数理解析研究所講究録
第 801 巻 1992 年 52-63

Del Pezzo 曲面と特異点

阪大理 宮西正宜 (Masayoshi Miyanishi)

1. 以下，基礎体は複素数体である。$\bar{V}$ を $\mathbb{C}$ 上定義された，射影的正規代数曲面とする．$\bar{V}$ の特異点は高々商特異点で，$-K_{\bar{V}}$ が ample であるとき，$\bar{V}$ は log del Pezzo 曲面であるという。このとき，$\bar{V}$ が Gorenstein である (i.e., $K_{\bar{V}}$ が Cartier 因子) 必要十分条件は，$\bar{V}$ の特異点が高々有理二重点であることである．$\bar{V}$ の Picard 数 $\rho(\bar{V}) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Pic}(\bar{V}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が 1 であるとき，$\bar{V}$ の階数は 1 であるという．

Gorenstein log del Pezzo 曲面 $\bar{V}$ については，その特異点の組み合せ，i.e., $\mathrm{Sing}(\bar{V})$ の ADE 型の組み合せ，については，日高－渡辺 [2]，Demazure [1] 等によって，よく知られている。ここでは，$\bar{V} - \mathrm{Sing}\,\bar{V}$ の基本群，普遍被覆空間等の位相的性質を，$\mathbb{C}^2$ の Gorenstein compact 化と関連づけて論じる。このような試みは，log del Pezzo 曲面に高次の商特異点を許した場合や，有理二重点をもつ log Enriques 曲面につい

て行われている。Zhang [5, 6] を参照されたい。今後、このような方向の研究が深まることを期待したい。

$\bar V$ を log del Pezzo 曲面，$f : V \to \bar V$ を特異点の極小解消，$\Sigma = \mathrm{Sing}\,\bar V$, $D = f^{-1}(\Sigma)$ (= 例外曲線), $V^\circ = \bar V - \Sigma \cong V - D$ とおく。

補題 1. 次の完全列がある。

(1) $0 \to \mathrm{Pic}(\bar V) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Pic}(V) \xrightarrow{res} H^2(D;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(V^\circ;\mathbb{Z}) \to 0$

(2) $0 \to H_2(D;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(V) \longrightarrow Cl(\bar V) \longrightarrow 0$.

ここで，$Cl(\bar V)$ は $\bar V$ の因子類群で，$Cl(\bar V) \cong H^2(V^\circ;\mathbb{Z})$.

(3) $0 \to Cl(\bar V)/\mathrm{Pic}(\bar V) \longrightarrow H^2(D;\mathbb{Z})/H_2(D;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(V^\circ;\mathbb{Z}) \to 0$.

[証明] (1) V は非特異有理曲面，D は非特異有理曲線の tree であることに注意して，pair (V, D) と $(\bar V, \Sigma)$ の cohomology 完全列と Lefschetz duality から，次のように得られる。

$$
\begin{tikzcd}
\overset{(0)}{\overset{\parallel}{H^1(D;\mathbb{Z})}} \arrow[r] & H^2(V,D;\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^2(V;\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^2(D;\mathbb{Z}) \arrow[r] & \underset{\underset{H_1(V_0;\mathbb{Z})}{\wr\|}}{H^3(V,D;\mathbb{Z})} \arrow[r] & \underset{\underset{(0)}{\parallel}}{H^3(D;\mathbb{Z})} \\
\underset{\underset{(0)}{\parallel}}{H^1(\Sigma;\mathbb{Z})} \arrow[u] \arrow[r] & H^2(\bar V,\Sigma;\mathbb{Z}) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\simeq"] & H^2(\bar V;\mathbb{Z}) \arrow[u] \arrow[r] & \underset{\underset{(0)}{\parallel}}{H^2(\Sigma;\mathbb{Z})} \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

$$H^2(V;\mathbb{Z}) \simeq H^1(V, \mathcal{O}_V^*) \simeq \mathrm{Pic}(V), \quad H^2(\bar V;\mathbb{Z}) \simeq H^1(\bar V, \mathcal{O}_{\bar V}^*) \simeq \mathrm{Pic}(\bar V)$$

(2) pair (V, D) の homology 完全列

$$
\begin{tikzcd}
H_3(V,D;\mathbb{Z}) \arrow[r] & H_2(D;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\beta"] & H_2(V;\mathbb{Z}) \arrow[r] & \underset{\underset{H^2(V^\circ;\mathbb{Z}) \simeq Cl(\bar V)}{\wr\|}}{H_2(V,D;\mathbb{Z})} \arrow[r] & \underset{\underset{(0)}{\parallel}}{H_1(D;\mathbb{Z})}
\end{tikzcd}
$$

において，$D=C_1+\cdots+C_n$ を既約分解とすれば，$\beta: H_2(D;\mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}[C_i] \longrightarrow H_2(V;\mathbb{Z}) \simeq H^2(V;\mathbb{Z})$ は，$\beta([C_i]) = \mathcal{O}_V(C_i)$ で与えられる．D は可縮であるから，$\{\mathcal{O}_V(C_i);\ 1\leqq i\leqq n\}$ は独立である．よって，β は単射である．

(3) (1) の完全列

$$
\begin{array}{c}
0 \longrightarrow H^2(\overline{V};\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(V;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(D;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(V^\circ;\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\
\uparrow\beta \\
H_2(D;\mathbb{Z})
\end{array}
$$

において，$\beta(H_2(D;\mathbb{Z})) \cap H^2(\overline{V};\mathbb{Z}) = (0)$ となることを注意すれば，(3) の完全列が得られる． ∎

補題 2．$\overline{V}$ を Gorenstein log del Pezzo 曲面とすると，次の事柄が成立する．

(1) $-K_V = f^*(-K_{\overline{V}})$。よって，$-K_V$ は nef 因子で，$(-K_V^2)>0$.

(2) $V = \mathbb{P}^2$, Σ_m $(m=0,1,2)$ 又は V は $\mathbb{P}^2$ の高々 8 点の blowing-up である。

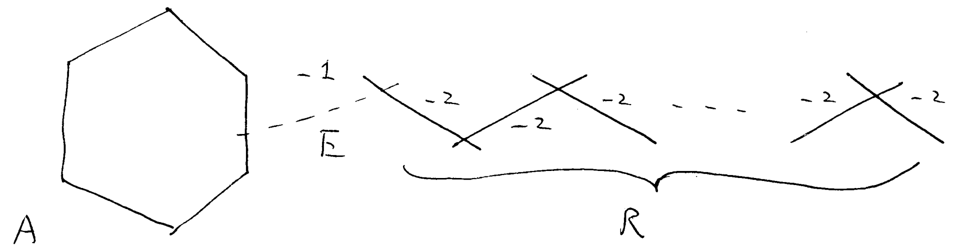
(3) V には $(-n)$ 曲線 $(n\geqq 3)$ は存在しない。[$(-n)$ 曲線とは，自己交叉数 $-n$ の非特異有理曲線である。] また，f は V 上のすべての (-2) 曲線の contraction である．

(4) $|-K_V|$ には，smooth member A がある。よって，$(V, A+D)$ は飯高曲面である．

[一般に，$(V, A+D)$ が飯高曲面であるとは，A が $|-K_V|$ の既約な正規交叉因子，D が有理二重点の例外曲線，$A\cap D=\phi$

となることである。]

飯高曲面 $(V, A+D)$ について，(-1) 曲線 E と D の連結成分 R が存在して，$E+R$ は $E+D$ の連結成分で，E は $A+R$ と次の図のように交わっているとしよう。



このとき，$E+R$ は非特異代数曲面 V_1 上の点 P_1 に contract されて，A_1, D_1 で A, D の像を表せば，(V_1, A_1+D_1) は再び飯高曲面になる。このような contraction を <u>$(-1)+D$ 型の contraction</u> という。

<u>補題</u> 3. $\overline{V}$ を Gorenstein log del Pezzo 曲面とすると，Gorenstein log del Pezzo 曲面 $\overline{W}$ と双有理射 $\eta: \overline{V} \to \overline{W}$ が存在して，次の性質をみたす。

(1) $\overline{W}$ の Picard 数 $\rho(\overline{W})$ は 1 か 2 である。

(2) $\overline{W}$ には，(より正確には，$\overline{W}$ の特異点の極小解消 W 上には)，$(-1)+D$ 型 contraction を許す (-1) 曲線は存在しない。$\overline{W}$ は <u>relatively minimal</u> であるという。

(3) η の例外曲線を $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_t$ とすると，$w_i := \eta(\overline{E}_i)$ は $\overline{W}$ の smooth point である。また，$\overline{E}_i \cap \mathrm{Sing}\,\overline{V}$ は，空集合でな

けれは゛, A型特異点 x_i で, $w_i = \bar{\eta}(x_i)$.

(4) $\rho(\bar{V}) = \rho(\bar{W}) + t$, $8 \geqq 9 - (K_{\bar{V}}^2) \geqq (K_{\bar{W}}^2) - (K_{\bar{V}}^2) = \sum_{i=1}^{t} (n_i + 1)$.

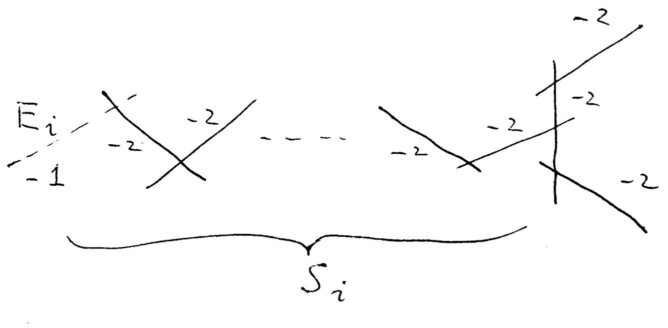
ただし, 点 x_i は A_{n_i} 型であるとする.

(5) $\mathrm{Sing}\,\bar{V} = \mathrm{Sing}\,\bar{W} + \sum_{i=1}^{t} A_{n_i}$.

(6) $\pi_1(V^\circ) \simeq \pi_1(W^\circ)$. ただし, $W^\circ = \bar{W} - \mathrm{Sing}\,\bar{W}$.

[証明] (-1)+D型のcontractionを, 可能な限り繰り返して得られる非特異代数曲面をW, 縮約射を $\eta : V \to W$ とすると, η から自然に, 双有理射 $\bar{\eta} : \bar{V} \to \bar{W}$ が誘導される. (-1)+D型のcontractionにおいて, Dの連結成分Rは, $\bar{V}$ 上のA型の有理二重点の例外曲線である. ∎

補題4. $\bar{V}$ を, relatively minimal である, Gorenstein log del Pezzo 曲面とする。このとき, $V = \bar{V}$ ならば, $V \cong \Sigma_0 (= \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ である. $V \neq \bar{V}$ ならば, $\rho(\bar{V}) = 1$ 又は 2. $V \neq \bar{V}$, $\rho(\bar{V}) = 2$ とすると, V は $\mathbb{P}^1$-fibration $\Phi : V \to \mathbb{P}^1$ をもち, Φ には高々3本の特異ファイバーしかない。それらを $S_1, \dots, S_k$ $(1 \leqq k \leqq 3)$ とすると, 各 S_i は次のように表せる.



さらに, $D = \bigcup_{i=1}^{k} (S_i - E_i)$, $\#D$ (= Dの既約成分の数) $\leqq 7$.

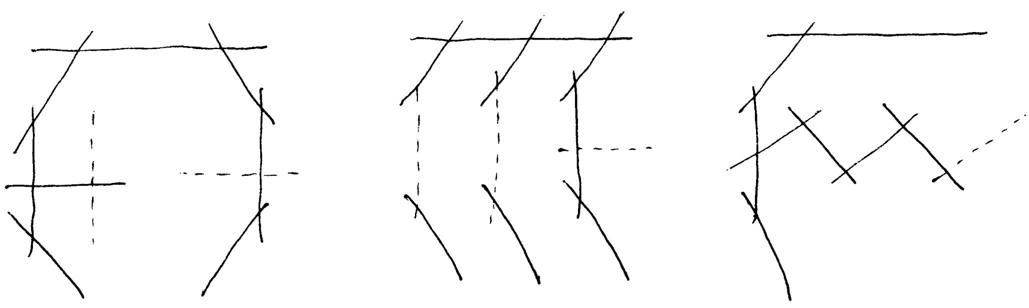
よって，$\{k; \#(S_1), \cdots, \#(S_k)\} = \{3; 3, 3, 3\}, \{3; 3, 3, 4\}, \{2; 3, 3\}, \{2; 3, 5\}, \{2; 3, 6\}, \{2; 4, 4\}, \{2; 4, 5\}, \{1; 5\}, \{1; 7\}, \{1; 8\}$．したがって，$\bar{V}$ の特異点集合は次の様に与えられる．

$$\mathrm{Sing}(\bar{V}) = 6A_1,\ 4A_1+A_3,\ 4A_1,\ 2A_1+D_4,\ 2A_1+D_5,\ 2A_3,\ A_3+D_4,\ D_4,\ D_6,\ D_7$$

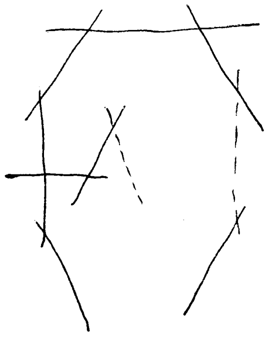
補題 5．$\bar{V}$ を $\rho(\bar{V})=1$ の Gorenstein log del Pezzo 曲面とすると，次の事柄が成立する．

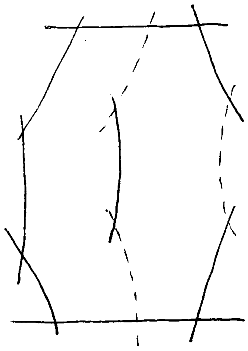
(1) $\mathrm{Sing}\,\bar{V} = A_1,\ A_1+A_2,\ A_4,\ 2A_1+A_3,\ D_5,\ A_1+A_5,\ 3A_2,\ E_6,\ 3A_1+D_4,\ A_7,\ A_1+D_6,\ E_7,\ A_1+2A_3,\ A_2+A_5,\ D_8,\ 2A_1+D_6,\ E_8,\ A_1+E_7,\ A_1+A_7,\ 2A_4,\ A_8,\ A_1+A_2+A_5,\ A_2+E_6,\ A_3+D_5,\ 4A_2,\ 2A_1+2A_3,\ 2D_4$．特に，$\#D \leq 8$ である．

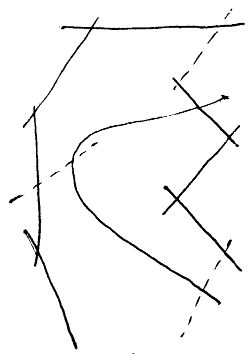
(2) V は $\mathbb{P}^1$-fibration $\Phi: V \to \mathbb{P}^1$ をもつ．Φ は Hirzebruch 曲面の $\mathbb{P}^1$-束 $\pi: \Sigma_2 \to \mathbb{P}^1$ から，blowing-up によって得られる．$\#D=8$ の場合に，$\Phi: V \to \mathbb{P}^1$ を図示すると次の様になる．ただし，$\mathbb{P}^1$-ファイバーは縦方向のファイバーとして表されている．

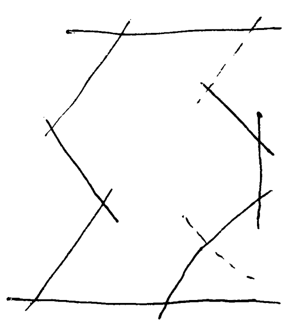


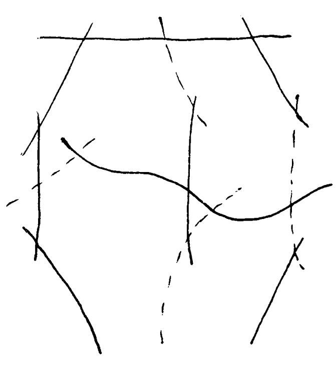
D_8　　　$2A_1+D_6$　　　E_8

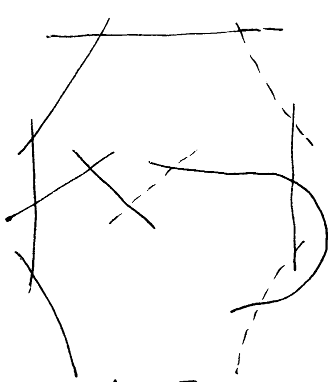

A_1+E_7

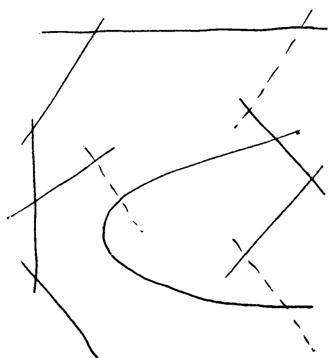

A_1+A_7

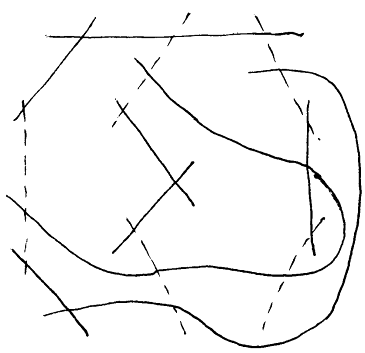

$2A_4$

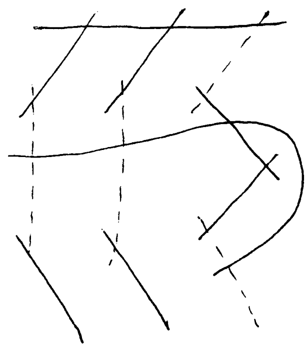

A_8

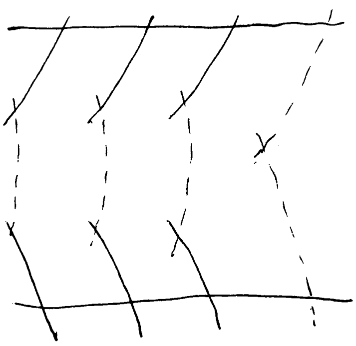

$A_1+A_2+A_5$


A_2+E_6


A_3+D_5


$4A_2$

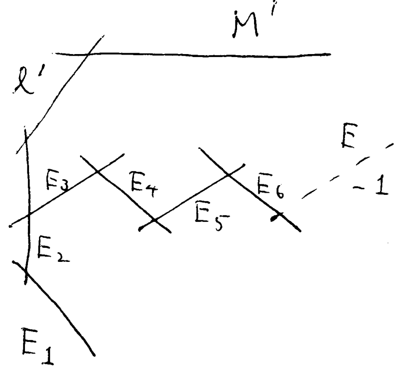

$2A_1+2A_3$


$2D_4$

ここで，実線は(−2)曲線を，破線は(−1)曲線を表す。Dの既約成分は，$\mathbb{P}^1$束のファイバー成分，section 又は 2-section である。

補題6. $\bar{V}$ を $\rho(\bar{V})=1$ の Gorenstein log del Pezzo 曲面とすると, Sing $\bar{V} = 2D_4$ の場合を除いて, $\bar{V}$ は Dynkin type で同型を除いて唯一通りに定まる。

[証明] Sing $\bar{V} = E_8$ の場合を考える。Dの既約成分を図のように名づけると, 特異ファイバーの(-1)曲線から始めて, E_1 を除いてDの成分をすべて縮約できる。縮約射を σ とすると, $\sigma(V) = \mathbb{P}^2$ で, $\sigma(E_1) = L$ は直線, $\sigma(E_2 + \cdots + E_6 + E + l' + M') = P_1$ はL上の点である。$\mathbb{P}^2$ 上の非斉次座標 $(1, x, y)$ を, $L : y = 0$, $P = (1, 0, 0)$ となるように取ると, 上の図形(または, 逆に blowing-up の中心)は $y = \sum_{i=3}^{7} a_i x^i$ の係数 a_i を指定することによって与えられる。しかるに, これらの data は射影変換に関して, 互いに推移的である。 ∎



2. Gorenstein log del Pezzo 曲面の準普遍被覆空間

$\bar{V}$ を Gorenstein log del Pezzo 曲面, $V^\circ = \bar{V} - \mathrm{Sing}\,\bar{V}$ とする。$\pi_1(V^\circ)$ が有限群であるとすれば, V° の普遍被覆 $U^\circ \to V^\circ$ は代数的 étale 被覆である。U° の関数体 $\mathbb{C}(U^\circ)$ における, $\bar{V}$ の正規化を $\bar{U}$ と表すと, $\pi : \bar{U} \to \bar{V}$ は有限被覆である。正確には, Galois 群が $\pi_1(V^\circ)$ の Galois 被覆である。これを, $\bar{V}$ の

準普遍被覆(quasi-universal covering)という。

補題 7. (1) $\overline{U}$ は Gorenstein log del Pezzo 曲面である。

(2) $d=\deg\pi$, $\varphi: U\to\overline{U}$ を特異点の極小解消, $r=\varphi$ の例外曲線の既約成分の数とすれば, $\rho(\overline{U})+r+d(K_{\overline{V}}^2)=10$.

とくに, $|\pi_1^{alg}(V^\circ)|<+\infty$.

(3) V° が affine-ruled (i.e., V° の Zariski 開集合として, $T\times\mathbb{A}^1$ (T はアフィン曲線) に同型なものがある) ならば, $U^\circ:=\varphi^{-1}(\pi^{-1}(V^\circ))$ も affine-ruled である。

補題 8. Gorenstein log del Pezzo 曲面 $\overline{V}$ について, 次の事柄が成立する。

(1) $\pi_1(V^\circ)$ は有限 Abel 群である。したがって, $\pi_1(V^\circ)\cong H_1(V^\circ;\mathbb{Z})\cong H^3(V,D;\mathbb{Z})$.

(2) $\eta:\overline{V}\to\overline{W}$ を補題3のようにとれば, $\pi_1(V^\circ)\simeq\pi_1(W^\circ)$.

(3) $\rho(\overline{V})=1$ の場合, $\pi_1(V^\circ)$ と $\rho(\overline{U})$ は次表で与えられる。

Dynkin 型	$\pi_1(V^\circ)$	$\rho(\overline{U})$	Dynkin 型	$\pi_1(V^\circ)$	$\rho(\overline{U})$
A_1	0	1	A_1+A_2	0	1
A_4	0	1	$2A_1+A_3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	1
D_5	0	1	A_1+A_5	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2
$3A_2$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	1	E_6	0	1

Dynkin 型	$\pi_1(V^\circ)$	$\rho(\bar{U})$	Dynkin 型	$\pi_1(V^\circ)$	$\rho(\bar{U})$
$3A_1+D_4$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	1	A_7	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	3
A_1+D_6	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	E_7	0	1
A_1+2A_3	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	2	A_2+A_5	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	3
D_8	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	3	$2A_1+D_6$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	3
E_8	0	1	A_1+E_7	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2
A_1+A_7	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	5	$2A_4$	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$	5
A_8	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	5	$A_1+A_2+A_5$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	4
A_2+E_6	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	3	A_3+D_5	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	4
$4A_2$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	1	$2A_1+2A_3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	2
$2D_4$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	4			

(4) $\rho(\bar{V})=2$ の場合，$\pi_1(V^\circ)$ と $\rho(\bar{U})$ は次表で与えられる。

Dynkin 型	$\pi_1(V^\circ)$	$\rho(\bar{U})$	Dynkin 型	$\pi_1(V^\circ)$	$\rho(\bar{U})$
$6A_1$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	2	$4A_1+A_3$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	4
$4A_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$2A_1+D_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	3
$2A_1+D_5$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	3	$2A_3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	4
A_3+D_4	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	4	D_4	0	2
D_6	0	2	D_7	0	2

補題8の結果を踏まえて，次のように定義する．

<u>定義</u>　$\overline{V}$ を $\rho(\overline{V})=1$ の Gorenstein log del Pezzo 曲面とする．

$$\overline{V} \text{ が I 型} \iff \pi_1(V^\circ)=(0)$$

$$\overline{V} \text{ が II 型} \iff \pi_1(V^\circ)\neq(0),\quad \rho(\overline{U})=1$$

$$\overline{V} \text{ が III 型} \iff \pi_1(V^\circ)\neq(0),\quad \rho(\overline{U})>1$$

このとき，次のような特徴づけが得られる．

<u>補題9</u>　$\overline{V}$ を $\rho(\overline{V})=1$ の Gorenstein log del Pezzo 曲面とする．このとき，次の事柄が成立する．

(1)　$\overline{V}$ が I 型 $\iff$ $\overline{V}$ は $\mathbb{C}^2$ の Gorenstein compact 化で，$\overline{V}-\mathbb{C}^2$ は既約である．

(2)　$\overline{V}$ が II 型 $\iff$ $PGL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群 G が存在して，$\overline{V}=\mathbb{P}^2/G$ と表せる．

Sing $\overline{V}$ と G の対応は次の通りである：

$$G=\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longleftrightarrow \operatorname{Sing}\overline{V}=2A_1+A_4$$

$$G=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longleftrightarrow \operatorname{Sing}\overline{V}=3A_2$$

$$G=D_8 \ (8\text{次の2面体群}) \longleftrightarrow \operatorname{Sing}\overline{V}=3A_1+D_4$$

$$G=(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2} \longleftrightarrow \operatorname{Sing}\overline{V}=4A_2$$

(3)　$\overline{V}$ が III 型 $\Longrightarrow$ $\overline{V}\neq\mathbb{P}^2/G$，$G\subset PGL(2,\mathbb{C})$．

Gorenstein log del Pezzo 曲面と，$\mathbb{C}^2$ の Gorenstein compact 化

の間には，より一般に次の結果が成立する．

<u>定理</u>10．$\bar{V}$ を Gorenstein log del Pezzo 曲面として，$V^{\circ} := \bar{V} - \mathrm{Sing}\,\bar{V}$ に含まれる (-1) 曲線はないと仮定する。このとき，$\bar{V}$ が $\mathbb{C}^2$ の Gorenstein compact化 である必要十分条件は，$\pi_1(V^{\circ}) = (0)$ となることである．

References

1. M. Demazure, Surfaces de del Pezzo, Lecture Notes in Mathematics 777, Spinger 1980.
2. F. Hidaka and K. Watanabe, Normal Gorenstein surfaces with ample anti-canonical divisor, Tokyo J. Math. 4 (1981), 319-330.
3. M. Miyanishi and D. Q. Zhang, Gorenstein log del Pezzo surfaces of rank one, J. Algebra 118 (1988), 63-84.
4. M. Miyanishi and D. Q. Zhang, Gorenstein log del Pezzo surfaces, II, to appear in J. Algebra.
5. D. Q. Zhang, Logarithmic del Pezzo surfaces with rational double and triple singular points, Tôhoku Math. J. 41 (1989), 399-452.
6. D. Q. Zhang, Logarithmic Enriques surfaces, J. Math. Kyoto Univ., 31 (1991), 419-466.