

## Coupled Map Lattice for Convection

### — 熱対流の現象論 —

総合研究大学院大 柳田達雄 (Tatsuo Yanagita)

東大教養 金子邦彦 (Kunihiko Kaneko)

#### 1 はじめに

熱対流現象は容器の形状やレイリー数等の変化にともない、層流状態から複雑かつ多様な振舞いをしながら乱流化する [1]。アスペクト比を小さくしロール数を 2-3 個に制限した場合、プラントル数や容器の形状により周期倍化、準周期運動、間欠運動、トーラス倍化などの分岐をへてカオス状態となる。また、アスペクト比が大きい場合はロール数が増し空間自由度が大きくなるため、このようなカオスへの道筋は見られにくくなり、パターン競合が生じ乱流化する。また、十分発達した乱流になる前に弱乱流状態があり、温度分布関数の形により分類される [2]。このように多種多様な現象を理解するためのアプローチとして Navier-Stokes 方程式、Ginzburg-Landau 型方程式等を基礎とした解析が行われている。

現象を記述するモデルは定性的解析を主目的とするものと、定量的解析を主目的とするものに大別することができ、このような複雑な振舞いに対しては定性的性質を支配するダイナミクスを明かにするのが理解への第一歩である。定性的性質は現象を記述する方程式系の細部によらない普遍性を持つ。すなわち、現象の定性的性質を再現するモデルは 1 つではなく、ある範囲のモデル族として存在する。したがって、モデルに多少の変更を加えても定性的性質に影響はない。このような観点に立つと定性的性質の説明には必ずしも Navier-Stokes 方程式を基礎とする必要はない。むしろ、Navier-Stokes 方程式は定量的解析に用いるべきである。しかし、数値的安定性や演算時間等

の問題があるため複雑系の理解には困難が多いようである。また、Ginzburg-Landau 型方程式はソフト-ハード乱流遷移等のような高レイリー数状態の解析には適用できない。我々は上に述べた広範囲にわたる現象の定性的性質を支配する動力学を理解するために対流現象をモデル化し解析を行った。

定性的解析を目的としたモデルを構築する場合、Coupled Map Lattice (CML) が有効である [3]。CML は時間空間が離散化され連続変数である場の量からなる力学系である。CML は多くの物理現象を記述するモデルとして用いられ [4]、スピノーダル分解 [5] や沸騰遷移過程 [6] の記述に成功している。特にスピノーダル分解では定量的にも良く一致する。CML モデルは計算時間が速いため、対流の多種多様な現象を数多く調べられるばかりでなく、構成論的にモデルの構築ができるため現象を支配しているダイナミクスを明らかにすることができる。

## 2 モデル

ここでは、場の量としてエネルギー  $E$ 、速度場  $\vec{v}$  を考え、対流のダイナミクスとして重要と思われる、浮力、拡散、粘性、 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  を保つための圧力の効果を導入し、Euler スキームと移流項を表す Lagrange スキームを導入した。Euler スキームは以下のような“手続”きからなる。

### 1. 浮力

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad (1)$$

### 2. 粘性、圧力効果

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \vec{v} + \eta \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (2)$$

### 3. 拡散

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \kappa \nabla^2 E \quad (3)$$

以上の Euler 手続きを中心差分で逐次実行した後、移流項  $((\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}, (\vec{v} \cdot \nabla)E)$  を表現するための Lagrange 写像を行う。各格子点上  $i$  に準粒子を考え、この準粒子はその格子点での速度  $\vec{v}_i$  にしたがって位置  $i + \vec{v}$  に移動し、場の量 (ここではエネルギー  $E$  と速度  $\vec{v}$ ) を運搬する。一般的に移動先は格子点上ではないため、場の量は移動した点の4つの近接格子点に準粒子と近接格子点との距離に比例させて分配される。ここでは、境界での粒子の運動は反射条件を課し、Euler スキームでは自由、固定境界条件を課した。

### 3 数値実験

始めに2次元のモデルでの数値実験の結果を報告する。このモデルはレイリー数に対応する  $\Delta E = E_{Bottom} - E_{Top}$  の増加とともに熱伝導状態からある臨界値を越えると対流状態となり、複雑かつ多様な分岐を経てカオス状態となる。実験においてカオスへの分岐現象はアスペクト比を小さくし空間自由度を制限したときに観測され、プラントル数などの違いによって異なったカオスへの道筋が選択される [7]。例えば、周期倍化からカオス状態となる道筋はプラントル数 (熱拡散係数と粘性率の比) が小さい場合に観測され [8]、プラントル数の大きい場合にはロールの準周期振動 (トーラス運動) からトーラスの崩壊によってカオス状態となる [9]。また、ロール数を制限することによって、同じプラントル数でも間欠運動からカオス化する場合もある [10]。

我々のモデルにおいても、プラントル数に対応する熱拡散係数と粘性率の比  $\mu/\kappa$  が小さい場合に周期倍化運動が観測され、プラントル数が大きくなると  $\mu/\kappa = 100$  トーラス運動からカオス化する道筋や間欠運動が見られる。さらに、準周期運動の低周波数の振動が周期倍化を起こしてカオス状態となるトーラス倍化も観測される (図 1)。特に、周期倍化運動においては8周期運動までしか観測されない。一般に実験での分岐の不完全性は、外部の熱的ノ

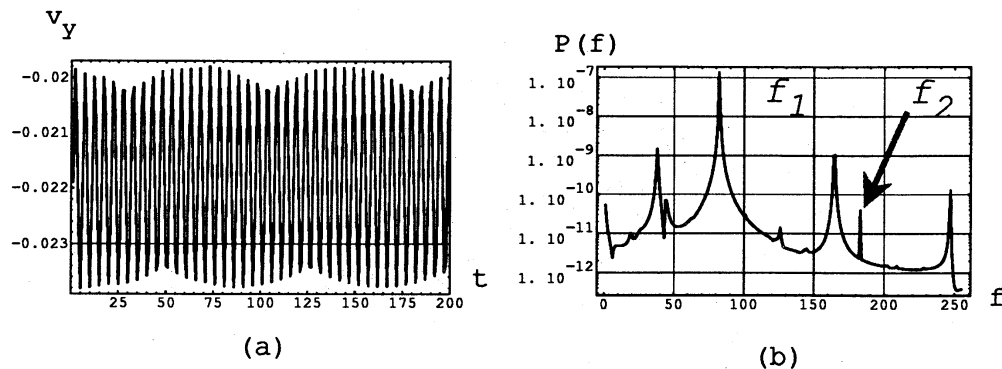


図 1: 準周期運動

アスペクト比 1.0、プラントル数  $\mu/\kappa = 100$  の場合、ロールが周期  $f_1$  で振動し、 $\Delta E$  の増加とともに  $f_1$  とは独立な周期  $f_2$  が出現し準周期運動を行う。この場合、 $f_1$  が周期倍化を起こし（トーラス倍化） $f_1/2$  の周期が観測されている。(a)  $\Delta E = 0.5$  での中心点  $(L_x/2, L_y/2)$  での速度の鉛直成分  $v_y$  の時間変化。(b) 時間変化 (a) のパワースペクトラム

イズが原因と考えられているが、我々のモデルには外部ノイズはない。それにもかかわらず周期倍化が不完全である原因として、大自由度力学系が自らの内的ノイズを生成し分岐の不完全性を作り出していると考えられる。システムにノイズを入れた実験で分岐現象に大きな影響がでないことから、不完全性は流体固有のものであると、J.P.Gollub は指摘している [11]。

また、ロールが 2 個の場合、ロールの回転方向が間欠的に反転する (図 2)。反転運動が起こる臨界点では、多くの時間を空間自由度の小さい層流状態 (低自由度アトラクター) として過ごし、フラストレーションがたまりロール構造が崩壊し空間自由度の大きい乱流的状态 (大自由度カオス) となった後、新たに回転方向が選択されるカオスの遍歴を行う (図 3)。このようなカオスの遍歴運動は、Navier-Stokes 方程式を小数のモードで展開した Lorenz 系 [12] のようなシステムでは見ることができない大自由度系の特徴である。

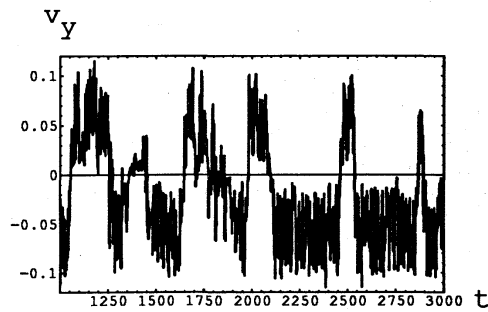


図 2: ロールの間欠的反転運動

アスペクト比=2、 $\mu/\kappa = 100$ 、 $\Delta E = 0.3$  中心点での鉛直速度成分の時間変化。速度成分の符号が時間とともに変わり、ロールの反転運動が間欠的に起こる。反転するとき図 3 に見るように空間的に乱れた状態となる。

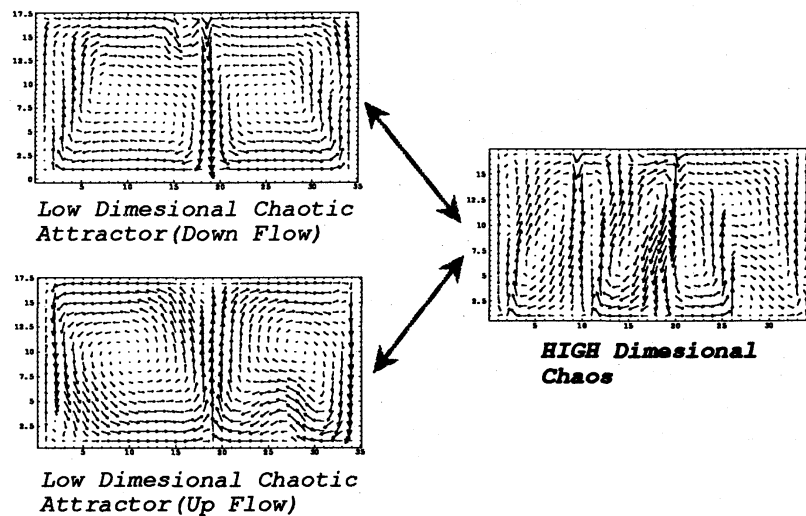


図 3: ロール反転運動のカオスの遷移

臨界点において、長時間にわたり 2 個のロール構造の低自由度アトラクターに絡みつき、フラストレーションが臨界値に達すると一挙に大自由度乱流状態となり、新たな回転方向が選択される。

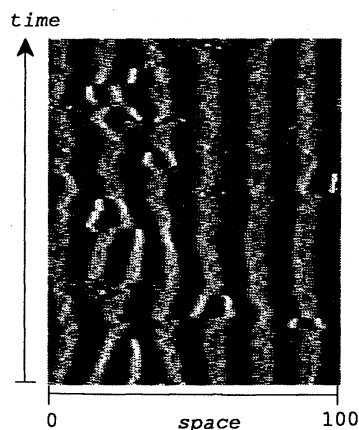


図 4: 時間空間間欠運動

2次元モデルの  $y = L_y/2$  断面における  $v_y$  の時間変化。白は上昇流を黒は下降流を表す。時間空間的に乱れが生じていることがわかる。

アスペクト比の増加にともないロール数が増し空間自由度が増大するため、上述したカオスへの道筋は見られなくなり時間空間間欠運動 (STI) が見られる (図 4)。レイリー数の増加にともないロール全体が振動し始めるが周期倍化を起こすことなく時間空間的に間欠的に乱れた状態が起こる。STI は実験系 [13][14] で観測されているばかりでなく Coupled Logistic Lattice 等の空間的にひろがりを持つ系が乱流化するときに見られる普遍現象の一つである。

さらに  $\Delta E$  を増加させるとプリュームが生じ始めロール構造が崩壊し空間的に乱れた構造となる (図 5)。この乱流状態はある点での温度変化の分布関数によって特徴づけられ、レイリー数の増加にともない分布はガウス型から指数型へと変化する [2]。我々のモデルにおいても、このソフト-ハード遷移を再現し (図 6)、分布の違いはプリュームが反対側の境界まで到達することができるかどうかに関係していることが解る。

このモデルの三次元への拡張は容易で、パターン形成、パターン競合によるカオス、欠陥カオス、さらに乱流への変化等を調べることができる。三次

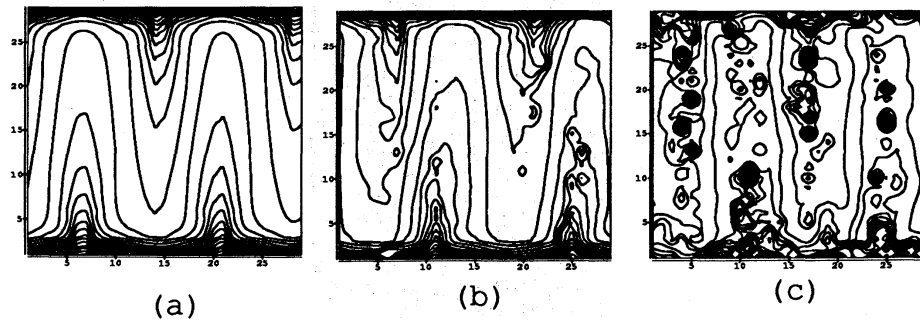


図 5:  $\Delta E$  の増加に伴う温度場の変化

$\Delta E$  の増加にともないブリュームが発生し乱流化する。(a)  $\Delta E = 1.0$  対流状態 (b)  $\Delta E = 3.0$  ソフト乱流 (c)  $\Delta E = 10$  ハード乱流

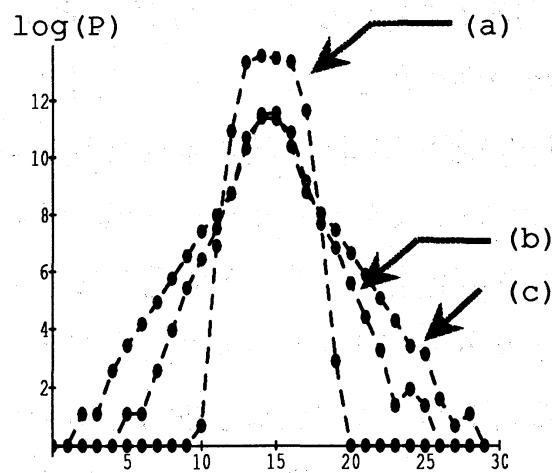


図 6: ソフトーハード乱流遷移

中心点  $(L_x/2, L_y/2)$  で観測した温度の分布関数。  $\Delta E$  の増加にともない温度分布はガウス型分布 (a)  $\Delta E = 3.0$  から指数型 (b)(c)  $\Delta E = 5.0, 10.0$  に遷移をし、実験事実とよく一致する。

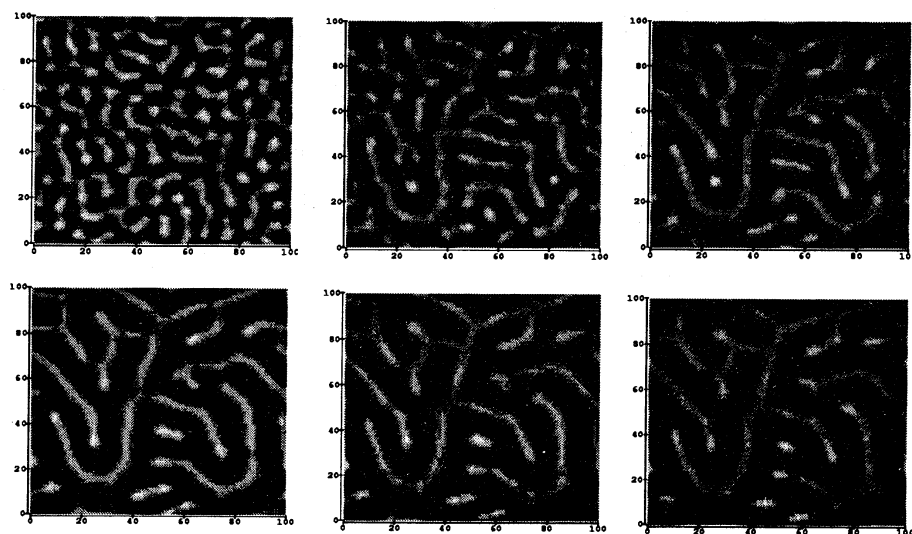


図 7: 三次元モデルのパターン形成

$z = L_z/2$ での断面での鉛直速度成分の時間発展。  $\Delta E = 1.0$ で300ステップ毎のスナップショット。

元モデルの空間パターンの時間変化を図7に示す。パターン形成の初期段階では短時間内に大域的構造が形成されるが、ロール欠陥の消滅には非常に長時間の時間発展を必要とする。さらに  $\Delta E$ が増加すると形成されるパターンが異なり競合が観測される。

熱対流系を回転させると遠心力とコリオリ力の効果が入り新たな不安定性が生じ、地球流体の簡単な場合としてみることができる。このモデルに遠心力とコリオリ力を入れることは容易で、Lagrange 写像をのみを変更すればよい。回転数の変化にともない、ロール構造に変化が見られる(図8)。

#### 4 まとめ、今後の課題

アスペクト比が小さく空間自由度が大きくない場合、実験系で観測される周期倍化、準周期運動などの多様な乱流への遷移過程が見られ、プラントル



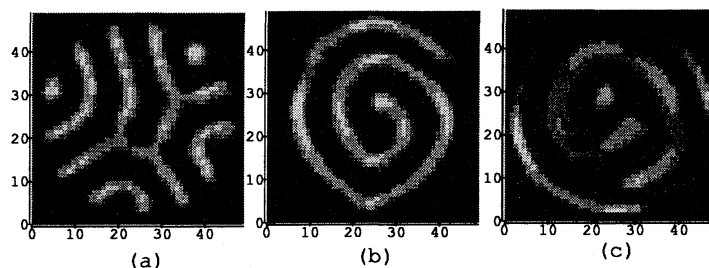


図 8: 3次元回転系

回転数の変化にともなう空間パターンの変化:  $\Delta E = 1.0$  で回転数  $\Omega$  は (a)0.001、(b)0.004、(c)0.008

数依存性も定性的によく一致する。実験において分岐現象やロールの振動の振舞い等のプラントル数依存性が調べられているが、広範囲にわたる探索は困難であるためあまり明らかにされていない。このモデルを用いた広範囲にわたるプラントル数などの依存性を調べることにより新しい知見が得られる事が期待される。また、ロールの反転で観測された小数自由度-大自由度遍歴の特徴付けも今後の課題である。このような遍歴運動はロール数が4-5個でもロール数の選択というかたちで現れ大自由度系の特徴として重要である。3次元系ではパターン形成にともなうスケージングなどのより定量的解析は今後の課題である。パターン競合は Ginzburg-Landau 型方程式系で数多く研究されているが、Rayleigh 数の高い乱れた状態の研究には適さず、このモデルを用いた解析は有効と思われる。

さらに、ここで報告した熱対流系以外においても、CML を用いた定性的解析は有効である。特に、相転移現象を伴う沸騰 [6] や雲のダイナミクス、またシアーフローや Kármán 渦とそれらの崩壊に伴う乱れの空間的伝達機構の解析に有効と思われる。

## 参考文献

- [1] P.Manneville. *Dissipative Structure and Weak Turbulence*. Academic Press, 1990.
- [2] M.Sano X.Z.Wu A. Libchaber. *Phys.Rev.A*, 40, 1989.
- [3] K.Kaneko. *Simulating Physics with Coupled Map Lattice*, volume 1 of *Formation, Dynamics and Statistics of Patterns*. World Scientific, 1990.
- [4] K.Kaneko. *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative System*. World Scientific, 1983.
- [5] Y.Oono and S.Puri. Study of phase-sepaeration dynamics by use of cell dynamical systems. 1. modeling. *Phys.Rev.*, 38A, 1988.
- [6] T. Yanagita. *BUSSEI KENKYUU*, 57-3, 1991.
- [7] A.Libchaber J.Maurer. *A Ryleigh Bénard Experiment: Helium in a small box*. Non-linear phenomena at phase transitions and instabilities. Plenum Pub., 1982.
- [8] J.Maurer A.Libchaber. *J. de Physique Colloques*, 41-C3, 1980.
- [9] M.Dubois P.Bergé. *J. Physique Letters*, 42, 1981.
- [10] S.V.Benson J.P.Göllub. Many routes to turburant convection. *J.Fluid Mech.*, 100, 1980.
- [11] J.P.Gollub J.F.Steinman. External noise and the onset of turbulent convection. *Phys. Rev. Lett.*, 45, 1980.
- [12] E.N.Lorenz. Determinstic non-periodic flow. *J.Atmos.Sci.*, 20, 1963.
- [13] S.Ciliberto P.Bigazzi. Spatiotemporal intermittency in rayleigh-bénaard convection. *Phys. Rev. Lett.*, 60, 1988.
- [14] F.Daviadu M.Bonetti and M.Dubois. Transition to turbulence via spatiotemporal intermittency in one-dimensional rayleigh-bénard convection. *Phys. Rev. A*, 42-6, 1990.