数理解析研究所講究録
第801巻1992年122-133


# Verma の問いについて

名古屋大学理学部　吉田　健一(Ken-ichi Yoshida)

## §0 Introduction

この報告の中では、(A, m, k)はCM local ring とし、#k = ∞とする。

このとき、Aが minimal muliplicity (CM with m.m.)を持つとは、

$v = e + d - 1$　ここに、$v = \mathrm{emb}(A)$, $d = \dim A$, $e = e(A)$.

が成立することと定義する。

<u>Definition</u>(0.1)(reduction exponent)

I, JをAの ideal とする。

JがIの minimal reduction とするとき、

$r_J(I) = \inf\{n \geq 0 \mid I^{n+1} = JI^n\}$.

$r(I)=\inf\{r_J(I) \mid J: I$ の minimal reduction$\}$.

これを I の <u>reduction</u> <u>exponent</u> と呼ぶ。

A の ideal I を固定したとき、

$S=A[It]$, $T=A[It, t^{-1}]$, $G=gr_I(A)$ とおく。

また、$M=(m, It)S$, $N=(t^{-1}, m, It)T$ とおく。

このとき、次のように解釈する。(T, G も)

$S$ : CM with m.m. $\Longleftrightarrow$ $S_M$ : CM with m.m.

Verma は、S が CM with m.m. ならば、A もそう。また、T が CM with m.m. で、I が $I=m$, $I=m^2$, $I \subseteq m^3$ のいずれかならば、A もそうであることを示し、次の問いを出した。

<u>Question</u>

$T$ : CM with m.m. $\Longrightarrow$ $A$ : CM with m.m. ?

これは、任意の次元で正しくないことを示す。

§1 G(I) が CM with m.m. となる ideal について

Lemma(1.1)

(A, m, k):a CM local ring. $\# k=\infty$.

$\tau$(A) = AのCM type. このとき、つぎは同値。

(1) Aは minimal multiplicity を持つ。

(2) $m^2 = Im$ ($\exists(\forall)$I:mの minimal reduction).

(3) $\exists$J:Aの parameter ideal s.t. $m^2 \subseteq J$.

(4) $\tau(A) = e-1$. または、Aは R.L.R.

Aが R.L.R.でないとき、(1.1)(3)のJはmの minimal reduction になる。

Definition.(1.2)(G.Valla)

(A, m, k):a CM local ring. $\# k=\infty$. $\sqrt{I}=m$.

I:stable $\Longleftrightarrow$ $I^2 = JI$ ($\exists$J:Iの minimal reduction).

どのような ideal が、GをCM with m.m.にするかを考える。

Theorem(1.3)

(A, m, k) : a Gorenstein local ring , $\# k=\infty$.

$\sqrt{I}=m$とし、$G=G(I)$, $M=mG+G_+$, $S=\mathbf{R}'(I)$, $N=(t^{-1}, m, It)$と置く。 このとき、次は同値。

(1) $G(I)$: CM with m.m.

(2) $\mathfrak{m}^2 \subseteq I$, $I\mathfrak{m} = J\mathfrak{m}$, $I^2 = JI$.

(∃$J$: Aの parameter ideal. s.t. $J \subseteq I$.)

(3) Iは次のいずれか。

(ｱ) $I$: Aの parameter ideal s.t. $\mathfrak{m}^2 \subseteq I$.

(ｲ) $\mathfrak{m} \sim I$, $\mathfrak{m}^2 \subseteq I$.

さらに、Iが parameter idealでなければ、次も同値。

(4) $\mathfrak{m}^2 \subseteq I$, $\lambda(A/I) = e(I) - 1$.

ただし、(1)⟺(2)の同値性には、Gorenstein は不要。

<u>Remark</u>(1.4)

$(A, \mathfrak{m}, k)$: a local ring. $\# k = \infty$.

$\sqrt{I} = \mathfrak{m}$. $G = G(I)$, $M = \mathfrak{m}G + G_+$とおく。

このとき、$e(G) = e(I)$.

<<u>Theorem</u>の証明の概略>

(1)⟹(2):

Iの minimal reduction $J = (x_1, \cdots, x_d)$ を取る。

$G_M$: CM with m.m.だから、$x_1, \cdots, x_d$の initial term

の生成する ideal $J^\circ$は、GにおいてMの mininmal

reduction を生成し、$M^2 = J^{\circ}M$.

各次数ごとに比較して、

$$m^2 + I = I. \quad Im = Jm + I^2. \quad IJ + I^3 = I^2.$$

$$\therefore m^2 \subseteq I, \; Im = Jm, \; I^2 = JI.$$

(2) $\Longrightarrow$ (1):

$I^2 = JI$ だから、$\mathrm{emb}(G_M) = \lambda(m/I+m^2) + \lambda(I/mI)$.

また、GはCM.

$e(G_M) = e(I) = e(J) = \lambda(A/J)$

$m^2 \subseteq I$, $Im = Jm$だから、

$$\begin{aligned}\mathrm{emb}(G_M) &= \lambda(m/I) + \lambda(I/mI) = \lambda(m/Im) = \lambda(m/Jm) \\ &= \lambda(A/J) + \lambda(J/Jm) - \lambda(A/m) \\ &= e(G_M) + d - 1.\end{aligned}$$

ゆえに、$G_M$はCM with m.m.

以下、Aを Gorenstein とする。

(3) $\Longrightarrow$ (2):

Iが parameter ideal の時は、$I = J$ とすればよい。

Iは parameter idealでないとする。

$I = J : m$ ($\exists J$: Aの parameter ideal) と書ける。

<u>Case</u> 1 : $m^2 \subseteq J$ の時

<u>Lemma</u>(1.1)から、AはCM with m.m.

Aが R.L.R.でなければ、Jは$\mathfrak{m}$の minimal reduction

になるから、$\mathfrak{m} \subseteq J:\mathfrak{m} = I$. $\therefore \mathfrak{m} = I$で、o.k.

<u>Case</u> 2 : $\mathfrak{m}^2 \not\subseteq J$の時

$J \neq \mathfrak{m}^2 + J \subseteq J:\mathfrak{m}$ゆえ、$I = J:\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 + J$.

$\lambda(I/J) = 1$だから、$I = J + (x)$, $x \in \mathfrak{m}^2 \setminus J$と表せる。

$\forall a \in I\mathfrak{m}$を取る。

$a \in J := (x_1, \cdots, x_d)$だから、$a = \Sigma a_i x_i$ $(a_i \in A)$と書く。

$a_1 \in A \setminus \mathfrak{m}$と仮定。

$x_1 \in (x_2, \cdots, x_d) + I\mathfrak{m}$となり、$I = (x_2, \cdots, x_d, x) + I\mathfrak{m}$.

NAKから、$I = (x_2, \cdots, x_d, x)$となり、仮定に反する。

$\therefore a_i \in \mathfrak{m}$ $(\forall i)$. $\therefore I\mathfrak{m} \subseteq J\mathfrak{m}$. $\therefore I\mathfrak{m} = J\mathfrak{m}$.

他方、$\mathfrak{m}^3 + J\mathfrak{m} = I\mathfrak{m} = J\mathfrak{m}$ゆえ、$\mathfrak{m}^3 \subseteq J\mathfrak{m}$. $\therefore \mathfrak{m}^4 \subseteq J\mathfrak{m}^2$.

$\therefore I^2 = \mathfrak{m}^4 + J(\mathfrak{m}^2 + J) = J(\mathfrak{m}^2 + J) = JI$.

(2)$\Longrightarrow$(3):省略。

さらに、Iは parameter ideal でないとする。

(4)$\Longrightarrow$(3):$J \subseteq I$をIの minimal reduction とする。

Aは Gorenstein ゆえ、$\mathfrak{m} = J:I$, $J:\mathfrak{m} \subseteq I$.

$\therefore \lambda(A/I) = \lambda(A/J:\mathfrak{m}) - \lambda(I/J:\mathfrak{m}) = e(I) - 1 - \lambda(I/J:\mathfrak{m})$.

$\therefore I = J:\mathfrak{m}$. $\therefore I \sim \mathfrak{m}$.

(3)$\Longrightarrow$(4):上と同様。　　　　QED

Corollaly.(1.5)

$(A, m, k)$ : a local ring. $\sqrt{I} = m$.

$G(I)$ : CM with m.m. $\Longrightarrow$ $T = R'(I)$ : CM with m.m.

<Pr>$N = (t^{-1}, m, It)T$, $K = (t^{-1}, Jt) \subseteq N$ と置くと、

$N^2 = KN$で、$KS_N$は $NS_N$の minimal reduction

である。　QED

Example(1.6)

$(A, m, k)$:1次元 Gorenstein local ring. $\# k = \infty$.

$I$:$A$の ideal, $\sqrt{I} = m$.

$G(I)$がCM with m.m.となるのは、次の場合である。

(1)$r(m) = 0$($A$:D.V.R.の場合), $I = m, m^2$.

(2)$r(m) = 1$.

①$I = m$か、その minimal reduction, $\tau(G) = 1$.

②$I = m^2$.　　　　, $\tau(G) = 3$.

③$I = J : m = m^2 + J$($\exists J$:$A$のparameter ideal.

s.t. $e(J) = 3 > e = 2$. $I^2 = JI$), $\tau(G) = 2$.

(3)$r(m) = 2$のとき、　$I = J : m = m^2 + J$

($\exists J$:$m$の minimal reduction ; $I^2 = JI$), $\tau(G) = e - 1$.

特に、$G(A)$は Gorenstein.

## §2 Vermaの問いの否定的な解

この section では、次の２つの問いに関して、否定的な解を与える。

<u>Question</u>(2.1)(J.K.Verma ; Comm. in Alg.17(1989))

$(A, m, k)$:a CM local ring. $\# k = \infty$. $d = \dim A > 0$.

I:Aの ideal.このとき、

T:CM with m.m. $\Longrightarrow$ A:CM with m.m.？

<u>Question</u>(2.2)(C.Huneke;Amer.J.Math.104(1981))

$(A, m, k)$:a Gorenstein local ring.

$I \sim J$とする。

このとき、$\mathbf{R}(I)$:CM$\Longrightarrow$ $\mathbf{R}(J)$:CM？

<u>Proposition</u>(2.3)(<u>Question</u>(2.1)に対する反例)

$(A, m, k)$:a CM local ring. $\# k = \infty$.

J:mの minimal reduction s.t. $m^3 \subseteq J$. $I := m^2 + J$.

このとき、G:CM with.m.m.かつ、T:CM with m.m.

特に、r(m)＝2のときには、このような ideal I が存在するが、A自身は、CM with.m.m.ではない。

Thm(1.3)の(1)$\Longrightarrow$(2)は、一般には成立しない。

Example(2.4)

$A = k[[X, Y, Z, W]]/(X^2, XY, XZ, Y^2-YZ, YZ-Z^2, Z^3)$

：1次元ＣＭ，$\tau(A)=3$.

$J=(W)$, $m=(X, Y, Z, W)$とおく。

このとき，Jはmの minimal reductionで、$m^3 \subseteq J$.

$m^2+J \neq J:m$. 実際、$m^2+J \not\sim m$.

$I=m^2+J$とおくと、$G(I)$はＣＭ with m.m.

Proposition(2.5)

$(A, m, k)$: a Gorenstein local ring which is not a R.L.R. $\# k=\infty$.

Jをmの minimal reduction とし、$I=J:m$ と置く。

$r=r_J(m) \leqq 3$ 又は、$G(A)$がＣＭ と仮定。

このとき、次が成立。

(1) I は stable, $e=e(G_M)$.

(2)$G_M$: ＣＭ with m.m. $\Longleftrightarrow r=1, 2$.

(3) $\tau(G_M)=1$ $(r=1)$

$=v-d+1$ $(r \geqq 2)$.

Example(2.6)(Quest.(2.2)の反例)

(A, m, k):a Gorenstein local ring. ＃$k=\infty$.

$d=\dim A\geqq 2$, G(A):CM, $r=r(m)\geqq d$とする。

Jをmの mininmal reduction とし、$I=J:m$とおくと、

$I\sim m$で、R(I)はCMだが、R(m)はCMでない。

Example(2.7)

$A=k[[t^4, t^b, t^c]]$, $m=(t^4, t^b, t^c)$.

$(b, 4)=1$, $b>4$, $c=3b-4$.

このとき、AはCM, $\tau(A)=2$.

$I=(t^4, t^{2b}, t^c)$と置くと、$m\sim I$.

G(I)はCM with m.m.

$G(m)=k[X, Y, Z]/(XZ, YZ, Z^2, Y^4)$はCMでない。

Reference

[GS]S. Goto and Y. Shimoda, On the Rees Algebras of Cohen Macaulay local rings. In:Commutative Algebra (analytic Methods), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 68, Marcel Dekker, New York(1982)201-231.

[Hu1]C. Huneke, Linkage and the Koszul homology of ideals. Amer. J. Math. 104(1981)1043-1062.

[Hu2]C. Huneke, Complete Ideals in two-dimensional regular local rings. proceedings of "Microprogram on Commutative Algebra" held at MSRI, Berkeley, CA(1987)Springer-Verlag, New York(1989).

[O]A. Ooishi, Stable ideals in Gorenstein local rings. J. pure and App. Alg. 69(1990)185-191.

[Re]D. Rees, Generalizations of reductions and Mixed Multiplicities, J. London Math Soc. (2)29(1984)397-415.

[Sa1]J. D. Sally, CM local rings of maximal embedding dimension, J. Alg. 56(1979)168-183.

[Sa2]J. D. Sally, Tangent cones at Gorenstein singularities. Comp. Math. 40(1980)167-175.

[Sa3]J. D. Sally, On the Associated graded ring of a local CM ring. J. Math Kyoto Univ. 17(1977)19-21.

[TI]N. V. Trung and S. Ikeda, When is the Rees Algebra COHEN-MACAULAY? Comm. in Alg. 17(1989)2893-2922.

[Tru]N. V. Trung, REDUCTION EXPONENT AND DEGREE BOUND FOR THE DEFINING EQUATIONS OF GRADED RINGS. Proc. AMS. 101(1987)229-236

[V]G. Valla, On Form Rings which are COHEN-MACAULAY. J. Alg. 58(1979)247-250.

[Ve1]J. K. Verma, REES ALGEBRAS WITH MINIMAL MULTIPLICITY. Comm in Alg. 17(1989)2999-3024.

[Ve2]J. K. Verma, Rees Algebras of Contrcted Ideals in Two-Dimensional Regular Local Rings. J. of Alg. 141(1991)1-10.

[Ve3]J. K. Verma, Rees Algebras and Mixed Multiplicities. Proc. AMS. 104(1988)1036-1044.

[Ve4]J. K. Verma, JOINT REDUCTIONS OF COMPLETE IDEALS. N. M. J. 118(1990)155-163.

[VV]P. Valabrega and G. Valla, Form rings and Regular sequences. N. M. J. 72(1978)93-101.