数理解析研究所講究録
第 798 巻 1992 年 240-245

動的経営意思決定過程と確率制御過程

北海道情報大学　小田中　敏　男（Tosio Odanaka）

1．諸　言

近代企業の最近の発展は，公共企業，私企業を問わず計画と管理とを必要としつつある。計画と管理とを必要とする原因については，次のような項目が考えられる。１）企業の規模の増大化，２）技術の複雑性，３）急激な変化，４）意思決定の長い持続，等である。

最適制御理論はシステムを管理するための意思決定に関連している。また不確定な状況のもとでの管理に対しても，確率制御過程という手段を用意している。

動的意思決定過程として用いられる方法には変分法，動的計画法，最大化原理等がある。これらは一貫した流れのなかに存在している。それは 300年前に開始されたものでガリレオによって提出された。すなわち空間と２点を与えて，ある曲線にそって摩擦なしに重力の影響によって最小時間で滑るとする。このとき曲線はどんな形であろうか。この問題は古典的変分法の発展をうながし，更に18世紀にはラグランヂとオイラーとによって変分問題を解く一般的方法が完成された。次いで現代において宇宙産業と軍事産業からの問題が変分問題を解く新しい手法の開発をうながした。すなわち1957年に米国のR. ベルマンは動的計画法と呼ばれる変分問題を解く新しい方法を創った。これと殆ど同時にロシアのポントリヤギンとその協力者は最大化原理の使用を可能にした。

本稿においては動的計画法による確率制御過程の理論とその応用とを論ずる。ただしその基準関数としては全期間にわたる状態変数がある固定水準を越える確率を最小にする目標が採用された。何故ならばこの目標は一般的に重要であり，且つ解析的考察を可能にするからである。これまでのファジイ環境における意思決定過程の研究〔１〕，〔２〕，〔３〕では単に定式化のみで解析的考察は行われなかったが，本研究では解析的，数値的研究を示した。

本稿は四つの部分に分かれている。第一は定式化にささげられ，導かれた関数方程式の存在と一意性の定理が述べられている。更に最適政策は一定制御水準の原理によって記述されることを，定理１と定理２に述べた。ここではファジイ環境の場合を考えた。現実の世界の制御過程の多くは目的，制限，可能な行動の結果等は性格には知られていな。不確実性を量的に取扱うために，これまでは確実論の概念と手法のみを使用しているが，これは疑問であ

り，ファジイネスについても考慮しなければならないからである。

第三に上の理論の応用にはついて述べよう。すなわち１）在庫管理問題，２）統計的品質管理，３）ファンデァポール微分方程式と関連した確率的制御過程である。

最後に，将来の問題について議題しよう。われわれの過程はアダプティブな場合にも拡張せられる。

2．数学的定式化

1）定式化

ベクトル$\chi(t)$によって特性化された過程の制御を考える。この$\chi(t)$は次のベクトル微分方程式

(2.1) $$\frac{d\chi}{dt}\quad y(\chi(t), y(t), z(t))$$

を満足するとする。ベクトル$z(t)$は制御力で，制御目標を到達するよう選ばれるとする。ベクトル$y(t)$は既知の確率密度関数$\phi(y)$を持った確率関数であるとする。又は$t=0$で，$\chi(t)$の性質は既知とする。すなわち

(2.2) $\chi(0)=c$

制御ベクトル$z(t)$は，与えられたα，βに対して（$\alpha>\beta$），Pは確率とすると

(2.3)

を最小にするよう，$z(t)$に関する正義に関して決定しようとする。この制限は

$|z(t)|\leq\overline{A}.$

の形で示される。

動的計画法の手法によりJ{Z}の最小化の解析的，計算的研究のため，離散的スカラー形式で問題を定式化することは必要である。すなわち微分方程式（2.1)と（2.2)は次の差分方程式によって置換えられる。

(2.4) $\chi_{n+1}=\chi_n+z_n+y_n$，$\chi_0=C$，（n，$=k$，$k+1$，…，$N-1$）

その時，$f_{k,N}(C)$を段階kで初期状態cより出発し，最適政策を用い，ファジイ目標で，ファジイ制約に関して段階（N－1）で終了し，（β，α）をとび出すメンバーシップ関数と定義する。

すなわち

$$f_k(c) = \min_{|z| \le \bar{A}} P\{(\max_{k \le n \le N-1} x_n \ge \alpha) \text{ or } (\min_{k \le n \le N-1} x_n \le \beta)\} \tag{2.5}$$

ここに，$\chi_k = c$（$k = 0, 1, 2, \cdots, N-2$），ファジイ目標で，

(2.6)
$$A = \{(c, p_1(c))\},$$
$$B = \{(c, p_2(c))\},$$
$$C = \{(c, q(c))\} = \{(c, q_1(c)) \vee (c, q_2(c))\}.$$

ここに $p_1(c)$, $p_2(c)$, $q(c)$ は A，B，C の c のメンバーシップの程度を記している。

その時，$k = 1, 2, \cdots, N-2$ に対して

$$f_k(c) = 1 \quad (c \ge \alpha,\ c \le \beta)$$

$$= \min_{\underline{A}-c \le w \le \bar{A}+c} \Big[\int_{-\infty}^{\beta-w} \phi(y)dy + \int_{\alpha-w}^{\infty} \phi(y)dy + \int_{\beta-w}^{\alpha-w} f_{k+1}(w+y)\phi(y)dy\Big] \quad (\beta < c < \alpha) \tag{2.7}$$

初期条件は

(2.8)
$$f_{N-1}(c) = p_1(c), \quad (c \geqq \alpha)$$
$$= q(c), \quad (\beta < c < \alpha)$$
$$= p_2(c), \quad (c \leqq \beta)$$

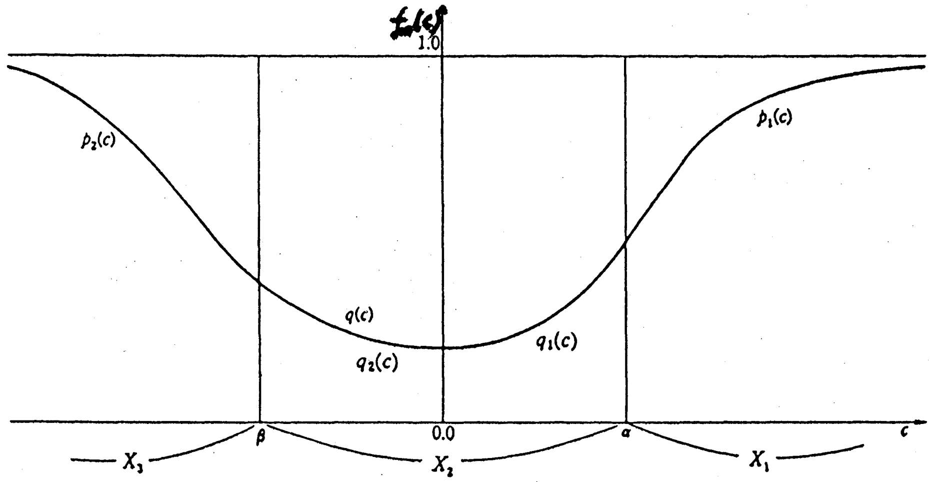

図.1.

2）存在と一意性の定理

$N \to \infty$ の時，(2.7)式の存在と一意性の定理を確立せねばならない。$\phi(y)$, $p_1(y)$, $p_2(y)$, $q(y)$, $\mu(u_n)$ に関する次の条件を設定しよう。

(a) すべてのyに対して，

$$\phi(y) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)dy = 1,$$

すべてのwに対して，

(2.9)
$$\int_{\beta-w}^{\alpha-w} \phi(y)dy \leq \alpha < 1.$$

(b) $0 \leqq p_1(y) \leqq 1$，$0 \leqq p_2(y) \leqq 1$，$0 \leqq q(y) \leqq 1$，

$p_1(y)$，$q_1(y)$は単調増加連続関数

$p_2(y)$，$q_2(y)$は単調減少連続関数

(d) $\mu(u_n) = 1$，　$(|u_n| \leqq A)$，

$= 0$，　$(|u_n| > A)$．

次のように系列 $\{f_k(c)\}$ を定義しよう。

(2.10)
$$f_{k,N-1}(c) = \min_{w} T(w, c, f_{k+1,N-1}).$$

そのとき $\lim_{N\to\infty} f_{k,N-1}(c)$ はすべてのcに対して存在し，且つ

(2.11)
$$f_k(c) = \min_{w} T(w, c, f_{k+1}).$$

の解である。ここに

$$T(w, c, f_{k+1}) = \int_{\alpha-w}^{\infty} p_1(w+y)\phi(y)dy + \int_{-\infty}^{\beta-w} p_2(w+y)\phi(y)dy$$

$$+ \int_{\beta-w}^{\alpha-w} f_{k+1}(w+y)\phi(y)dy$$

である。まとめて定理として述べると

<u>定理1</u>　(2.11) 式の単一解が存在する，この解は有限区間 (β, α) 内のcに対して有界で連続である。

3）最適政策

本節で，“一定制御水準”の原理によって特性化された最適政策を考えよう。定理として述べると。

<u>定理2</u>　仮定(a)，(b)，(c)，(d)に加えて，(e) $p_1(\alpha) = q_1(\alpha)$，$p_2(\alpha) = q_2(\alpha)$，(f) $\phi(y)$ は単調尤度比を持つ，を仮定すると最適政策は次の形となる。

(a)　$c + \overline{A} \leqq \chi_k$ に対して，$u = \overline{A}$，

(2.12)　(b)　$c \leqq \overline{\chi}_k < c + \overline{A}$に対して，$u = \overline{\chi} - c$， (c)　$c-\overline{A} \leqq \overline{\chi}_k \leqq c$ に対して，$u=-(c-\overline{\chi})$，

(d)　$\overline{\chi}_k < c-\overline{A}$ に対して，$u=-\overline{A}$,

ここに χ_k は方程式

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_k'(w+y)\phi(y)dy = 0 \tag{2.13}$$

の単一根である。又

$$\begin{aligned} m_k'(w+y) &= p_1'(w+y) && (y \geq \alpha - w) \\ &= f_{k+1}'(w+y) && (\beta - w < y < \alpha - w) \\ &= p_2'(w+y) && (\beta - w \geq y). \end{aligned} \tag{2.14}$$

である。

4．数値計算例

われわれは下の与えられた関数に対しての数値計算例を図.2に示そう。

$$\begin{aligned} p_1(c) &= 1.0 && (3.0 \leqq c) \\ &= 0.5C-0.5 && (2.0 \leqq c < 3.0) \\ q(c) &= 0.5c-0.5 && (1.0 \leqq c < 2.0) \\ &= 0.0 && (-2.0 \leqq c < 1.0) \\ p_2(c) &= 0.5C+1.0 && (-4.0 \leqq c < -2.0) \\ &= 1.0 && (-4.0 > c) \end{aligned}$$

$\alpha=2.0,\quad \beta=-2.0,$

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}.$$

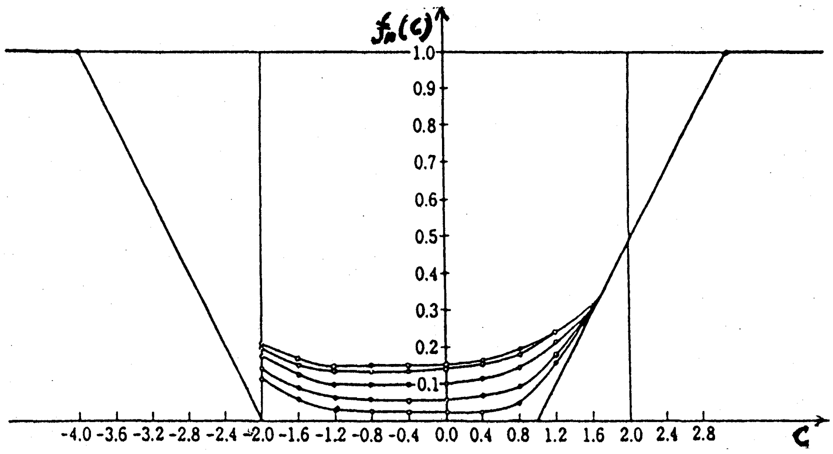

図.2

5．議　論

この理論の多くの応用が示されている。〔5〕

1）在庫管理

2）統計的品質管理

3）フィードバック過程

その他価格調整問題，公害管理，医療管理等への応用が考えられる。

又次のような将来の問題が残されている。

① 無作為意思決定時刻

② 最小最大制御過程

③ 部分的観測可能なマルコフ決定過程

④ 確率的安定性

⑤ 連続的制御過程

⑥ ファジイ制約条件

参考文献

1）Bellman, R.E. and Zadeh, L.A., "Decision-making in a fuzzy environment," Management Sci. 17, 4, (1970).

2）Baldwin J.F. and Pilsworth B.W.; "Dynamic Programming for fuzzy systems with fuzzy environment, Mathematical Analysis and Applications, 85, (1982).

3）Esogbue, A.O. and Bellman, R.E., "Fuzzy dynamic programming and its extension, TIMS/Studies in the Management Sciences, 20, (1984).

4）Odanaka, T., "Stochastic control processes and management sciences", Mathematical Analysis and Applications, 104, (1984).

5）Odanaka, T., Dynamic management decision and stochastic control processes, World Scientific, (1990).