数理解析研究所講究録
第 802 巻 1992 年 56-61

二次元イジング模型の厳密解

東北大　工　　守田　徹
(T. Morita)

イジング模型は磁性体の最も簡単な模型である。この模型では、ある格子の格子点にスピンがあり、スピンは +1, −1 という値を取る。スピンがN個ある体系の状態は、N個の +1, −1 を取るスピン変数 s_1, s_2, $\cdots s_N$ の組で決まり、状態は 2^N 個ある。温度 T の体系の分配関数 Z は

$$Z = \sum_{s_1=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} \exp\{-\sum_{(i,j)} J_{ij} s_i s_j / k_B T\} \tag{1}$$

と表される。i, j は格子点の番号 1 から N までの値を取り、(i, j) は隣り合う格子点についての和である。J_{ij} は交換積分と呼ばれる定数で、k_B は Boltzmann 定数である。温度 T の

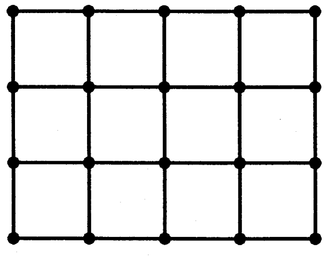


図 1　　正方格子

関数としての体系の性質は、$F=-k_B T \ln Z$ で決まる自由エネルギー F から計算できる。この体系の熱力学的性質は、F/N の $N\to\infty$ の極限値 f から計算される。Onsager は 1944 年に正方格子上のイジング模型について、J_{ij} が i と j が x 方向の隣りのときに J_x, y 方向の隣りのときに J_y であるとして、極限値 f を厳密に求めた。

Kac and Ward は 1952 年に "A Combinatorial Solution of the Two-Dimensional Ising Model " という論文を書いた。これは有限系について

$$Z = 2^N \prod_{(i,j)} \cosh(J_{ij}/k_B T)\ Z_1 \tag{2}$$

$$Z_1^2 = \det\{I - \Lambda\} \tag{3}$$

を導くものである。ここで I と Λ は $4N$ 行 $4N$ 列の行列である。I は単位行列である。Λ を表すには、格子上で格子点から隣合う格子点へと歩く random walk のステップを考えるのが都合がよい。格子点 j からの μ 方向のステップを $j\mu$ で表す。行列 Λ の要素は、ステップ $j\mu$ と $j'\mu'$ の対間で、もし $j\mu$ が $j'\mu'$ の次のステップとして可能ならば

$$(\Lambda)_{j\mu, j'\mu'} = \tanh(J_{jj'}/k_B T)\, e^{i\theta_{\mu\mu'}/2} \tag{4}$$

であり、そうでなければ0である。$\theta_{\mu\mu'}$ はステップ $j\mu$ の向きをステップ $j'\mu'$ の向きから測った角度である。ここで、あるステップの後にすぐ逆戻りするステップは許されない。

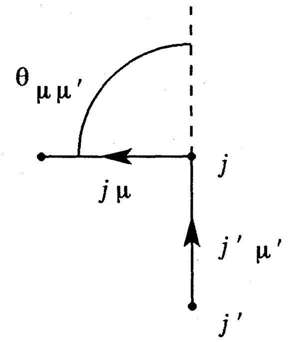


図 2

Vdovichenko は1965年に図形を数えることにより上の結果を導く方法を開発した。Morita は1986年にそれを正当化する論文を書いた。これを紹介する。

(1) で加えられる量を

$$\prod_{(i,j)} \cosh(J_{ij}/k_B T) \prod_{(i,j)} \{1+s_i s_j \tanh(J_{ij}/k_B T)\} \tag{5}$$

と書き、第2の積を展開し、$s_1, s_2, ..., s_N$ について和を取る。結果の Z は (2) と書かれ、Z_1 は

Z_1 = 1 + {最近接格子点間を結ぶボンドからなる図形の和。ただし、各格子点共0又は偶数本のボンドに結ばれている}　　(6)

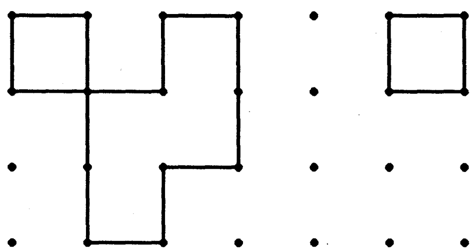


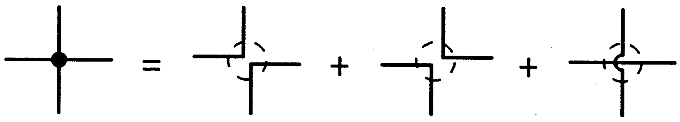
図 3

となる。ここで図形はボンドに対する因子の積を表す。格子点 i と j を結ぶボンドに対する因子は $\tanh(J_{ij}/k_{\mathrm{B}}T)$ である。

これを格子点とボンドのループで表すと

$Z1 = 1 +$ {ループの積の和。最近格子点間には0本又はには0本又は1本のボンドを許す。} (7)

となる。(6)と(7)が等しいためには各格子点で



(8)

が成り立てばよい。これはクロス1個に因子 −1 をつけると成り立つ。

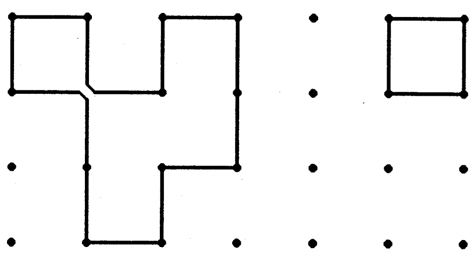
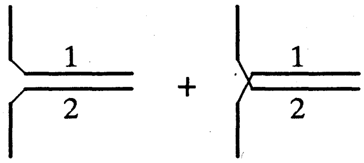


図 4

(6), (7)では最近接格子点間のボンド数は0又は1であったが、これを任意の非負整数にする。

$Z_1 = 1 +$ {ループの積の和}

ここでは、ループが同じ格子点を何度も通ることを許すものとする。これが(7)に等しいためには多重ボンドの対の寄与が0ならばよい。例えば



$$= 0 \tag{9}$$

クロスに-1の因子がついていると、これも成り立つ。　この計算をするときに同じ格子点を結ぶ複数本のボンドには、k本ならば1, 2,. . ., kと1方から他方に番号をつけ、格子点での結び方をすべて考える。そして図形の寄与は各ボンドについて$k!$で割る。この結果、ボンドについた番号だけで異なる寄与が現われる。このため図形の寄与は
$\tanh(J_{ij}/k_B T)$, -1と1/(対称性の数)の積となる。この結果

$$Z_1 = \exp\{ループの和\} \tag{10}$$

となる。

ここでループに向きをつける。2つの向きが可能であるから、

$$Z_1^2 = \exp\{向きのついたループの和\} \tag{11}$$

となる。ここから(3)に行くには、(7)から(10)を導いたと同じ議論で次の表式から上の(11)が導かれることを確か

めればよい。

$$Z_1^2 = 1 + \{\text{向きのついたループの積の和。最近接格子点間には1方向のボンドは0又は1本に限る。}\} \qquad (12)$$

(3)の行列式を展開すると(12)になる。そのためには、クロス1個に-1という因子が(4)の $\exp(i\theta_{\mu\mu'}/2)$ の積から来ることを確かめればよい。

文献

L. Onsager, Phys. Rev. 65 (1944) 117.

M. Kac and J. C. Ward, Phys. Rev. 88 (1952) 1332.

N. V. Vdovichenko, Soviet Phys. -JETP 20 (1965) 477.

T. Morita, J. Phys. A 19 (1986) 1197.