

平面ポアズイユ流の分岐と 2 次元数値解析

東大理 梅木 誠

§1. はじめに

平面ポアズイユ流の安定性は古くからの問題であり、線形理論では Orszag (1971) が Chebyshev 多項式を用いて臨界 Reynolds 数 5772.22 と臨界波数 1.02 を計算している。この値の付近では、2 次元波動の解が subcritical な分岐によって生ずる事も知られており、この 2 次元進行波解は境界層理論で最初に見つけられた事から Tollmien-Schlichting 波 (TS 波) と呼ばれている。近年、Pugh & Saffman (1988) が、2 種類の境界条件 (流量一定と圧力勾配一定) でこの TS 波の解の安定性が異なる事を示した。とくに、圧力勾配一定の条件では、TS 波のサドルノード分岐点の近傍で不安定状態が持続し、ホップ分岐により安定化する事を示した (図 1)。本研究では、数値解析の立場から 2 次元流の範囲内で考察する。特に Fourier-Chebyshev 展開によるスペクトル法での境界条件の入り方を扱い、低モードにのみ小さな攪乱をいれた初期値による数値計算例も示す。

§2. 境界条件と高次分岐

2 枚の静止平板間 (距離  $2h$ ) の 2 次元 Navier-Stokes 流を考える。流れ方向を  $x$ 、平板に鉛直な方向を  $y$  とし、 $h$  で無次元化し、速度場を  $(u, v)$  と置き、 $x$  方向には速度場に対し長さ  $L$  の周期境界条件をとる。流れを主流 (平面ポアズイユ流) と摂動にわけると、主流の流れ関数と渦度はそれぞれ  $\Psi(y) = y - y^3/3$ ,  $\Omega(y) = -\Psi''(y) = -2y$  と表され、摂動の渦度  $\omega (= -\Delta\psi)$  に対する発展方程式は

$$\omega_t = -\Psi'\omega_x + \Omega'\psi_x + \nu\Delta\omega - \psi_y\omega_x + \psi_x\omega_y, \tag{1}$$

となる。境界条件は平板での non-slip 条件より、

$$\psi_x(x, y = \pm 1, t) = 0, \tag{2a, b}$$

$$\psi_y(x, y = \pm 1, t) = 0, \tag{3a, b}$$

が得られるが、 $\psi$  の任意定数性から (2b) は、

$$\psi(x, y = -1, t) = 0, \tag{2b}'$$

が得られるが、 $\psi$ の任意定数性から (2b) は、

$$\psi(x, y = -1, t) = 0, \quad (2b)'$$

と書き直す事ができる。

ここで、2種類の境界条件を考える。まず流量 $Q$ 一定の場合には、

$$Q = \int_{-1}^1 (\Psi' + \psi_y) dy = [\Psi + \psi]_{y=-1}^{y=1}$$

より、 $\psi(y=1) - \psi(y=-1) = 0$ となり結局、(2a) が、

$$\psi(x, y = 1, t) = 0, \quad (2a)'$$

と書き直される。

次に、圧力勾配 $P$ 一定の場合には

$$\begin{aligned} P &= \frac{\Delta P}{L} = \frac{1}{2L} \int_{-1}^1 dy \int_0^L \frac{\partial p}{\partial x} dx \\ &= -\frac{1}{2L} \int_0^L \psi_t(y=1) dx + \frac{\nu}{L} \int_0^L [\Psi'' + \psi_{yy}]_{y=-1}^{y=1} dx \end{aligned}$$

より、

$$\psi_{0,t}(y=1) - \nu[\psi_{0,yy}]_{y=-1}^{y=1} = 0, \quad (4)$$

となる。ただし、 $\psi(x, y, t) = \sum_k \psi_k e^{i\alpha_k x}$ 。

2種類の境界条件に対して平面ポアズイユ流の最大速度を $U_Q, U_P$ と置くと、流量と圧力勾配はそれぞれ

$$Q = \frac{4U_Q h}{3}, \quad P = \frac{-2\nu U_P}{h^2}$$

と表せ、Reynolds 数は

$$Re_Q = \frac{hU_Q}{\nu} = \frac{3Q}{4\nu}, \quad Re_P = \frac{hU_P}{\nu} = -\frac{h^3 P}{2\nu^2}$$

と2通りの表式を得る。

2次元定常進行波解 (TS 波) に対しては、 $t$ に関する周期性から (4) 式の第一項が消える。また、2種類の境界条件はスケールリングを変えるだけで波動解としては同一であり、Reynolds 数に対し関係式

$$Re_P = Re_Q \left(1 - \frac{1}{4} [\psi_{0,yy}]_{y=-1}^{y=1}\right), \quad (5)$$

が得られる。一般には TS 波に対し、 $Re_P > Re_Q$ である事が知られている。

Pugh & Saffman (1988) の解析によると、TS 波解の安定性は 2 種類の境界条件で異なり、流量一定の時はレイノルズ数を小さくしたときに turning point の付近で普通のサドルノード型の分岐が起きるが、圧力勾配一定の場合には、図 1 のような Hopf 分岐を含む解の複雑な変化を示す。線形化方程式の固有値で見れば、図 2 のように

2つの実部が正の複素共役  $\rightarrow$  2つの正の実数  $\rightarrow$  1つの正の実数

という様に変化する。Barkley (1990) はこの結果を用いて、新しいパラメータを導入して流量一定と圧力勾配一定を連続的につなぐ条件を構成し、Normal Form の理論を応用してホモクリニック軌道や縮退した Hopf 分岐の存在を予想している。

また、Jiménez(1987,1990) はスペクトラル法によるシミュレーションで流量一定の条件でも、ホップ分岐から準周期状態 (トーラス)  $\rightarrow$  カオス状態への遷移を見つけている。

### §3. Fourier-Chebyshev 展開による数値解析

§2 で述べた現象を検証するためにスペクトル法を用いた数値解析を展開する。 $x$ 方向は周期性を用いてモード  $N_x$  個で Fourier 展開し、 $y$ 方向にはモード  $N_y + 1$  個で Chebyshev 展開を行うと摂動の渦度と流れ関数は次のように表される。

$$\omega(x, y, t) = \sum_{k=-N_x/2}^{N_x/2-1} \sum_{j=0}^{N_y} \bar{\omega}_{kj}(t) e^{2\pi i \alpha k x} T_j(y), \quad (6)$$

$$\psi(x, y, t) = \sum_{k=-N_x/2}^{N_x/2-1} \sum_{j=0}^{N_y} \bar{\psi}_{kj}(t) e^{2\pi i \alpha k x} T_j(y), \quad (7)$$

但し Chebyshev 多項式  $T_j(y)$  は、

$$T_j(y) = \cos n(\cos^{-1} y)$$

で与えられ、

$$x = x_l = \frac{l}{N_x}, \quad y = y_m = \cos \frac{\pi m}{N_y}.$$

以下では  $(t)$  を省略する。係数  $\bar{\omega}$  は公式

$$\bar{\omega}_{kj} = \frac{2}{N_x N_y \bar{c}_j} \sum_{m=0}^{N_y} \frac{1}{\bar{c}_m} \cos \frac{\pi m j}{N_y} \sum_{l=-N_x/2}^{N_x/2-1} e^{-2\pi i k l / N_x} \omega(x_l, y_m), \quad (8)$$

により実空間での値  $\omega(x_l, y_m)$  から変換される。ただし、

$$\bar{c}_0 = \bar{c}_{N_y} = 2, \quad \bar{c}_1 = \cdots = \bar{c}_{N_y-1} = 1.$$

Chebyshev 展開級数の線形演算に関する公式は知られており、(cf. Gottlieb & Orszag 1977) ここでは以下に必要な公式のみ示す。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x),$$

$$Lf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n(x),$$

とおくと、

$$Lf = f'(x) : b_n = \frac{2}{c_n} \sum_{p=n+1, p+n:\text{odd}}^{\infty} p a_p,$$

$$Lf = f''(x) : b_n = \frac{1}{c_n} \sum_{p=n+2, p+n:\text{even}}^{\infty} p(p^2 - n^2) a_p,$$

$$Lf = x f(x) : b_n = \frac{1}{2} (c_{n-1} a_{n-1} + a_{n+1}),$$

$$Lf = x^2 f(x) : b_n = \frac{1}{4} [c_{n-2} a_{n-2} + (c_n + c_{n-1}) a_n + a_{n+2}].$$

ただし、

$$c_0 = 2, \quad c_n = 1, \quad n > 0; \quad 0, \quad n < 0.$$

これらの関係から、発展方程式のスペクトル表示は次で与えられる。

$$\omega_{kj,t} = \bar{A}_{kj} + \bar{B}_{kj} + \bar{N}\bar{L}_{kj} + \nu \bar{L}_{kj}, \quad k = -N_x/2, \dots, N_x/2 - 1, \quad j = 0, \dots, N_y - 4. \quad (9)$$

ここで、

$$\bar{A}_{kj} = \frac{i\alpha k}{4} [c_{j-2} \bar{\omega}_{k,j-2} + (c_j + c_{j-1} - 4) \bar{\omega}_{k,j+2}], \quad \bar{B}_{kj} = 2i\alpha k \bar{\psi}_{k,j}, \quad (10,11)$$

$$\bar{L}_{kj} = -(\alpha k)^2 \bar{\omega}_{kj} + \frac{1}{c_j} \sum_{p=j+2, p+j:\text{even}}^{N_y} p(p^2 - j^2) \bar{\omega}_{kp}, \quad (12)$$

であり、 $\bar{N}\bar{L}_{kj}$  は非線形項を表す。j に関しては  $N_y - 4$  までしか正確に求められない。

発展方程式は渦度について与えられるので、1ステップ毎に渦度から流れ関数を求める必要がある。 $\omega = -\Delta\psi$ の関係を係数について書くと、偶数モードに対しては、

$$\begin{pmatrix} \bar{\omega}_{k0} \\ \bar{\omega}_{k2} \\ \bar{\omega}_{k4} \\ \vdots \\ \bar{\omega}_{kN_y-4} \end{pmatrix} = M_k^e \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{k0} \\ \bar{\psi}_{k2} \\ \bar{\psi}_{k4} \\ \vdots \\ \bar{\psi}_{kN_y} \end{pmatrix}, \quad k = -N_x/2 - 1, \dots, N_x/2 \quad (13)$$

となる。ここで、 $M_k^e$ は次式で与えられる $(N_y - 1) \times (N_y + 1)$ 行列である。

$$M_k^e = \begin{pmatrix} \sigma & -2(2^2 - 0^2)/c_0 & -4(4^2 - 0^2)/c_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -N_y(N_y^2 - 0^2)/c_0 \\ 0 & \sigma & -4(4^2 - 2^2)/c_2 & \cdots & \cdots & \cdots & -N_y(N_y^2 - 2^2)/c_2 \\ 0 & 0 & \sigma & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma & \frac{-(N_y-2)((N_y-2)^2 - (N_y-4)^2)}{c_{N_y-4}} & \frac{-N_y(N_y^2 - (N_y-4)^2)}{c_{N_y-4}} \end{pmatrix},$$

$[\sigma = (\alpha k)^2]$  これは $N_y/2 - 1$ 個の $\bar{\omega}$ に対し、 $N_y/2 + 1$ 個の $\bar{\psi}$ を決める関係式であり、これだけでは一意に定まらない。しかし境界条件を考慮すれば、流量一定の場合には、

$$\bar{\psi}_{k2} = -2^2\bar{\psi}_{k4} - 3^2\bar{\psi}_{k6} - \cdots - \frac{N_y^2}{2^2}\bar{\psi}_{kN_y}, \quad (14)$$

$$\bar{\psi}_{k0} = (2^2 - 1)\bar{\psi}_{k4} + (3^2 - 1)\bar{\psi}_{k6} + \cdots + \left(\frac{N_y^2}{2^2} - 1\right)\bar{\psi}_{kN_y}, \quad (15)$$

$k = -N_x/2, \dots, N_x/2 - 1$ , なる関係式が得られるので、これより $\bar{\psi}$ を一意に定めることができる。奇数モードに対しても同様の公式が得られる。また、Canuto et al (1986) には、上の関係式を三重対角化して解く方法も述べられている。

また、圧力勾配一定の場合には(2a)'の代わりに(2a)を使うので、(14,15)は $k = 0$ 以外に対して成り立ち、 $k = 0$ では、(2b)と(4)のスペクトル表示を用いる。一般には(4)の時間微分項は残るので、このことから、圧力勾配一定の時は、流量一定の時に比べて、発展方程式の次元が1だけ増加することが結論できる。このことが、Pugh & Saffman (1988)の解析においてつの境界条件で安定性の違いが現れた原因であることが、容易に推察できる。水島、藤村、柳瀬(1988)の計算では圧力勾配一定の場合には流量一定の場合よりも、初期攪乱から平衡解に到達するのに数倍時間がかかることが示されており、このことも解の分岐構造の違いと関連があると思われる。

#### §4. 結果

数値シミュレーションの結果を示す。時間発展は4次のRunge-Kutta法を用い、2/3則でaliasingの誤差を取り除いた。 $\Delta t = 0.02, \alpha = 1.0, Re = \nu^{-1} = 6000, N_x = 8, N_y = 16$ の場合で計算をした。初期条件は、 $(k, j) = (\pm 1, 0), (\pm 1, 2), (\pm 1, 4)$ に対して $O(10^{-3})$ の擾乱を入れ、残りは0とした。今回の計算は流量一定の場合で行った。

擾動のエネルギー $E$ とエンストロフィー $\Omega_e$ はそれぞれ

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L dx \int_{-1}^1 dy (\psi_x^2 + \psi_y^2)$$

$$\Omega_e = \frac{1}{2} \int_0^L dx \int_{-1}^1 dy \omega^2$$

で定義される。図3に $E$ と $\Omega_e$ の時間発展を示す。 $t = 200$ 程度で平衡状態に近づく事がわかった。このときの平衡状態は、TS波のHopf分岐した後の2重周期状態に類似している。渦度の等高線の発展を図4に示す。壁の近傍に強い渦度の擾動が存在し、時間発展とともに壁からはがれていく様子がわかる。これは、シア乱流中ではejection現象と呼ばれているものであり、2次元流でも存在する事がわかった。

#### §5. まとめ

平面ポアズイユ流の2次元定常進行波解の分岐に対する境界条件の影響を考察した。流量一定の条件よりも圧力勾配一定の条件の方が発展方程式の次元が1だけ大きい事を示した。数値解析では、2重周期的な状態に近づくと思われる場合のシミュレーションを行い、2次元の計算でejectionの現象を再現した。今後の課題として、圧力勾配一定の場合でのHopf分岐後の周期解とそのHomoclinic分岐等の存在の検証、カオス状態への遷移の詳細な解析が望まれる。

#### §6. 謝辞

この研究の一部は日立との共同研究の結果である。研究環境を整えて頂いた神部先生に感謝します。

#### §7. 参考文献

Orszag (1971) *J. Fluid Mech.* **50**, 689-703.

Pugh & Saffman (1988) *J. Fluid Mech.* **194**, 295-307.

Barkley (1990) *Phys. Fluids A* **2**, 955-970.

水島、藤村、柳瀬 (1988) *ながれ* 7-3, 259-270.

Jiménez (1987) *Phys. Fluids* **30**, 3644-3646.

Jiménez (1990) *J. Fluid Mech.* **218**, 265-297.

Gottlieb & Orszag (1977) *Numerical Methods of Spectral Methods: Theory and Applications*, Philadelphia: SIAM.

Canuto, Hussaini, Quarteroni, & Zang (1986) *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer.

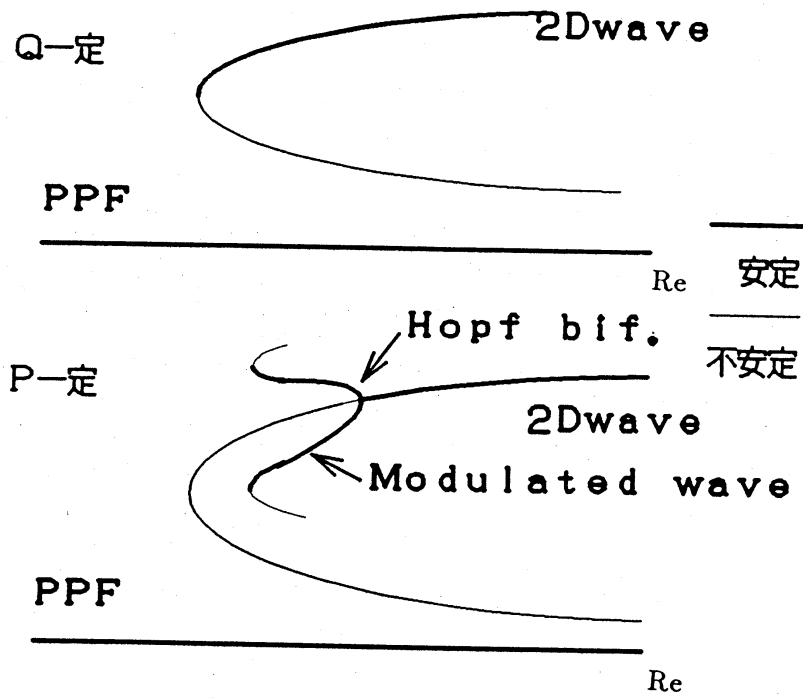


図1: 平面ポアズイユ流の TS 波解の分岐ダイアグラム  
(上: 流量一定、下: 圧力勾配一定)

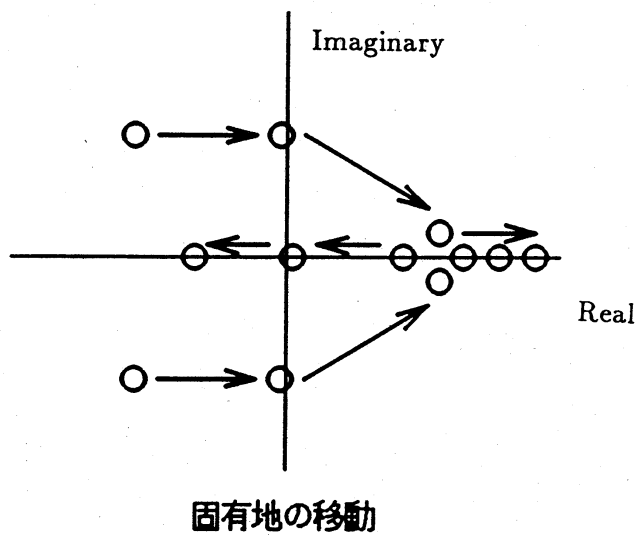


図2: 圧力勾配一定の時の固有値の移動

矢印は TS 波解の振幅を小さくする方向を示す。



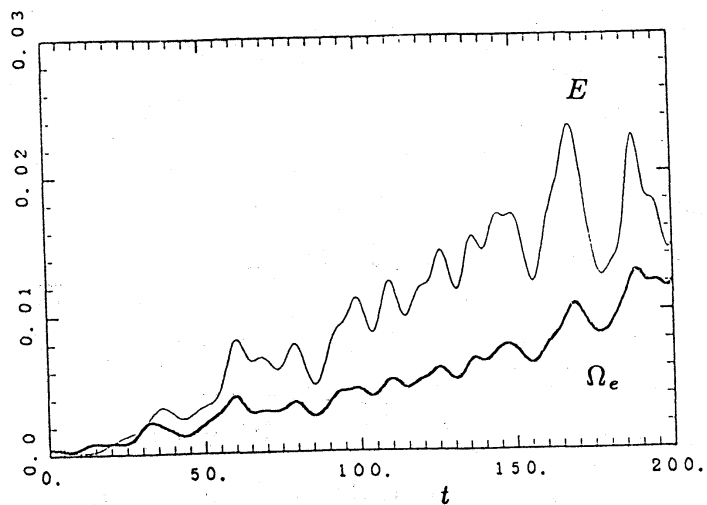


図3: 摂動のエネルギーとエンストロフィーの時間発展

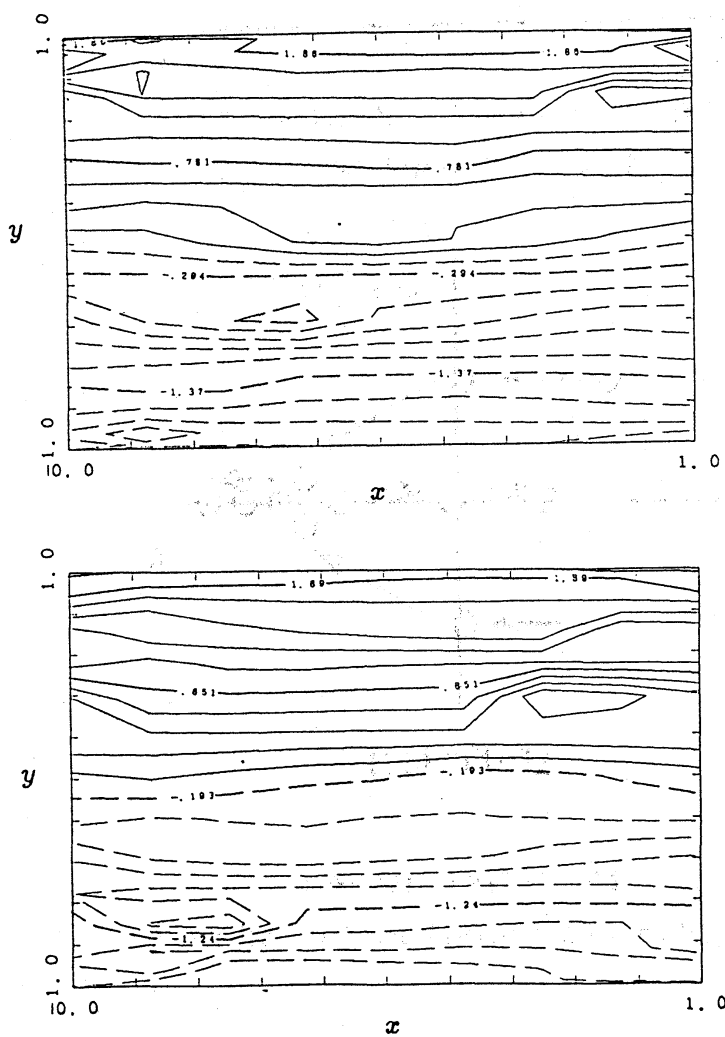


図4: 渦度の等高線 (上:  $t = 180$ , 下:  $t = 188$ )