(x_1^*(\alpha),x_2^*(\alpha),\cdots,x_n^*(\alpha))$, $\mathcal{X}^*(\alpha)\neq 0$とする。

固定された$z\in Z_L$について示せば十分

c_{jL}^{β}が定義域を区間$[c_{jL},c_j^1]$に制限された$\Pi_{\tilde{c}_j}$の逆関数である。$\tilde{c}_j$は三角型であったので、c_{jL}^{β}は$0\leq\beta\leq 1$上で連続な狭義単調増加関数となる。ゆえに、その非負のスカラー倍の和

$$c_L^{\beta T}\mathcal{X}^*(\alpha)=\Sigma_{j=1}^{n}c_{jL}^{\beta}x_j^*(\alpha)$$

も$0\leq\beta\leq 1$上で連続な狭義単調増加関数となる。

同様に

$$c_U^{\beta T}\mathcal{X}^*(\alpha)=\Sigma_{j=1}^{n}c_{jU}^{\beta}x_j^*(\alpha)$$

は、$0\leq\beta\leq 1$上で連続な狭義単調減少関数となる。

補題より、$\beta\in S(\alpha)$ならば任意の$\beta'(\beta<\beta'\leq 1)$についても$\beta'\in S(\alpha)$が成立する。また、上に示したことから、任意の$\beta<\beta'\in S(\alpha)$に対して、

$$[c_L^{\beta' T}\mathcal{X}^*(\alpha),c_U^{\beta' T}\mathcal{X}^*(\alpha)]$$
$$\subseteq[c_L^{\beta T}\mathcal{X}^*(\alpha),c_U^{\beta T}\mathcal{X}^*(\alpha)]$$

つまり、

$$Z(\alpha,\beta')\subseteq Z(\alpha,\beta)$$
$$\text{for } \beta<\beta'\in S(\alpha)$$

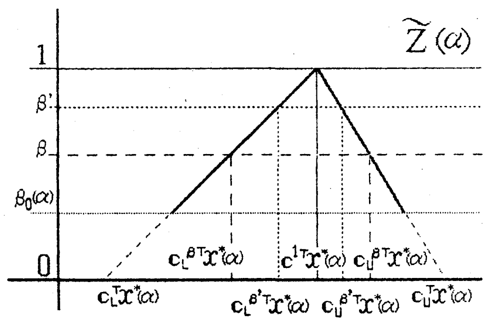

図4: α-最適値$\tilde{Z}(\alpha)$

が成立する。よって、すべての$\beta\in S(\alpha)$に対して、

$$\{c^{1T}x^*(\alpha)\} = Z(\alpha, 1) \subseteq Z(\alpha, \beta) \subseteq Z(\alpha, \beta_0(\alpha))$$

が成り立ち、ゆえに

$$Z(\alpha, \beta_0(\alpha)) = \cup_{\beta \in S(\alpha)} Z(\alpha, \beta) = \cup_{\beta \in [0,1]} Z(\alpha, \beta)$$

となる。

分解定理[1]を用い、可能性変数を構成する。

$$\tilde{Z}(\alpha) = \cup_{\beta \in [0,1]} \beta Z(\alpha, \beta)$$

この可能性分布は、

$$\Pi_{\tilde{Z}(\alpha)}(z) = \sup_{\beta \in [0,1]} \beta I_{Z(\alpha,\beta)}(z)$$

となる。

一方、$c_L^{\beta T} x^*(\alpha)$の単調増加性から、任意の$z \in Z_L \subset Z(\alpha, \beta_0(\alpha))$に対して、

$$z = c_L^{\overline{\beta} T} x^*(\alpha) + (c^1 - c_L)\overline{\beta}\, x^*(\alpha)$$

すなわち、

$$\overline{\beta} = \frac{z - c_L^T x^*(\alpha)}{(c^1 - c_L)^T x^*(\alpha)}$$

なる$\overline{\beta}$が唯一存在する。よって、

$$\beta I_{Z(\alpha,\beta)}(z) = \begin{cases} 0, & \overline{\beta} < \beta \leq 1 \text{ のとき}, \\ \beta, & \overline{\beta} \geq \beta \geq \beta_0(\alpha) \text{ のとき} \end{cases}$$

となり、結局、次式が導かれる。

$$\sup_{\beta \in S(\alpha)} \beta I_{Z(\alpha,\beta)}(z) = \overline{\beta}$$

参考文献

[1] Zadeh L.A., The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - I, Information Sciences 8(1975), 199-249.

[2] 久志本茂，“最適化問題の基礎”，森北出版，1979.

[3] 坂和正敏，“ファジィ理論の基礎と応用”，森北出版，1989.

[4] 水本雅晴，“ファジィ理論とその応用”，サイエンス社，1988.

[5] Buckley J.J., Possibilistic linear programming with triangular fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems 26(1988), 135-138.

[6] Buckley J.J., Solving possibilistic linear programming problems, Fuzzy Sets and Systems 31(1989), 329-341.

[7] Buckley J.J., Stochastic versus possibilistic programming, Fuzzy Sets and Systems 34(1990), 173-177.