

微小攪乱に対する Hill の球形渦の3次元応答

東京電機大理工 福湯章夫 (Akio Fukuyu)

東京電機大理工 タシプラト・ロズ (Taxpolat Ruzi)

1. 非粘性流体の渦運動として Hill の球形渦が知られている。Hill の渦に微小攪乱を与えたときの応答については、軸対称攪乱についての Moffatt と Moore の解析 [1] がある。本論文では一般の3次元的な微小攪乱を与えたときの Hill の渦の応答を調べる。

時刻 $t=0$ に Hill の球形渦の表面 $S(t)$ に攪乱が加えられたとする。以後の $S(t)$ を ε を微小パラメータとして

$$r = a(1 + \varepsilon h(\theta, \phi, t)) \tag{1}$$

で表す。 Ω_+ と Ω_- を $S(t)$ の外部、内部領域とする。 $t>0$ での速度場 \mathbf{u} を $\mathbf{u}_H = (u_H, v_H, 0)$ を極座標系 (r, θ, ϕ) での Hill の球形渦に対する速度場として

$$\mathbf{u}(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{u}_H(r, \theta) + \varepsilon \mathbf{u}^\pm(r, \theta, \phi, t) \quad \text{in } \Omega_\pm \tag{2}$$

の形に与える。以後すべての量は球形渦の半径、一様流の速度および流体の密度で無次元化されているとする。

外部領域 Ω_+ で \mathbf{u}^+ は速度ポテンシャル $\Phi(r, \theta, \phi, t)$ を用いて

$$\mathbf{u}^+ = \text{grad } \Phi \tag{3}$$

で表される。

極座標系では $\Phi(r, \theta, \phi, t)$ は球面調和関数を用いて次のように表される。

$$\Phi(r, \theta, \phi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm}^e(t) Y_{nm}^e(\theta, \phi) + A_{nm}^o(t) Y_{nm}^o(\theta, \phi)) r^{n+1} \tag{4}$$

こゝに、

$$Y_{nm}^e(\theta, \phi) = \cos m\phi P_n^m(z), \quad Y_{nm}^o(\theta, \phi) = \sin m\phi P_n^m(z), \quad z = \cos \theta$$

で $P_n^m(z)$ は陪ルジャンドル関数である。このとき $\mathbf{u}^+ = (u^+, v^+, w^+)$ は

$$\left. \begin{aligned} u^+ &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1) A_{nm} Y_{nm} r^{n+2} \\ v^+ &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{nm} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} r^{n+2} \\ w^+ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{A_{nm}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} r^{n+2} \end{aligned} \right\} \text{in } \Omega_+ \quad (5)$$

で与えられる。こゝで簡単のために

$$A_{nm}^e(t) Y_{nm}^e(\theta, \phi) + A_{nm}^o(t) Y_{nm}^o(\theta, \phi) \quad \text{etc.}$$

のかわりに $A_{nm} Y_{nm}$ 等で表した。軸対称変形の場合には内部領域 Ω_- で u^- は非回転的であるが、一般には u^- は回転的である。領域 Ω_- で圧力 p を

$$p = p_H^- + \varepsilon p^- \quad (6)$$

の形に置く。(2)、(6)をオイラー方程式に代入し ε のオーダーの量を取ると

$$\frac{\partial u^-}{\partial t} = -3r \cos \theta u^- + \frac{3}{2r} (1-3r^2) \sin \theta v^- + \frac{3}{2} (1-r^2) \cos \theta \frac{\partial u^-}{\partial r} - \frac{3}{2r} (1-2r^2) \sin \theta \frac{\partial u^-}{\partial \theta} - \frac{\partial p^-}{\partial r} \quad (7)$$

$$\frac{\partial v^-}{\partial t} = -\frac{3}{2r} (1-6r^2) \sin \theta u^- + \frac{3r}{2} \cos \theta v^- + \frac{3}{2} (1-r^2) \cos \theta \frac{\partial v^-}{\partial r} - \frac{3}{2r} (1-2r^2) \sin \theta \frac{\partial v^-}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial p^-}{\partial \theta} \quad (8)$$

$$\frac{\partial w^-}{\partial t} = \frac{3r}{2} \cos \theta w^- + \frac{3}{2} (1-r^2) \cos \theta \frac{\partial w^-}{\partial r} - \frac{3}{2r} (1-2r^2) \sin \theta \frac{\partial w^-}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p^-}{\partial \phi} \quad (9)$$

を得る。また、連続の式は

$$\frac{\partial u^-}{\partial r} + \frac{2u^-}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^-}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta v^-}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w^-}{\partial \phi} = 0 \quad (10)$$

になる。圧力 p^- の式は (7)、(8)、(9) から $\partial u^-/\partial t$ 、 $\partial v^-/\partial t$ 、 $\partial w^-/\partial t$ を消去して

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial p^-}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial p^-}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p^-}{\partial \phi^2} = F(r, \theta, \phi) \quad (11)$$

となる。こゝに、

$$F(r, \theta, \phi) = (-12 \sin \theta v^- - 9r \cos \theta \frac{\partial u^-}{\partial r} - 3r \frac{\partial v^-}{\partial r} + 12 \sin \theta \frac{\partial u^-}{\partial \theta})$$

こゝで u^+ に倣って u^- 、 v^- 、 w^- および p^- を次のように展開する。

$$\left. \begin{aligned} u^-(r, \theta, \phi, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n u_{nm}(r, t) Y_{nm}(\theta, \phi) \\ v^-(r, \theta, \phi, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n v_{nm}(r, t) \frac{\partial Y_{nm}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \\ w^-(r, \theta, \phi, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{w_{nm}(r, t)}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}(\theta, \phi)}{\partial \phi} \\ p^-(r, \theta, \phi, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n p_{nm}(r, t) Y_{nm}(\theta, \phi) \end{aligned} \right\} \text{in } \Omega \quad (12)$$

こゝでも上のように

$$u_{nm}(r, t) Y_{nm}(\theta, \phi) = u_{nm}^e(r, t) Y_{nm}^e(\theta, \phi) + u_{nm}^o(r, t) Y_{nm}^o(\theta, \phi) \quad \text{etc.}$$

を $u_{nm}(r, t) Y_{nm}(\theta, \phi)$ 等で表した。(12)を(7)、(8)、(9)に代入して得られた式の両辺に $\cos m\phi$ または $\sin m\phi$ を掛けて ϕ について積分し、陪ルジャンドル関数の漸化式を用いると

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \left\{ u_{n-1}, u_{n+1}, v_{n-1}, v_{n+1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial r}, \frac{\partial u_{n+1}}{\partial r} \text{ の一次式 } \right\} - \frac{\partial p_n}{\partial r} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial t} &= \frac{(n-2)(n-m-1)(2n+1)}{(n+1)(n+m)(2n-1)} \frac{\partial v_{n-2}}{\partial t} \\ &+ \left\{ u_{n-3}, u_{n-1}, u_{n+1}, v_{n-3}, v_{n-1}, v_{n+1}, \frac{\partial v_{n-3}}{\partial r}, \frac{\partial v_{n-1}}{\partial r}, \frac{\partial v_{n+1}}{\partial r} \text{ の一次式 } \right\} - \frac{1}{r} p_n \quad (14) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} = \left\{ w_{n-1}, w_{n+1}, \frac{\partial w_{n-1}}{\partial r}, \frac{\partial w_{n+1}}{\partial r} \text{ の一次式 } \right\} - \frac{1}{r} p_n \quad (15)$$

の形の式が得られる。方程式系は m について閉じており、 u_{nm}^e 、 u_{nm}^o は独立に同じ方程式を満たすので、以後簡単のために u_{nm}^e 、 u_{nm}^o 等のかわりに u_n 等を用いた。

(14) は $n \geq m+1$ 、について成り立つので $\partial v_{m+1}/\partial t$ の式は(14)に $n=m+1$ を代入

して求まる。 $\partial v_m / \partial t$ に対しては

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{\partial v_n}{\partial t} P_n^m(z) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{r} - 6r \right) \sum_{n=m}^{\infty} u_n \int_{-1}^z P_n^m(x) dx + \frac{3}{2} (1-r^2) \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{v_n}{r} + \frac{\partial v_n}{\partial r} \right) (z P_n^m(z) - \int_{-1}^z P_n^m(x) dx) \\ - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{r} - 2r \right) \sum_{n=m}^{\infty} \{ n(n+1) \int_{-1}^z P_n^m(x) dx - m^2 \int_{-1}^z \frac{P_n^m(x)}{1-x^2} dx \} - \sum_{n=m}^{\infty} \frac{p_n}{r} P_n^m(z) \quad (16)$$

が成り立つので、これから

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{r} - 6r \right) \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n^m u_n + \frac{3}{2} (1-r^2) \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{2m+1}{2m+3} \delta_{n,m+1} - \alpha_n^m \right) \left(\frac{v_n}{r} - \frac{\partial v_n}{\partial r} \right) \\ - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{r} - 2r \right) \sum_{n=m}^{\infty} \{ n(n+1) \alpha_n^m - m^2 \beta_n^m \} v_n - \frac{p_n}{r} \quad (17)$$

を得る。こゝに、

$$\alpha_n^m = \frac{2(2m+1)}{(2m)!} \int_{-1}^1 P_m^m(z) \int_{-1}^z P_n^m(x) dx dz, \quad \beta_n^m = \frac{2(2m+1)}{(2m)!} \int_{-1}^1 P_m^m(z) \int_{-1}^z \frac{P_n^m(x)}{1-x^2} dx dz$$

である。

$p_n(r)$ に対する式は

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dp_n}{dr} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} p_n = f_n(r) \quad (0 < r < 1) \quad (18)$$

である。たゞし、

$$f_n(r) = \frac{(n-1)(n-m)}{2n-1} (12u_{n-1} - 12v_{n-1} - 3r \frac{\partial v_{n-1}}{\partial r}) - \frac{(n+2)(n+m+1)}{2n+3} (12u_{n+1} - 12v_{n+1} \\ - 3r \frac{\partial v_{n+1}}{\partial r}) - \frac{9(n-m)}{2n-1} r \frac{\partial u_{n-1}}{\partial r} - \frac{9(n+m+1)}{2n+3} r \frac{\partial u_{n+1}}{\partial r}$$

(18) の一般解は

$$p_n(r) = ar^n + br^{-(n+1)} + \frac{r^n}{2n+1} \int_1^r r^{-(n-1)} f_n(r) dr - \frac{r^{-(n+1)}}{2n+1} \int_1^r r^{n+2} f_n(r) dr \quad (19)$$

である。

2. u^- に対する境界条件は $S(t)$ における流れの連続性から得られる。

速度場 $\mathbf{u}=(u, v, w)$ について、 u の連続性から ε のオーダーで

$$u^-(1) = u^+(1) \quad \text{したがって} \quad u_n(1) = -(n+1)A_{nm} \quad (20)$$

v の連続性から

$$h(\theta, \phi) = \frac{2}{15 \sin \theta} (v^-(1) - v^+(1)) \quad (21)$$

w の連続性から

$$w^-(1) = w^+(1) \quad \text{したがって} \quad w_n(1) = A_{nm} \quad (22)$$

$S(t)$ は同じ流体粒子で構成されるから圧力および圧力勾配も $S(t)$ で連続である。これから

$$p^-(1) = p^+(1), \quad \frac{\partial p^-(1)}{\partial r} = \frac{\partial p^+(1)}{\partial r} - \frac{45}{2} \sin^2 \theta h(\theta, \phi) \quad (23)$$

を得る。 Ω_+ では Bernoulli 則が成り立つので ε のオーダーで

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + p^+ + \mathbf{u}_H^+ \cdot \mathbf{u}^+ = \text{const.} \quad (24)$$

従って

$$p^+ = p_0 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) \cos \theta u^+ + \left(1 + \frac{1}{2r^3}\right) \sin \theta v^+ \quad (25)$$

(5) を用いると

$$\begin{aligned} p^+ = p_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\partial A_{nm}}{\partial t} \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} Y_{nm} + (1-r^3) \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1) A_{nm} \left(\frac{1}{r}\right)^{n+2} Y_{nm} \\ + \left(1 + \frac{1}{2r^3}\right) \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{nm} \left(\frac{1}{r}\right)^{n+2} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (26)$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^+}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1) \frac{\partial A_{nm}}{\partial t} \left(\frac{1}{r}\right)^{n+2} Y_{nm} + \frac{3}{a} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1) A_{nm} \left(\frac{1}{r}\right)^{n+6} Y_{nm} \\ - \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1)(n+2) \left(\frac{1}{r}\right)^{n+3} Y_{nm} - \frac{3}{2} \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{nm} \left(\frac{1}{r}\right)^{n+6} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$-(1 + \frac{1}{2r^3})\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+2)A_{nm} \left(\frac{1}{r}\right)^{n+3} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \quad (27)$$

特に、 $r=1$ では

$$p^+(1) = p_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\partial A_{nm}}{\partial t} Y_{nm} + \frac{3}{2}\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{nm} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \quad (28)$$

$$\frac{\partial p^+(1)}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1) \frac{\partial A_{nm}}{\partial t} Y_{nm} + \frac{3}{a}\cos\theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1)A_{nm} Y_{nm}$$

$$- \frac{3}{2}\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+3)A_{nm} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \quad (29)$$

となる。 p^+ を

$$p^+(r, \theta, \phi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n p_{nm}^+(r, t) Y_{nm}(\theta, \phi) \quad (30)$$

とすると上と同様にして

$$p_n^+(1) = -\frac{\partial A_n}{\partial t} + \frac{3}{2} \left\{ \frac{(n-1)(n-m)}{2n-1} A_{n-1} - \frac{(n+2)(n+m+1)}{2n+3} A_{n+1} \right\} \quad (31)$$

$$\frac{\partial p_n^+(1)}{\partial r} = (n+1) \frac{\partial A_n}{\partial t} - \frac{3}{2} \left\{ \frac{(n-2)(n+1)(n-m)}{2n-1} A_{n-1} - \frac{(n+2)(n+6)(n+m+1)}{2n+3} A_{n+1} \right\} \quad (32)$$

を得る。こゝでも、簡単のために A_{nm} の代わりに A_n を用いた。(31)、(32)から $\partial A_n / \partial t$ を消去すると

$$\frac{\partial p_n^+(1)}{\partial r} = -(n+1)p_n^+(1) + \frac{3}{2} \frac{(n+1)(n-m)}{2n-1} A_{n-1} + \frac{15}{2} \frac{(n+2)(n+m+1)}{2n+3} A_{n+1} \quad (33)$$

(21)を(23)に代入すると

$$\frac{\partial p_n^-(1)}{\partial r} = -\frac{3(n-1)(n-m)}{2n-1} (v_n^-(1) - A_{n-1}) + \frac{3(n+2)(n+m+1)}{2n+3} (v_{n+1}^-(1) - A_{n+1}) + \frac{\partial p_n^+(1)}{\partial r} \quad (34)$$

が得られ、結局 (33)、(34)、(23) から

$$\frac{\partial p_n^-(1)}{\partial r} = -(n+1)p_n^-(1) + C_n \quad (35)$$

を得る、こゝに、

$$C_n = -\frac{3(n-1)(n-m)}{2n-1}v_{n-1}^-(1) + \frac{3(n+2)(n+m+1)}{2m+3}v_{n+1}^-(1)$$

$$+ \frac{3(3n-1)(n-m)}{2}w_{n-1}^-(1) + \frac{9(n+2)(n+m+1)}{2}w_{n+1}^-(1)$$

(35) は圧力方程式 (18) に対する境界条件である。

条件 (20)、(21)、(22)、(35) はすべてが独立の条件ではないことに注意しよう。実際、(20)、(22) は $\partial u_n/\partial t = -(n+1)\partial w_n/\partial t$ が $r=1$ で成り立つことを意味するが、(35) はこの条件とコンシステントである。

$r=1$ で (35) を満たし $p_n(0) = 0$ なる (18) の解は

$$p_n(r) = \frac{C_n}{2n+1}r^n + \frac{r^n}{2n+1} \int_1^r r^{-(n-1)}f_n(r)dr - \frac{r^{-(n+1)}}{2n+1} \int_0^r r^{n+2}f_n(r)dr \quad (36)$$

となる。

3. こゝでは、 $m=2$ の場合について計算した結果を示す。 $m=2$ のとき

$$\alpha_2^2 = 8, \alpha_3^2 = -\frac{72}{7} \text{ and } \alpha_n^2 = (-1)^n 8 \quad (n \geq 4), \quad \beta_n^2 = (-1)^n 2n(n+1) \quad (n \geq 2)$$

となる。これから

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = \left(\frac{1}{r} - 6r\right) \left\{ \frac{5}{4}u_2 - \frac{45}{28}u_3 + \frac{5}{4} \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n u_n \right\}$$

$$+ (1-r^2) \left\{ \frac{5}{4} \left(\frac{v_2}{r} + \frac{\partial v_2}{\partial r} \right) - \frac{75}{28} \left(\frac{v_3}{r} + \frac{\partial v_3}{\partial r} \right) + \frac{5}{4} \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{v_n}{r} + \frac{\partial v_n}{\partial r} \right) \right\} + \frac{30}{7} \left(\frac{1}{r} - 2r \right) v_3 - \frac{P_2}{r} \quad (37)$$

一方、(2.25) に $m=2$ 、 $n=3$ を代入し

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} = \left(\frac{1}{r} - 6r\right) \left\{ \frac{9}{20}u_2 - \frac{1}{4}u_4 \right\} - (1-r^2) \left\{ \frac{3}{20} \left(\frac{v_2}{r} + \frac{\partial v_2}{\partial r} \right) - \frac{5}{4} \left(\frac{v_4}{r} + \frac{\partial v_4}{\partial r} \right) \right\}$$

$$-\left(\frac{1}{r}-2r\right)\left(\frac{3}{5}v_2-5v_4\right)-\frac{p_3}{r} \quad (38)$$

を得る。 $\partial v_n/\partial t$ の $n \geq 4$ に対する式は (14) に (37)、(38) を順々に代入して得られる。

こゝでは、初期条件として

$$A_2 = 1, \quad A_n = 0 \quad (n \geq 3).$$

を選ぶ。これは、 $t=0$ で

$$u_2(1) = -3, \quad w_2(1) = 1, \quad u_n(1) = w_n(1) = 0 \quad (n \geq 3) \quad (39)$$

を意味する。 $v_n(1)$ は任意である。 \mathbf{u}^- に対する初期条件は (39) と連続の式を満たすように選ぶ。

本論文では一例として ϕ に関して even part のみが励起されたとして

$$u_2(r, 0) = -\left(\frac{21}{2} + 4a\right)r + \left(\frac{15}{2} + 4a\right)r^3, \quad v_2(r, 0) = -\left(\frac{21}{4} + 2a\right)r + \left(\frac{25}{4} + 8a\right)r^3,$$

$$w_2(r, 0) = -\left(\frac{21}{4} + 2a\right)r + \left(\frac{25}{4} + 2a\right)r^3, \quad u_4(r, 0) = 4a(r^3 - r^5), \quad v_4(r, 0) = a(r^3 - \frac{7}{5}r^5), \quad w_4 = \frac{5}{7}a(r^3 - r^5),$$

$$u_n(r, 0) = 0, \quad v_n(r, 0) = 0, \quad w_n(r, 0) = 0 \quad (n=3 \text{ or } n \geq 5)$$

なる初期条件を採用する。 a は任意である。このとき、 $t=0$ で

$$h(\theta, \phi) = \left(\frac{31}{10} + \frac{2}{5}a\right) \frac{dP_2^2(z)}{dz} \cos 2\phi - \left(\frac{3}{50} + \frac{2}{45}a\right) \frac{dP_4^2(z)}{dz} \cos 2\phi$$

が成り立つ。これが初期攪乱を与える。 $t > 0$ での h は (21) から

$$h(\theta, \phi, t) = \frac{2}{15 \sin \theta} \sum_{n=2}^{\infty} (v_n^-(1, t) - w_n^-(1, t)) \frac{dP_n^2}{d\theta} \cos 2\phi$$

で計算できるはずであるが、右辺の級数は $\theta=0, \pi$ 付近で非常に収束性が悪いので、こゝでは別の方法を用いる。

$S(t)$ は同じ流体粒子から構成されるので

$$\frac{D}{Dt} (r - 1 - \epsilon h(\theta, \phi, t)) = 0$$

が成り立つ。これから、

$$\frac{\partial h}{\partial t} = u^{-1}(1, t) + 3 \cos \theta h + \frac{3}{2} \sin \theta \frac{\partial h}{\partial \theta}$$

を得る。これは、形式的には(21)とコンシステントである。本論文ではこの偏微分方程式を数値積分して $h(\theta, \phi, t)$ を求めた。

方程式系(13)、(14)、(15)は n について閉じていないので、これを数値積分するには $n > N$ を無視して閉じた方程式系にしなければならない。こゝでは $N=60$ とした。また、 r については $0 \leq r \leq 1$ を160等分した差分式を用いた。時間積分は4次の Runge-Kutta 法を適用した。

Moffatt-Moore [1] によれば、球形渦を長円形に変形すると、後部よどみ点付近で渦度を持った流体が針のような形に流出する。彼らはこれを spike とよんだ。逆に、初期にへん円形に変形すると、後部よどみ点付近から非回転流体が球形渦の中に流入する。

図は上の初期攪乱に対する応答を示したものである。図は $\phi=0$ の断面での表面の形 $h(\theta, 0, t)$ の時間発展を示した。 $\theta=0$ は後部よどみ点に対応する。 $t=0$ で与えられた攪乱が時間とともに後流側に流され、後部よどみ点に近づくにつれて指数関数的に増大している。初期攪乱のピークが後流側に流されたあとは、攪乱は減衰しているようである。 $m=2$ に注意すると、 $h(\theta, \pi, t) = h(\theta, 0, t)$ 、さらに、 $h(\theta, \pi/2, t) = h(\theta, 3\pi/2, t) = -h(\theta, 0, t)$ が成り立つ。従って、時間の経過とともに、後部よどみ点付近で Moffatt-Moore のいう spike に対応する形が現れるが、この場合ある部分で回転流体が流出すると、回転軸のまわりに90度回転した部分では逆に非回転流体が流入することになる。従って、時間とともに後部よどみ点付近の $S(t)$ は非常に特異な形になる。

文献

- [1] Moffatt, H.K. and D.W. Moore, J. Fluid Mech. 87 (1978) 749

