

### 流体乱流における非ガウス分布の渦糸の Random Advection モデルによる説明

東工大理 田口善弘 (Yoshi-hiro Taguchi)  
神戸大理 高安秀樹 (Hideki Takayasu)

流体乱流は物理の分野でも残された重大な課題である [1, 2]。特に、最近の多自由度を伴った非線形現象の研究の発展にともなって、乱流は多くの物理学者が関心を持っているテーマとなっている。

非ガウスの確率分布関数 (PDF) の出現は乱流現象の本質を反映しているのではないかとされている。この問題は最近、多くの物理学者によって研究されているが [3, 4, 5] 仮定がいろいろと入っている。例えば、mapping closure [4, 5] では乱流状態をうまく記述できる「マップ」の存在を仮定しているし、文献 [3] では、その存在自体が良く理解されていないマルチフラクタルを仮定している。現在までのところ、基礎方程式 (例えば、Navier-Stokes 方程式) から出発して非ガウス分布を説明するような理論は直接数値積分するやりかた [6] 以外は存在しない。

この小論は、指数的な分布関数の出現を渦管の Random Advection によって説明するものである。このため我々は、渦管描像に基づいた乱流の格子モデルを提案する。そして、それを単純化することにより、渦管の相互作用を考えない単純な Random Advection であっても、指数型の分布を作ることができることを示唆する。

最初に連続極限では非圧縮流体の渦度方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \bar{\omega} &= (\bar{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \bar{\omega}, \\ \text{rot} \mathbf{v} &= \bar{\omega}, \\ \text{div} \mathbf{v} &= 0,\end{aligned}$$

に収束するような格子モデルの作り方を説明する [7]。ここで、 $\mathbf{v}$  は速度であり、 $\bar{\omega}$  は渦度、 $\nu$  は粘性である。これを行なうために渦管を単純立方格子の上に配置する。各ボンドはそのボンドの方向に沿った渦度成分のみを持つとする。つまり、 $x$  ボンドは  $x$  成分のみをもち、 $y, z$  ボンドも同様である。よって、我々のモデルでは、有限の (ゼロでない) 強さの渦度を持つボンドの連なりが渦管の configuration を表すことになる。動力学は渦度方程式に等価になるように定義する (Fig. 1)。各ボンドはボンドの midpoint の座標を持つとしよう。そこで、強さ  $\omega_z(\mathbf{r})$  の渦度を持つ位置  $\mathbf{r}$  にある  $z$  ボンドを考えよう。そして、このボンド上の速度を  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r})$  とする。ケルビンの定理 [8] によって、渦度は流体と共に流れなくてはならない。したがって、 $\omega_z$  は 6 本の近接している  $z$  ボンドに分配される。つまり、 $\mathbf{r} \pm \hat{\mathbf{i}}$  にある  $z$  ボンドは  $\pm J_{iz} \Delta t / 2$  の強さの分だけ渦度が増える。ここで、 $\hat{\mathbf{i}}$  は  $x, y, z$  方向の単位ベクトルであり、 $J_{ij}$  は渦度の流れ  $\tilde{v}_i \omega_j$  である。渦度のながれのまへの因子  $1/2$  と符号は、対象性を回復し渦度方程式に一致させるために必要である。しかし、このままでは物理的に意味のある状態は得られない。なぜなら、渦管が閉じたループを形成していないと対応する速度場が得られないからである。そこで、ループを形成するために渦度を付け加えることにする。位置  $\mathbf{r} \pm \hat{\mathbf{i}}/2 \pm \hat{\mathbf{z}}/2$  にある  $i$  ボンドに  $\mp J_{iz} \Delta / 2$  だけ渦度を加える。ここで、位置ベクトルの 2 つの符号はとりうる 4 通りの組合せをとり、渦度の流れの符号は  $\hat{\mathbf{z}}$  の符号の逆符号をとることにする。この結果  $z$  方向の流れは打ち消しあい、Fig. 1 に示されるような構造が残る。

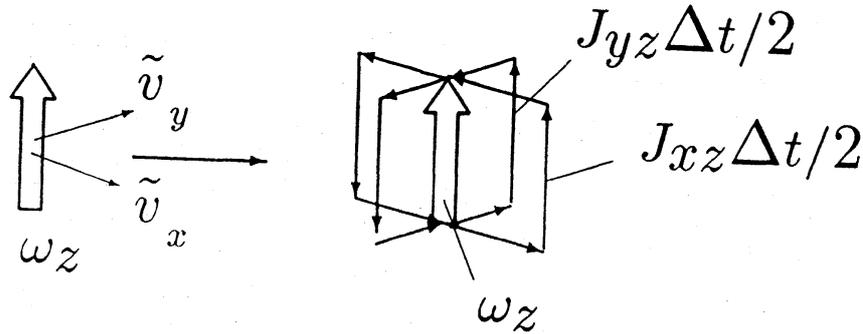


Figure 1: 渦管の動力学。矢印の方向は符号を表す。(本文を見よ)

このような動力学は恣意的過ぎておかしく思われるかも知れないが、連続極限をとると、渦度方程式に帰着することは示されている [7]。もし、速度場を渦管間の Biot-Saveier 相互作用によって決められるような速度場にすれば、このモデルは乱流のうまいシミュレータになることもすでに示した [7]。実際、乱流の様々な性質が再現される。特に PDF は他の手法で得られたのと良く一致している。 $v_x$  の PDF はガウス [1, 6],  $\omega_x, \partial v_x / \partial x, \partial v_x / \partial y$  の PDF は指数分布的になる [6]。更に、もし、ハイパスフィルターを使って高波数成分のみを拾い出すと  $v_x$  そのものの PDF も指数的になる [9]。

これらの非ガウスの PDF を説明するため、モデルの単純化を試みよう。もし、単純化されたモデルにおいても、同じような PDF が得られた場合には、それらの起源は両者（もとのモデルと単純化されたモデル）の共通点にあると思えるだろう。このため、ある特定の大きさの  $\omega_j$  を持つボンドのうえの  $\tilde{v}_x$  の条件つき分布関数を求めてみた。Fig. 2 がそれであるが、驚いたことに（流体においては既知の事実かも知れないが）この PDF はほとんど  $\omega_j$  にはよらない。これは、0 次の近似においては渦管の相関を無視できることを示している。

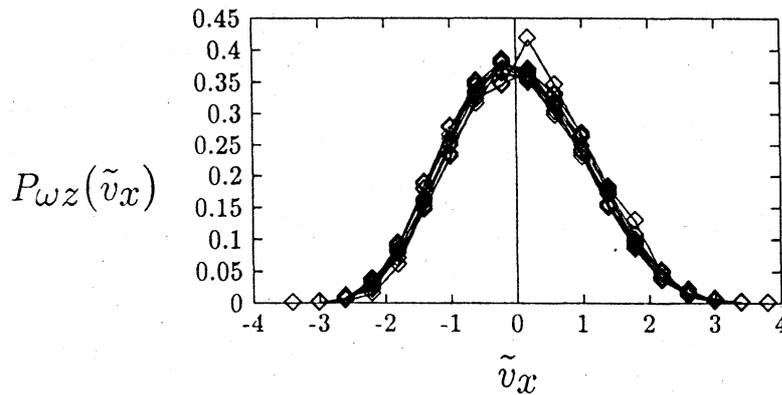


Figure 2: 条件つき PDF (決まった値の  $\omega_z$  を持つボンド上の  $\tilde{v}_x$ )。絶対値が分散の 2 倍以下に入るような様々な値の  $\omega_z$  に対して、示した。 $\int \tilde{v}_x^2 P(\omega_z) P_{\omega_z}(\tilde{v}_x) d\omega_z d\tilde{v}_x = 1$ 。となるように、規格化されている。

そこで、我々は、ガウス分布に従う全くランダムな  $\tilde{v}$  を用いてシミュレーションを行なってみた。 $\tilde{v}$  は時間についてもランダムであるとする。シミュレーションは  $24^3$  のサイズの周期的境界条件の格子で行なうことにする。 $\Delta t$  の決め方は元のモデルの時と同じである [7]。初期条件は元のモデルで用いられた外力に対応する渦度場を用いる。他の手

続き（粘性、外力、エネルギー保存のための規格化）は、省略する。以下のデータは全て独立な10回のRUNについての平均であり、誤差棒は $\sigma$ である。まず、 $\omega_x$ のPDFを200ステップと700ステップの時に示した（Fig.3）。

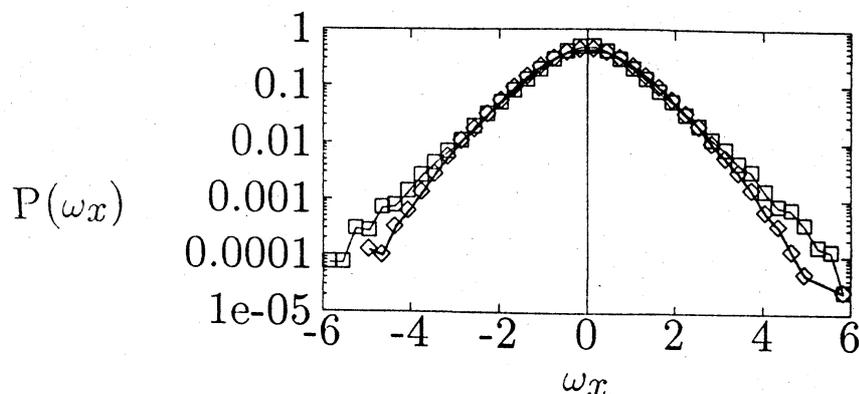


Figure 3:  $\omega_x$ のPDF;  $\diamond$ は200ステップ,  $\square$ は700ステップ

大まかに言って、これらは大体、指数型分布であり700ステップの方が指数分布に近い。この結果を更に補強するためこの渦度分布から得られる速度場 $\mathbf{v}$ を計算し、それから様々な分布関数を計算した（Fig. 5）。

明らかに $v_x$ 自体の分布関数は成長し切っていない。ガウス分布から程遠いし、ガウス分布に収束する様子も見られない。はっきり言って、このPDFは初期条件の分布関数（元のモデルでは外力に相当する）の形からあまり変わっていない。しかし、低波数成分が取り除かれるやいなや指数分布が出現する。200ステップですでに大体収束していることが解る。外力はもともと低波数成分しか含まないので[7]、これらの高波数成分は明らかにRandom Advectionによって、つくられたものである。この $v_x$ の分布自体に含まれている隠された指数型分布関数は実際の乱流でも観測されている[9]。 $\partial v_x / \partial x$ のPDFの時間発展を見れば指数型PDFの形成は高波数側から始まることが解るであろう。これは次のように考えると解る。 $E(k)$ を $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ のエネルギースペクトルとしよう。すると一階の微分のスペクトルは $k^2 E(k)$ となり、高波数成分が強調されることになる。これより、シミュレーションを永遠に続ければ $v_x$ のPDF自身も指数型に収束していくことが想像できる。

さて、ではこのモデルはこれ以上単純化できないのであろうか。更に、単純化して渦管であると言う点（3次元空間内で切れないでつながるループをなすと言う条件）をも切捨てよう。スカラー量がRandom Advectionで輸送されるというだけのモデル

$$\omega_i(t + \Delta t) = \omega_i(t) - |v_i| \omega_i \Delta t + \sum_{\langle i,j \rangle} |v_j| \omega_j(t) \Delta t$$

を計算する。ここで、 $\langle i,j \rangle$ は隣合う2つのペアをとるのであるが、 $v_j$ の符号によって取り方を変える。もし、 $v_j$ が正ならば $j = i - 1$ をとり、 $v_j$ が負ならば $j = i + 1$ をとる。以下の計算は、周期境界条件の1次元格子で行なったが、多次元への拡張は容易であろう。Fig. 4に数値シミュレーションで求めた $\omega_i$ の分布関数を示す。

条件はサイト数10000、 $\Delta t = 0.5$ 、 $v_i$ は区間 $[-0.5, 0.5]$ の一様乱数である。ここでもまたおなじみの分布関数が出現していることが解る。

以上の結果は以下のことを強く示唆する。

指数型分布関数の出現条件は速度場の詳細にはよらない。advectionがランダムになるくらい乱れていさえすれば良い。

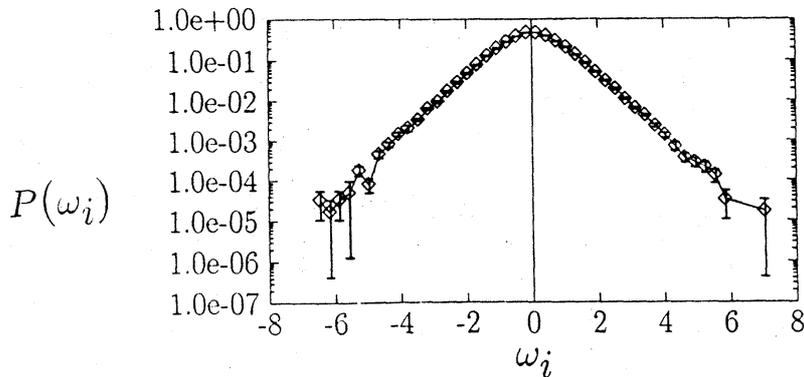


Figure 4: 更に、単純化された Random Advection モデルによって求めた PDF。分散が 1 になるように規格化されている。

また、大きなユニバーサリティークラスがあり、それが熱対流に見られるような指数分布 [10] をも包含する可能性もある。Sinai と Yaghot によって指摘されたように [11] 熱対流中の分布関数もまた、Random Advection によって再現可能である。これらの指数型 PDF は Random Advection という同じメカニズムで作り出されるのかも知れない。もしそうであれば、確率過程の問題としても興味つきないところであろう。

## References

- [1] G. K. Batchelor, Theory of Homogeneous Turbulence (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1953).
- [2] A. S. Monin and A. M. Yaglom, Statistical Fluid Mechanics (MIT, Cambridge, 1975).
- [3] R. Benzi, L. Biferale, G. Paladin, A. Vulpiani and M. Vergassola, Phys. Rev. Lett. **67**, 2299 (1991).
- [4] Z-S. She, Phys. Rev. Lett. **66**, 600 (1991).
- [5] R.H. Kraichnan, Phys. Rev. Lett. **65** 575 (1990)
- [6] S. Kida and Y. Murakami, Fluid Dynamics Research **4**, 347 (1989).
- [7] Y-h. Taguchi and H. Takayasu, submitted to Physica D.
- [8] L. D. Landau and E.M. Lifshitz, Fluid Mechanics (Pergamon Press, Oxford, 1979) p14.
- [9] Z-S. She, E. Jackson and S.A. Orszag, J. Sci. Comp., **3**, 407 (1988).
- [10] A. Pumir, B. Shraiman and E.D. Siggia, Phys. Rev. Lett. **66**, 2984 (1991), および、本講究録中の「Coupled Map Lattice for Convection」(柳田・金子)を参照。
- [11] E.D. Sinai and V. Yaghot, Phys. Rev. Lett. **63**, 1962 (1989).

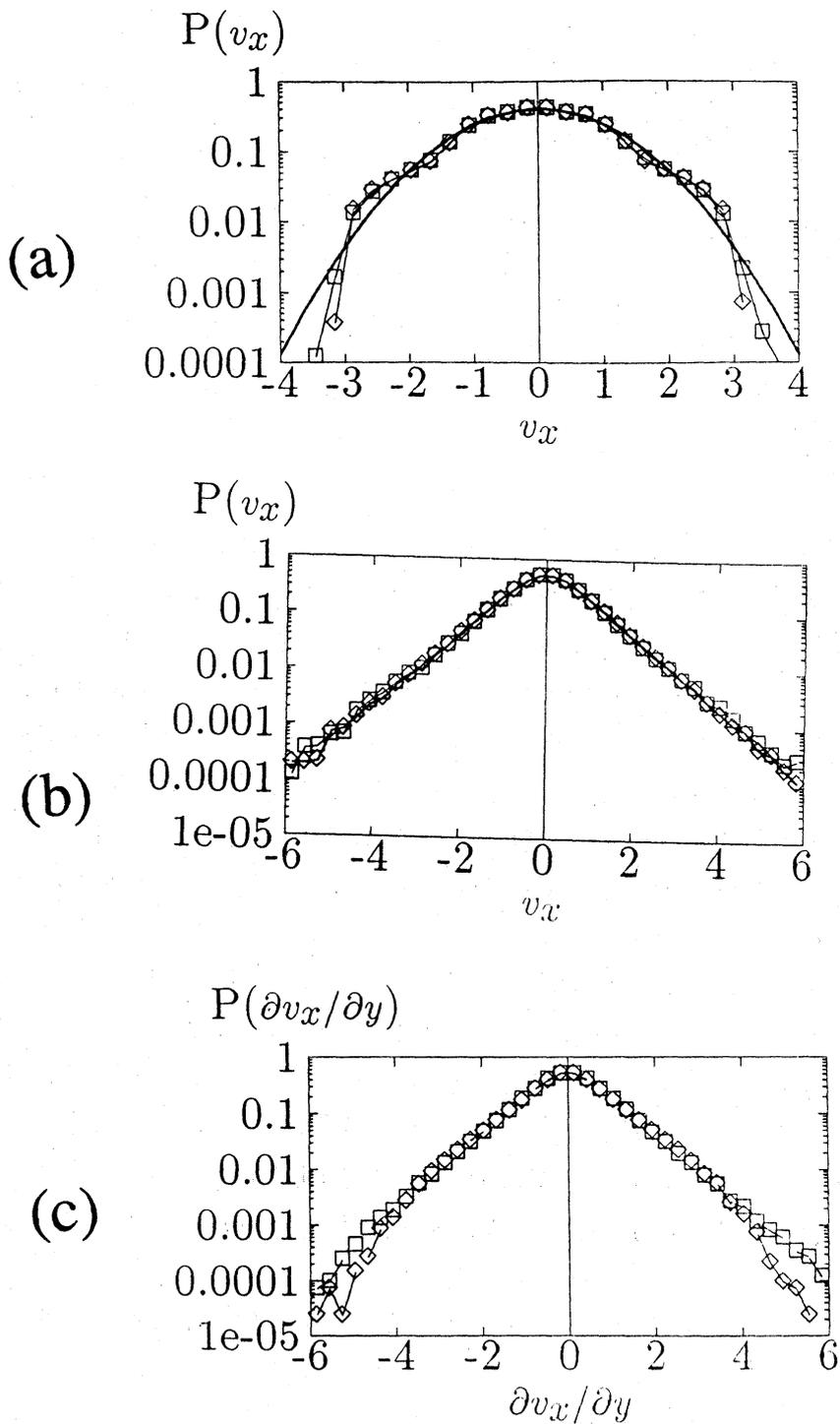


Figure 5: 様々な PDF (a)  $v_x$ , (b) その高波数成分 (c)  $\partial v_x / \partial y$ . 記号の意味は Fig. 3と同じ。分散が1になるように規格化してある。高波数成分の PDF はハイパスフィルター  $|k| \geq 2\pi/3$  で計算した。