数理解析研究所講究録
第 802 巻 1992 年 119-121

最大制約数 7 をもつ強さ 2, 指標 2 の 3 水準直交配列

山本純恭, 藤井淑夫　(岡山理科大·理, 国際自然研)
光岡元弘　(アップジョン生物統計)
(Sumiyasu Yamamoto, Toshio Fujii, Motohiro Mitsuoka)

$N\times m$ の 3 水準（3 シンボルともいう）の配列 T において, 任意の 2 列からなるどの部分配列においても, $3^2=9$ 個の 2 次元行ベクトルがいずれも λ 回現れるとき, T を強さ $t=2$, 大きさ N, 制約数 m, 指標 λ の 3 水準（3 シンボル）直交配列という. 記号 OA$(N, m, 3, 2)$:λ が用られているが, われわれは 3-OA$(t=2, m, \lambda)$ を用いる. もちろん $N=\lambda 3^2$ である.

直交配列の制約数 m の上限に関する研究としては, Bose-Bush (1952) などの上界に関する研究や, その上界に到達する配列構成に関する Bose-Bush (1952) や Addelman-Kempthorne (1961) など多くの研究がある.

3-OA$(t=2, m, \lambda=2)$ については, Bose-Bush (1952) はじめ Addelman-Kempthorne (1961) なども上界 $m=7$ に到達する解を与えている.

われわれはこの上限を与える解がすべての可能な 3-OA$(t=2, m=7, \lambda=2)$ の中でどのような位置にあるか? また, 列およびシンボルの置換 (SC-置換) に関して同値な類のどれに属しているかについて検討した. この研究の出発点は, 3-OA$(t=2, m=4, \lambda=2)$ の総数は 31,356 個に及び, それらはシンボルの置換による同値関係で 68 個に類別され, 列の置換による同値関係を加えると 12 個の類に集約されるという Yamamoto-Fujii-Namikawa-Mitsuoka (1991) の結果である.

3-OA$(t=2, m=7, \lambda=2)$ のシンボルと列の置換に関する同値類の個数とそれらの代表元を求めるアルゴリズムは下記の通りである.

(1) 制約数 m の 3-OA$(t=2, m, \lambda=2)$ のシンボルと列の置換に関する同値類とそれらの代表元のファイル $RF(m)$ を用意する.

この出発点には $m=4$ の場合の Yamamoto-Fujii-Namikawa-Mitsuoka (1991) の研究が用いられ, $|RF(4)|=12$ である.

(2) $RF(m)$ のそれぞれについて 1 列を加え 3-OA$(t=2, m+1, \lambda=2)$ となる可能性のすべてを求める.

(3) 付加した列内のシンボルの置換に関する 6 通りの可能性の同値性を考慮し, (2) で求めた 3-OA$(t=2, m+1, \lambda=2)$ の 1/6 を登録したファイル $F(m+1)$ を作る.

$RF(m)$ がすべての 3-OA$(t=2, m, \lambda=2)$ の代表元の集まりであるから, $F(m+1)$ に

は 3-OA(t=2, $m+1$, λ=2) のシンボルと列の置換に関する同値類の代表元になり得る配列がすべて含まれている.

(4) $F(m+1)$ から無印の 1 つの元を選び, 印をつけ, $RF(m+1)$ に登録すると同時に, 作業ファイル $WF(m+1)$ の上でシンボルと列の置換を施しつつ, $F(m+1)$ の無印の元に一致するかどうかを調べる. 一致すれば $F(m+1)$ の元に印をつけ, 一致しなければ次に進む.

(5) (4) の過程を $F(m+1)$ に無印の元がなくなるまで続ける.

この結果 3-OA(t=2, $m+1$, λ=2) の代表元のファイル $RF(m+1)$ ができる.

(6) (1) ~ (5) のプロセスを m=4 から出発し可能な限り続ける. 作業ファイルが膨大となることに対応する工夫としては, $WF(m)$ の分割と逐次構成を行った. またメモリーの節約のため直交配列のモジュラー表示に工夫を加えた.

その結果, m=7 でこの過程は終結し, 表 1 に示す所期の代表元のファイル $RF(7)$ が得られた.

表 1. 3-OA(t=2, 7, λ=2) の代表元

[A]	[B]	[C]
0021000	0021000	0021000
0022111	0022111	0022111
0110002	0110002	0110002
0112221	0112221	0112221
0200112	0200120	0200120
0201220	0201212	0201212
1010120	1010112	1010210
1011212	1011220	1011122
1101011	1101011	1101011
1102100	1102100	1102100
1220021	1220021	1220021
1222202	1222202	1222202
2000201	2000201	2000201
2002022	2002022	2002022
2120210	2120210	2120112
2121122	2121122	2121220
2211101	2211101	2211101
2212010	2212010	2212010

検証の結果, Bose-Bush や Addelman-Kempthorne の結果など, 知られている従来の結果はすべて同値類 [A] に属していることが判明した.

参考文献

[1] Addelman and Kempthorne (1961). Some main effect plans and orthogonal arrays of strength two. Ann. Math. Stat., 32, 1167-1176.

[2] Bose and Bush (1952). Orthogonal arrays of strength two and three. Ann. Math. Stat., 23, 508-524.

[3] Yamamoto, Fujii, Namikawa and Mitsuoka (1991). Three symbol orthogonal arrays of strength t having $t+2$ constraints. SUT J. Math., 27, 93-111.

[4] Yamamoto, Fujii and Mitsuoka (1991). Three-symbol orthogonal arrays of strength 2 and index 2 having maximal constraints - conputational study. IINS Technical Report No. 6. (Submitted to C.R. Rao Vol. JCISS)