数理解析研究所講究録
第 806 巻 1992 年 93-116

曲面上の微分同相写像のクラス $\mathcal{A}^1(M)$ の性質と hyperbolic attractor の存在について

木更津高専　酒井一博 (Kazuhiro Sakai)

M を C^∞ 閉多様体、M 上の C^1 微分同相写像全体を $\mathrm{Diff}^1(M)$ で表し C^1 位相を導入する。$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ の周期点全体を $P(f)$ とし $\mathcal{F}^1(M) = \mathrm{int}\{f \in \mathrm{Diff}^1(M) \mid {}^\forall p \in P(f) : \text{hyperbolic}\}$ (int は $\mathrm{Diff}^1(M)$ における内点を表す。) とおくと、$\mathcal{F}^1(M) = \{\text{Axiom A} + \text{no-cycle}\}$ という形で特徴づけされた ($\dim M = 2$ の時は[12], 一般の場合は[1]、または[6])。従って今後の研究対象は $\mathcal{F}^1(M)^c$ である。

各 $f \in \mathcal{F}^1(M)$ は Ω-stable であるから、f のある近傍 $\mathcal{U}(f) \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ が存在して、すべての $g \in \mathcal{U}(f)$ に対し $\# P_0(f) = \# P_0(g) < \infty$, $\# P_0(f^{-1}) = \# P_0(g^{-1}) < \infty$ が成立する。ここで $P_0(f) \subset P(f)$ は、f の sink の全体を表す。Araújo [2] は $\mathcal{F}^1(M)^c$ を研究するための第一歩として

$$\mathcal{A}^1(M) = \left\{ f \in \mathrm{Diff}^1(M) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^\exists \mathcal{U}(f) \subset \mathrm{Diff}^1(M) : f \text{ の近傍で、} \\ \# P_0(g) = \# P_0(f) \quad ({}^\forall g \in \mathcal{U}(f)) \end{array} \right\}$$

を定義した($\mathcal{A}^1(M) \supsetneqq \mathcal{F}^1(M)$であることは確められる)。ここでは、Araújoが曲面($\dim M = 2$)において調べた$\mathcal{A}^1(M)$の性質、およびそれらの結果から得られたhyperbolic attractorの存在に関する定理について述べる。

1、準備.

M, $\mathrm{Diff}^1(M)$は前出のものとする。Riemann計量より生成されたM上の距離をdで表し、M上のBorel確率測度の全体を$\mathcal{M}(M)$と書く。点列$\{\mu_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}(M)$が$\mu \in \mathcal{M}(M)$に収束することを

$$\int \varphi \, d\mu_n \underset{(n \to \infty)}{\to} \int \varphi \, d\mu \quad (\forall \varphi \in C^0(M, \mathbb{R}))$$

で定義する。ただし$C^0(M, \mathbb{R})$はM上の連続関数全体とする。$\mathcal{M}(f) \subset \mathcal{M}(M)$は$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$不変測度の全体とし、$\mathcal{M}_e(f)$ ($\subset \mathcal{M}(f)$)でergodicなf-不変測度全体を表せば、$\mathcal{M}(f)$はコンパクトで$\mathcal{M}_e(f) \neq \phi$であることは良く知られている。$x \in M$, $n \geq 1$に対し、

$$\mu_{f,x,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)} \in \mathcal{M}(M)$$

とおく、ただしδ_yはDirac測度を表す。$\{\mu_{f,x,n}\}_{n \geq 1}$の集積点全体を$\mathcal{M}(x)$と書けば、$\mathcal{M}(x) \subset \mathcal{M}(f)$. $\delta > 0$に対し

$$\mathfrak{M}_\delta(f) = \{\mu \in \mathfrak{M}_e(f) \mid \int \log|\det f'|d\mu < \delta\},$$

$$\Sigma_\delta(f) = \overline{\bigcup_{\mu \in \mathfrak{M}_\delta(f)} \operatorname{supp} \mu}$$

とおく。ここで $\operatorname{supp} \mu = \{x \in M \mid \mu(V) > 0 \ (\forall V : x \text{の近傍})\}$. 明らかに $f(\operatorname{supp}\mu) = \operatorname{supp}\mu \subset \Omega(f)$. 故に $f(\Sigma_\delta(f)) = \Sigma_\delta(f) \subset \Omega(f)$. $\delta > 0$ に対し

$$P_\delta(f) = \{p \in P(f) \mid \mu_{f,p,\pi(p)} \in \mathfrak{M}_\delta(f)\}$$

とおく（$\pi(p)$ は $p \in P(f)$ の周期）。よって $P_0(f) \subset P_\delta(f) \subset \Sigma_\delta(f)$. 当面の目的は、$f \in \mathcal{A}^1(M)$ に対し $P_\delta(f)$ や $\Sigma_\delta(f)$ の hyperbolicity を計算して行くことにある。M上の Lebesgue 測度を m とする。

<u>補題 1.1</u>. 任意の $\delta > 0$ に対し

$$\Lambda_\delta(f) = \bigcup_{N>0}\left(\bigcap_{n \geq N}\{x \in M \mid |\det(f^n)'| < (1+\delta)^n\}\right)$$

とおくと $m(\Lambda_\delta(f)) = 1$ で、さらに任意の $\mu \in \mathfrak{M}(x)$（$x \in \Lambda_\delta(f)$）に対し $\mu(\Sigma_\delta(f)) > 0$.

この補題の前半は単なる計算で示されるが、後半の証明には f－不変測度に関するエルゴード分解定理（[15, P.133 定理 6.4]）が用いられている。

2. $\mathcal{N}^1(M)$ の性質 (I).

まず、Franks [5] による C^1 摂動に関する補題を用意する。

補題 2.1. 写像 $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ とその任意の近傍 $\mathcal{U}(f)$ ($\subset \mathrm{Diff}^1(M)$)のみに従属した $\varepsilon > 0$ が存在し、与えられた点列 $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ ($1 \leq N < \infty$, $x_i \neq x_j$ if $i \neq j$), その任意の近傍 $U = U(\{x_1, \cdots, x_N\})$、そして線形写像 $L_i : T_{x_i}M \to T_{f(x_i)}M$ ($1 \leq i \leq N$) に対し、もし $\|L_i - (D_{x_i}f)\| < \varepsilon$ ($1 \leq i \leq N$) であれば、ある $g \in \mathcal{U}(f)$が存在し $g(x) = f(x)$ ($x \in \{x_1, \cdots, x_N\} \cup M \setminus U$) かつ $D_{x_i}g = L_i$ ($1 \leq i \leq N$)を満たす。

以後 $\dim M = 2$ とする。次の補題は、補題2.1より得られる。

補題2.2. 任意の $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ に対し $\delta_0(f) > 0$, $\mathcal{U}(f) \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ が存在し、すべての $g \in \mathcal{U}(f)$とすべての $p \in P(g) \setminus P_0(g)$ に対し $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} > (1+\delta_0(f))^{\pi(p)}$ が成立する。ここで λ_1, λ_2 は、$D_p g^{\pi(p)} : T_pM \circlearrowleft$ の固有値を表す。

$p \in P_\delta(g)$であれば、$\dim M = 2$ より $|\lambda_1| \cdot |\lambda_2| = |\det (g^{\pi(p)})'(p)| < (e^\delta)^{\pi(p)} \to 1$ ($\delta \to 0$)であるから補題2.2より次を得る。

補題2.3. 任意の $f\in\mathcal{A}^1(M)$ に対し $0<\delta_1(f)\leqq\delta_0(f)$, $c(f)>0$ が存在して、任意の $0<\delta\leqq\delta_1(f)$, $g\in\mathcal{U}(f)$ そして $p\in P_\delta(g)\setminus P_0(g)$ に対し $|\lambda_1|<(e^{-c(f)})^{\pi(p)}<1<(e^{c(f)})^{\pi(p)}<|\lambda_2|$ が成立する。ただし、$\delta_0(f)$, $\mathcal{U}(f)$ は補題2.2のもので、λ_1, λ_2 は $D_pg^{\pi(p)}:T_pM$ の固有値。

補題2.3より、各 $f\in\mathcal{A}^1(M)$ に対し $p\in P_\delta(f)$ $(0<\delta\leqq\delta_1(f))$ は hyperbolic で、さらにこの性質は C^1位相で open な性質であることがわかる。従って $\mathcal{F}^1(M)$ の研究に用いられた手法が $\mathcal{A}^1(M)$ に対してもある程度適用出来ることが予想される。

補題2.4 (ergodic closing lemma [12]). 与えられた $f\in\mathrm{Diff}^1(M)$ ($\dim M$ は任意), $\varepsilon>0$, $\mathcal{U}(f)\subset\mathrm{Diff}^1(M)$ そして $\mu\in\mathcal{M}_e(f)$ に対し、$g\in\mathcal{U}(f)$, $p\in P(g)$ が存在して $\bar{d}(\mu,\mu_{g,p,\pi(p)})<\varepsilon$ が成立する。ここで $\bar{d}$ は $\mathcal{M}(M)$ 上の距離。

上の2.4は、次の定理の証明において本質的である。Λ は $f\in\mathrm{Diff}^1(M)$ 不変集合とする。$TM_\Lambda=E\oplus F$ が dominated splitting であるとは、それが Df 不変，連続な分解であってさらに定数 $C>0$, $0<\lambda<1$ が存在して、すべての $n\geqq0$ に対し

$$\|Df^n_{|E(x)}\|\cdot\|Df^{-n}_{|F(f^n(x))}\| \leq C\lambda^n \quad (x\in\Lambda)$$

が成立することを言う。

<u>定理A</u>. $f\in\mathcal{A}^1(M)$ に対し、$\delta_1(f)>0$, $c(f)>0$ そして $\mathcal{U}(f)$ は補題2.3のものとする。このとき定数 $C>0$, $0<\lambda<1$ が存在して、任意の $g\in\mathcal{U}(f)$, $0<\delta\leq\delta_1(f)$ に対し Dg-不変、連続な分解 $TM_{|\Sigma_\delta(g)\setminus P_0(g)} = E^s\oplus E^u$ があって次を満たす:

(a) すべての $n\geq 0$ に対し、
$$\|Dg^n_{|E^s(x)}\|\cdot\|Dg^{-n}_{|E^u(g^n(x))}\| \leq C\lambda^n \quad (x\in\Sigma_\delta(g)\setminus P_0(g)),$$

(b) $\|Dg^{-n}_{|E^u}\| \leq C\lambda^n \quad (n\geq 0)$,

(c) 任意の $\mu\in\mathcal{M}_s(g)$ (ただし $\mathrm{supp}\,\mu\cap P_0(g)=\phi$ を満たすもの) に対し
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|Dg^n_{|E^s(x)}\| \leq -c(f) \quad \mu\text{-a.e. } x\in\Sigma_\delta(g).$$

もし任意の $f\in\mathcal{A}^1(M)$ に対し $\Sigma_\delta(f)=\overline{P_\delta(f)}$ であれば、補題2.1, 2.3 より [14, 定理I.3] の証明と全く同様にして (a) が成立する。ここでは一般に上の等号はわからないが補題2.4より、任意の $x\in\mathrm{supp}\,\mu$ ($\mu\in\mathcal{M}_S(f)$, $\mathrm{supp}\,\mu\cap P_0(f)=\phi$) に対し $\{g_n\}_{n\geq 1}\subset\mathrm{Diff}^1(M)$, $p_n\in P(g_n)$ が存在し、$g_n\to f$, $p_n\to$

x そして $\mu_{g_n, p_n, \pi(\varphi_n)} \to \mu$ $(n \to \infty)$ を満たす。このとき

$$\sup_{x \in M} \Big| \log|\det(g_n')(x)| - \log|\det(f')(x)| \Big| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

より、ある $n_0 > 0$ が存在して、すべての $n \geq n_0$ に対し $p_n \in P_\delta(g_n)$ が成立する。これより [14, 定理 I.3] の証明とほとんど同様にして (a) が示される。(b) は補題 2.4, 2.2 を用いて示され、(c) は (b) と補題 2.3 を用いて証明されるが、これらの証明における手法は [14, 定理 I.6] の証明において用いられたそれとほとんど同様である。

<u>定理 A の系</u>. $f \in \mathcal{H}^1(M)$ が C^2 微分同相であれば、任意の $0 < \delta \leq \delta_1(f)$ に対し $\overline{P_\delta(f)} = \Sigma_\delta(f)$ が成立する。

定理 A より任意の $\mu \in \mathcal{M}_\delta(f)$ $(0 < \delta \leq \delta_1(f))$ は Lyapunov exponents が non-zero の測度である。従って [10, 定理 4.1] の証明と同様にして結論が得られる。

Dominated splitting を持つ f - 不変集合に関する f - 不変多様体の理論 ([8, §5, 53 - 67]) により、(a) から各 $x \in \Sigma_\delta(g) \setminus P_0(g)$ において g - 不変多様体が存在し次が成立する。$s = \dim E^s$, $u = \dim E^u$ とし、$D^\sigma(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^\sigma$ $(\sigma = s, u)$ は ε - 半径の disk とする。このとき次が成立する。

補題2.5. 定理Aの仮定のもとで、ある $\varepsilon_0>0$ が存在し任意の $g\in\mathcal{U}(f)$, $x\in\Sigma_\delta(g)\setminus P_0(g)$ $(0<\delta\leqq\delta_1(f))$ に対し $D^\sigma(\varepsilon_0)$ からうめ込まれた C^1-disk $\tilde{D}^\sigma(x)$ $(\sigma=s,u)$ で次を満たすものがある。

(1) $x_n\in\Sigma_\delta(g)\setminus P_0(g)\to x\in\Sigma_\delta(g)\setminus P_0(g)$ $(n\to\infty)$

$$\Rightarrow \tilde{D}^\sigma(x_n)\to\tilde{D}^\sigma(x)\quad(n\to\infty)\ C^1\text{-位相。}$$

(2) $T_x\tilde{D}^\sigma(x)=E^\sigma(x)$,

(3) 任意の $\varepsilon>0$ に対し、ある $0<\delta<\varepsilon$ があって $g(\tilde{D}^\sigma_\delta(x))\subset\tilde{D}^\sigma_\varepsilon(g(x))$. ここで $\tilde{D}^\sigma_\alpha(x)=B_\alpha(x)\cap\tilde{D}^\sigma(x)$ とする。

(4) 任意の $0<\eta\leqq\varepsilon_0$ に対し、ある $\nu>0$ が存在し $d(x,y)<\nu$ $(x,y\in\Sigma_\delta(g)\setminus P_0(g))$

$$\Rightarrow \tilde{D}^s_\eta(x)\pitchfork\tilde{D}^u_\eta(y),\quad \tilde{D}^s_\eta(x)\cap\tilde{D}^u_\eta(y)=\{1\text{点}\}.$$

定理B. $f\in\mathcal{H}^1(M)$, $0<\delta\leqq\delta_1(f)$. このとき $\Sigma_\delta(f)=M$ で f がAnosovでなければ、どんな f の近傍 $\mathcal{U}(f)$ にもsourceを持つ $g\in\mathcal{U}(f)$ が存在する。

この定理の証明には、[14, 定理 I.4]の証明に使われた次の補題を用いる。

Λ をコンパクト $f\in\mathrm{Diff}^1(M)$ 不変集合とし、$TM_\Lambda=E\oplus F$ を dominated splitting とする。$TM_\Lambda=E\oplus F$ が homogeneous

であるとは、$\dim E(x)$ $(x \in \Lambda)$ が一定であることを言う。

Λ のコンパクト近傍 U が <u>admissible</u> であるとは、$TM|_{\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)}$ がただ1つの homogeneous dominated splitting $TM|_{\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)} = \hat{E} \oplus \hat{F}$ $(\hat{E}|_\Lambda = E,\ \hat{F}|_\Lambda = F)$ を持つときを言う。TM_Λ が homogeneous dominated splitting を持てば、Λ は admissible な近傍 U を持つことは良く知られている([9])。

<u>補題2.6</u>. Λ はコンパクトな f $(\in \mathrm{Diff}^1(M))$ 不変集合で $\Lambda = \Omega(f|_\Lambda)$ とし、$TM_\Lambda = E \oplus F$ は homogeneous dominated splitting で F は expanding とする。もしある定数 $c > 0$ が存在して不等式

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log \| Df|_{E(f^{-j}(x))} \| < -c$$

が(Λ の)稠密部分集合の上で成立すれば、次のいずれか一方が成立する。

(1) E は contracting. 従って Λ は hyperbolic,

(2) 任意の Λ の admissible な近傍 V とすべての $0 < \gamma < 1$, $N > 0$ に対し周期点 $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V)$ $(\pi(p) \geqq N)$ が存在し

$$\gamma^N < \prod_{j=1}^{N} \| Df|_{\hat{E}(f^{-j}(p))} \| < 1$$

が成立する。ここで $TM|_{\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V)} = \hat{E}\oplus\hat{F}$ は一意的に存在する $TM_\Lambda = E\oplus F$ の拡張を表す。

この補題の証明には Anosov の closing lemma の証明のアイデアが利用されている。F は expanding であるから補題2.5 の $\tilde{D}^u_r(x)$ は、hyperbolic の場合に良く知られている不安定多様体 $W^u_r(x) = \{y\in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq r \ (\forall n \geq 0)\}$ と一致するが $\tilde{D}^s_r(x)$ が安定多様体になるかどうかわからない。そこで補題の後半の条件から、Λ の稠密な部分集合の点 x の軌道の中から $\|Df|_{E(f^j(x))}\| < 1$ $(n \leq i \leq m)$ を満たす一部分 $\{f^n(x), f^{n+1}(x), \ldots, f^m(x)\}$ (これは string と呼ばれているもので詳しい定義は後で述べる。)を見い出し、$\tilde{D}^s_r(f^n(x))$ に安定多様体の役割をさせて周期点を求めている。(2) の不等式の証明には γ-obstruction の概念が使われていてその証明は非常に複雑である。

次の定理は attractor に関係するものである。$\Lambda \subset M$ を f-不変 $(f\in \mathrm{Diff}^1(M))$ コンパクト集合とする。Λ が hyperbolic であれば、

$$W^s(x) = \{y\in M \mid \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\},$$

$$W^u(x) = \{y\in M \mid \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}$$

は C^1- はめ込まれた多様体である。Λ が <u>hyperbolic attractor</u> であるとは、Λ は hyperbolic で、$f:\Lambda \circlearrowleft$ が稠密な軌道を持ち $W^u(x) \subset \Lambda$ $(x \in \Lambda)$ が成立することを言う。このとき $W^s(\Lambda) = \bigcup_{x\in\Lambda} W^s(x)$ は Λ の <u>basin</u> と呼ばれており、$W^s(\Lambda)$ は M の開集合である。

<u>定理C</u>. $f \in \mathcal{A}^1(M)$, $0<\delta\leq\delta_1(f)$ に対し、もし Λ が f の hyperbolic attractor であれば、$\Lambda \subset \Sigma_\delta(f)$. さらに $\#\{\Lambda \subset \Sigma_\delta(f) \mid \text{hyperbolic attractor}\} < \infty$.

この定理の前半の証明は次の補題を用いる。

<u>補題2.7</u>. $f \in \mathcal{A}^1(M)$, $0<\delta\leq\delta_1(f)$ そして $p \in P_\delta(f)$ とする。このとき横断的に交わる p の homoclinic point はすべて $\Sigma_\delta(f)$ に属する。

この補題は次のようにして示す。いま x を横断的に交わる p の homoclinic point とすると、Smale の定理より p, x を含む horseshoe Λ (hyperbolic) が存在する。x から出発して p の近くに長く居て、また x にもどって来る cyclic な pseudo-orbit を考えるとこの pseudo-orbit を追跡する点

g は $P_\delta(f)$ に属することがわかる。よって $\overline{P_\delta(f)} \subset \Sigma_\delta(f)$ より結論を得る。

定理Cの仮定のもとで Λ を hyperbolic attractor とする。$m(W^s(\Lambda)) > 0$ より補題1.1から $x \in \Lambda_\delta(f) \cap W^s(\Lambda) \neq \phi$. Λ に巻きついてきた x の軌道を周期点 $p \in \Lambda$ で近似してやるとこの p に対し $p \in P_\delta(f) \cap \Lambda$ が証明される。$f: \Lambda \circlearrowleft$ は top. transitive であるから $\Lambda \subset \Sigma_\delta(f)$ が成立する。

後半の証明は次の string の議論を用いて示される。Λ はコンパクトな $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ 不変集合とし、$TM_\Lambda = E \oplus F$ は homogeneous dominated splitting とする。Λ の点の pair $(x, f^n(x))$ $(n>0)$ が <u>γ-E-string</u> $(0<\gamma<1)$ であるとは、$\prod_{j=0}^{n-1} \| Df_{|E(f^j(x))} \| \leq \gamma^n$ が成立することを言う。$(x, f^n(x))$ が <u>uniform γ-E-string</u> であるとは、すべての $0 \leq k \leq n$ に対し $(f^k(x), f^n(x))$ が γ-E-string であることを言う。

次の補題は Pliss により示された (e.g. [14])。

<u>補題2.8</u>. 任意の $0<\gamma_0<\gamma_1<1$ に対しある $N(\gamma_0, \gamma_1) > 0$ と $0 < c(\gamma_0, \gamma_1) < 1$ があって、もし $(x, f^n(x))$ が γ_0-E-string で $n \geq N(\gamma_0, \gamma_1)$ であれば、$0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leq n$ $(k \geq n \cdot c(\gamma_0, \gamma_1))$ が存在し、すべての $1 \leq i \leq k$ に対し $(x, f^{n_i}(x))$ は uniform γ_1-E-string である。

いま hyperbolic attractor が無限個 $\{\Lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ ($\Lambda_i \cap \Lambda_j = \phi$ if $i \neq j$) あるとする。補題2.8より、ある $\varepsilon > 0$ があって、各 i に対し $x_i \in \Lambda_i$ で $\tilde{D}^s_\varepsilon(x_i) \subset W^s(x_i)$ を満たすものの存在が証明できる。このとき $\dim \tilde{D}^s_\varepsilon(x) = 1$ であることを使っている。$\{x_i\}$ は無限点列であるから、ある $i \neq j$ が存在し、$d(x_i, x_j)$ は十分小。よって補題2.5より $\tilde{D}^s_\varepsilon(x_i) \cap \tilde{D}^u_\varepsilon(x_j) \neq \phi$. 故に $W^s(x_i) \cap W^u(x_j) \neq \phi$. これは矛盾である。

3. $\mathcal{H}^1(M)$ の性質 (II).

ここでは $\Sigma_\delta(f)$ の hyperbolicity について述べる。M上の C^2 微分同相写像の空間を $\mathrm{Diff}^2(M)$ で表し C^2 位相を与える。$\mathcal{G}^2(M) = \{f \in \mathrm{Diff}^2(M) \mid \text{Kupka-Smale}\}$ とおくと良く知られているように $\mathcal{G}^2(M)$ は $\mathrm{Diff}^2(M)$ で residual である。

<u>定理D</u>. $f \in \mathcal{H}^1(M) \cap \mathcal{G}^2(M)$ とし $\delta_1(f) > 0$ は補題2.3のもの、$TM_{|\Sigma_\delta(f) \setminus P_0(f)} = E^s \oplus E^u$ ($0 < \delta \leq \delta_1(f)$) は定理A、そして $\varepsilon_0 > 0$ は補題2.5のものとする。このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し $N = N(\varepsilon) > 0$ があって、すべての $n \geq N$ に対し

$$f^n(\tilde{D}^s(x)) \subset \tilde{D}^s_{\varepsilon_1}(f^n(x)) \quad (x \in \Sigma_\delta(f) \setminus P_0(f))$$

が成立する。従って任意の $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $x \in \Sigma_\delta(f) \setminus P_0(f)$ に

対し $\lim_{j\to\infty} d(f^j(x), f^j(y)) = 0$ $(y \in \tilde{D}^s_\varepsilon(x))$ が成り立つ。

この定理は $f \in \mathcal{G}^1(M)$ に対し expansive の仮定のもとで [11] で示されている。Araújo の証明では $f \in \mathcal{X}^1(M) \cap \mathcal{G}^2(M)$ の $p, q \in P(f)$ に対し $W^s(p) \pitchfork W^u(q)$ であること、$\Sigma_\delta(f) = \overline{P_\delta(f)}$ であること（定理Aの系）さらに Denjoy の定理の証明に用いられる次の補題を多少変形したものを利用することにより expansive に対応する計算を行っている。

<u>補題3.1.</u> $f : S^1 \circlearrowleft$ は C^2-写像とし、$\delta_0 \subset S^1$ は閉区間とする。もし $\sum_{i=0}^{\infty} \ell(f^i(\delta_0)) < \infty$ である定数 $c > 0$ に対して $|D_x f| > c$ $(\forall x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} f^i(\delta_0))$ であれば $\sum_{n=1}^{\infty} |D_{x_0} f^n| < \infty$ $(\forall x_0 \in \delta_0)$ が成立する。ここで ℓ は区間の長さを表す。

定理Dより、その仮定のもとで各点 $x \in \Sigma_\delta(f) \setminus P_0(f)$ に安定多様体 $W^s(x)$ の存在が言えたことに注意しておく。

$H(f)$ は $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ の hyperbolic な周期点全体とし、$H(f) \neq \phi$ としておく。$H(f)$ において $\sim$ を次のように定義する。$p \sim q$ $(p, q \in H(f))$ であるとは、$W^s(O(p)) \pitchfork W^u(O(q)) \neq \phi$ かつ $W^u(O(p)) \pitchfork W^s(O(q)) \neq \phi$ が成立することとする。λ-lemma より $\sim$ は同値関係である。ここで $O(p)$ は p の軌道を表す。

$H_p(f)$ を p $(\in H(f))$ の同値類とすると $\Theta(p) \subset H_p(f)$, $f(H_p(f)) = H_p(f)$.

<u>補題3.2</u> ([16]). 任意の $p \in H(f)$ に対し $f: \overline{H_p(f)} \circlearrowleft$ は top. transitive.

<u>補題3.3</u>. $f \in \mathcal{A}^1(M) \cap \mathcal{G}^1(M)$ とし、$0 < \delta \leq \delta_1(f)$ とする。このとき分解 $\Sigma_\delta(f) = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_k$ ($\Lambda_i \cap \Lambda_j = \phi$ if $i \neq j$) が存在し、各 $1 \leq i \leq k$ に対し Λ_i はコンパクト, f-不変、そして $\overline{P(f_{|\Lambda_i})} = \Lambda_i$. さらに各 i に対し $f: \Lambda_i \circlearrowleft$ top. transitive で local product structure を持つ。

$f: \Lambda_i \circlearrowleft$ が <u>local product structure</u> を持つとは、ある $\varepsilon > 0$ があって $\tilde{D}^s_\varepsilon(x) \cap \tilde{D}^u_\varepsilon(y) \in \Lambda_i$ $(x, y \in \Lambda_i)$ が成立することを言う。補題3.3は次のようにして示せる。定理Aの系より $\Sigma_\delta(f) = \overline{P_\delta(f)}$. よって補題3.2より $\Sigma_\delta(f) = \overline{H_p(f)} \cup \overline{H_q(f)} \cup \cdots$ と分解される。定理Dと $\tilde{D}^u(x) = W^u_{\varepsilon_0}(x)$ $(^\forall x \in \Sigma_\delta(f) \setminus P_0(f))$ であることを用いれば、$\overline{H_p(f)}$ の定義より上の分解の数は有限個であることが証明できる。また local product structure は補題2.7より示される。

Λ を f-不変 $(f \in \mathrm{Diff}^1(M))$ なコンパクト集合とする。Λ が

topological repellor であるとは、$f:\Lambda \circlearrowleft$ が稠密な軌道を持ちさらにコンパクト近傍 $U \supset \Lambda$ で $f^{-1}(U) \subset \operatorname{int} U$, $\bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(U) = \Lambda$ を満たすものが存在するときを言う。

定理E $f \in \mathcal{A}^1(M) \cap \mathcal{G}^2(M)$ に対し分解 $\Sigma_\delta(f) = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_k$ が存在し、各 i に対し次が成立する。

(1) $f(\Lambda_i) = \Lambda_i$, $f:\Lambda_i \circlearrowleft$ は稠密な軌道を持ち、$\overline{P(f_{|\Lambda_i})} = \Lambda_i$,

(2) 任意の $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して $d(x, y) < \delta$ $(x, y \in \Lambda_i)$ であれば $\tilde{D}^s_\varepsilon(x) \cap \tilde{D}^u_\varepsilon(y) \in \Lambda_i$,

(3) Λ_i が top. repellor でなければ Λ_i は hyperbolic,

(4) $\Sigma_\delta(f) \neq M$ であれば $m(\cup\{\Lambda_i \mid \text{top. repellors}\}) = 0$ が成立する。

定理Eの(3)を証明するためには($E^u_{|\Lambda_i}$ は expanding であったから)$E^s_{|\Lambda_i}$ が contracting であれば良い。そこで $E^s_{|\Lambda_i}$ が contracting でないとして Λ_i が repellor になることを示すのであるが、その証明は非常に複雑である。ここでも補題3.1を使っている。

m_u を $\tilde{D}^u_\varepsilon(x)$ $(x \in \Lambda_i)$ 上の Lebesgue 測度とする。(4)を示すために、まず $m_u(\tilde{D}^u_\varepsilon(x) \cap \Lambda_i) = 0$ $(\forall x \in \Lambda_i)$ を証明する。このことは Λ_i が top. repellor であることより予想できる

ことである。あとは $\Lambda_i \subset \bigcup_{x \in \Lambda_i} \tilde{D}^u_\varepsilon(x)$ よりFubiniの定理を用いれば $m(\Lambda_i)=0$ が従う。ここでFubiniの定理を使うために Λ_i 上の不安定多様体を Λ_i の近傍上の C^1-foliationに拡張し、Tubular flow theorem [18] を用いて $\mathbb{R}^2$ 上の積分に持ち込んで計算している。上のfoliationは2次元の C^2-hyperbolic setに対してはいつでも存在する。

4. 曲面上の微分同相におけるhyperbolic attractorの存在について。

ここでは、Araújoが得た次の定理を述べる。

定理(Araújo). Mを2次元 C^∞ 閉多様体とすると、あるresidual set $\mathcal{O} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ が存在して、$f \in \mathcal{O}$ に対しもし $\# P_0(f) < \infty$ であれば f は有限個(1個以上)のhyperbolic attractorを持ち、それらのbasinはMで稠密である。

証明を与える前にいくつかの定義と必要な定理を準備する。

Λ を $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ のhyperbolic setとする。Λ がisolated(あるコンパクト近傍 $U \supset \Lambda$ が存在して $\Lambda = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f^j(U)$ となること。)で $f: \Lambda \circlearrowleft$ が稠密軌道を持つとき、Λ はhyperbolic basic setと呼ばれている。Λ の安定集合,不安定集合は次のよう

に定義される。

$$W_f^s(\Lambda)=\{x\in M \mid \lim_{n\to\infty} d(f^n(x),\Lambda)=0\},$$

$$W_f^u(\Lambda)=\{x\in M \mid \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x),\Lambda)=0\}.$$

点 $p\in W_f^s(\Lambda)\cap W_f^u(\Lambda)\setminus\Lambda$ は、Λ に関する homoclinic point であると呼ばれる。

定理（Mañé[13]）. $f:M$ ⟲ は C^r-微分同相写像 $(r=1,2)$ とし、Λ は f の isolated hyperbolic set で $\Omega(f_{|\Lambda})=\Lambda$ を満たすものとする。もしある $x\in M$ に対し $x\notin W_f^s(\Lambda)$ で $\mu(\Lambda)>0$ $({}^\forall\mu\in\mathcal{M}(x))$ であれば、f の任意の C^r-近傍 $\mathcal{U}^r(f)$ に対しある $g\in\mathcal{U}^r(f)$ が存在し次を満足する。

(1) f と g は Λ のある近傍の上で一致している，

(2) $W_g^s(\Lambda)\cap W_g^u(\Lambda)\setminus\Lambda\neq\phi$.

定理（Bowen[3]）. Λ は C^2-微分同相写像 f の hyperbolic basic set とする。このとき Λ が attractor であることと $m(W_f^s(\Lambda))>0$ であることは同値である。

X を距離空間とし、X の空でないコンパクト集合全体を 2^X

で表す。Tは位相空間とし、$\varphi: T \to 2^X$ を写像とする。φ が上半連続[下半連続]であるとは、与えられた点$p \in T$と開集合U [コンパクト集合K]に対し、もし$U \cap \varphi(p) \neq \phi$ [$K \cap \varphi(p) = \phi$]であればpのある近傍Vが存在して、すべての $s \in V$ に対し $U \cap \varphi(s) \neq \phi$ [$K \cap \varphi(s) = \phi$]が成立することを言う。

Araújoの定理の証明.

任意の $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ に対し、basin を

$$B(f) = \cup \left\{ W_f^s(\Lambda) \,\middle|\, \Lambda : \text{hyperbolic attractor} \right\}$$

とおく。$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ に対し $\varphi_1(f) = \overline{P_0(f)}$, $\varphi_2(f) = m(B(f))$とおくと、これらの写像は下半連続であることがわかる。実際φ_1についてはHartmanの定理、φ_2については[9, 定理7.3]とLebesgue収束定理を用いて確められる。従って良く知られている結果より、ある residual set $\Theta \subset \mathrm{Diff}^1(M)$が存在しすべての $f \in \Theta$ は φ_1, φ_2 の上半連続点でもある。目的は、このΘが定理のものであることを示すことである。

任意の $f \in \Theta$ を固定し、$\# P_0(f) < \infty$であると仮定する。fは上半連続点であるから fの近傍$\mathcal{U}_0(f)$ があってすべての$g \in \mathcal{U}_0(f)$ に対し $\# P_0(g) = \# P_0(f)$. すなわち $f \in \mathcal{A}^1(M)$. 故に

定理Cより f の hyperbolic attractor の数は有限個である(attractor の存在はわからない)。結論を得るためには、f に(C^1-位相で)収束する微分同相写像の列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ で $m(B(f_n)) = 1$ $(n \geq 1)$ をみたすものの存在を示せば良い。

まず $\tilde{\mathfrak{A}}^1(M) = \{g \in \mathfrak{A}^1(M) \mid g$ は source を持つ。$\}$, $\hat{\mathfrak{A}}^1(M) = \{g \in \mathfrak{A}^1(M) \mid$ ある C^1-近傍 $\mathcal{U}(g)$ があって、任意の $\tilde{g} \in \mathcal{U}(g)$ に対し $\tilde{g}$ は source を持たない。$\}$、そして $\hat{\mathcal{O}} = \tilde{\mathfrak{A}}^1(M) \cup \hat{\mathfrak{A}}^1(M)$ とおく。$\hat{\mathcal{O}} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ は開集合で、$\mathfrak{A}^1(M)$ で稠密である。$\delta_1(f)$ は f に対する補題2.3のものとし、任意の $0 < \delta \leq \delta_1(f)$, f の近傍 $\mathcal{U}$ を固定する。$g \in \mathcal{U} \cap \hat{\mathcal{O}}$ に対し、

$$\tilde{\Sigma}_\delta(g) = \overline{\left\{ \Lambda \subset \Sigma_\delta(g) \,\middle|\, \begin{array}{l} \Lambda \text{ は hyperbolic basic set で} \\ \text{top. repellor ではない。} \end{array} \right\}}$$

とおく。この時点では $\tilde{\Sigma}_\delta(g) = \phi$ の可能性もある。写像 $\psi : \mathcal{U} \cap \hat{\mathcal{O}} \to 2^M$ を $\psi(g) = \tilde{\Sigma}_\delta(g)$ $(g \in \mathcal{U} \cap \hat{\mathcal{O}})$ とおくと ψ は下半連続である。これは $\Sigma_\delta(g)$ の中の任意の hyperbolic basic set Λ に対し、$\overline{P_\delta(g) \cap \Lambda} = \Lambda$ が成立することより示される。また、$\overline{P_\delta(g) \cap \Lambda} = \Lambda$ の証明は $\mathcal{M}_\delta(g)$ の定義と [21] より従う。$\mathcal{G}^2(M)$ は $\mathrm{Diff}^1(M)$ で稠密であるから、ある $R \subset \mathcal{U} \cap \hat{\mathcal{O}} \cap \mathcal{G}^2(M)$ (R は $\mathcal{U} \cap \hat{\mathcal{O}}$ で稠密)が存在して $\psi_{|R}$ が連続。故に任意の $g \in R$ に対し $m(B(g)) = 1$ を示せば十分である。以後 $g \in R$ を固定し、$\Sigma_\delta(g) = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$ は定理Eのものと

する。gがAnosov であれば($\dim M=2$) より $m(B(g))=1$ は明白である。よってgはAnosov でないとして良い。$g\in\hat{\mathcal{G}}$より定理Cから $\Sigma_\delta(g)\neq M$. $\Lambda_1,\cdots,\Lambda_r$をhyperbolic attractorの全体、$\Lambda_{r+1},\cdots,\Lambda_t$ をattractorでもrepellorでもないhyperbolic basic set の全体、そして$\Lambda_{t+1},\cdots,\Lambda_s$ をtop. repellorの全体とする。このとき $\Sigma_\delta(g)\neq M$, 定理Eそして Bowenの定理より $t>0$ が確められる。$m(B(g))\neq 1$ とすると、ある集合U ($m(U)>0$)があって $\omega(x)\cap(\cup_{i=1}^r\Lambda_i)=\phi$ ($^\forall x\in U$). $\Lambda_{t+1},\cdots,\Lambda_s$はtop. repellor の全体より、$\omega(x)\cap(\cup_{i=t+1}^s\Lambda_i)=\phi$ ($^\forall x\in U$). また、Bowenの定理より $U\cap(\cup_{i=r+1}^t W_g^s(\Lambda_i))=\phi$ (mod 0). 故に任意の $x\in U\cap\Lambda_\delta(g)\setminus(\cup_{i=r+1}^t W_g^s(\Lambda_i))$ に対し、$\omega(x)\cap\Lambda_j=\phi$ ($j\in\{1,\cdots,r,t+1,\cdots,s\}$). すべての $\mu\in\mathcal{M}(x)$ ($x\in U\cap\Lambda_\delta(g)\setminus\cup_{i=r+1}^t W_g^s(\Lambda_i)$) に対し $\mu(\Sigma_\delta(g))>0$ (補題1.1). よって $\mu(\cup_{i=r+1}^t W_g^s(\Lambda_i))>0$ ($^\forall\mu\in\mathcal{M}(x)$). $\Omega(g|_{\cup_{i=r+1}^t\Lambda_i})=\cup_{i=r+1}^t\Lambda_i$であるから、Mañéの定理が$g$に適用できて、ある $\bar{g}\in\mathcal{U}\cap\hat{\mathcal{G}}\cap\mathrm{Diff}^2(M)$ が存在して次を満たす。

(1) $\cup_{i=r+1}^t\Lambda_i$ のある近傍の上で $\bar{g}=g$,

(2) $^\exists j\in\{r+1,\cdots,t\}$: $W_{\bar{g}}^s(\Lambda_j)\cap W_{\bar{g}}^u(\Lambda_j)\setminus\Lambda_j\neq\phi$.

Kupka-Smale C^2-微分同相写像は $\mathrm{Diff}^2(M)$ で稠密であるから $\bar{g} \in \mathcal{U} \cap \hat{\mathcal{O}} \cap \mathcal{G}^2(M)$ であるとして良い。点 $p \in W^s_{\bar{g}}(\Lambda_j) \cap W^u_{\bar{g}}(\Lambda_j) \setminus \Lambda_j$ ($p \notin U_j \supset \Lambda_j$: isolated 近傍) を固定する。$\overline{P_\delta(\bar{g}) \cap \Lambda_j} = \Lambda_j$ より(必要ならば p の近傍で $\bar{g}$ を摂動させることにより) ある $q \in P_\delta(\bar{g})$ に対し $p \in W^s_{\bar{g}}(q) \pitchfork W^u_{\bar{g}}(q)$ が成立する。故に補題 2.7 より $p \in \Sigma_\delta(\bar{g})$, 特に $p \in \tilde{\Sigma}_\delta(\bar{g})$. 従って $\tilde{\Sigma}_\delta(\bar{g})$ が $\tilde{\Sigma}_\delta(g)$ よりも増大してしまい g が ψ の連続点であることに反する。よって $m(B(g)) = 1$.

References

1. N. Aoki, The set of Axiom A diffeomorphisms with no-cycle, preprint.
2. A.L. Araújo, On the existence of hyperbolic attractors for diffeomorphisms of surface, preprint.
3. R. Bowen, Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, L.N.M. 470 (1975).
4. J.P. Eckmann and D. Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, Rev. Mod. Phy., 57 (1985), 617 - 656.
5. J. Franks, Necessary conditions for stability of

diffeomorphisms, Trans. A.M.S., 158 (1971), 301-308.

6. S. Hayashi, Diffeomorphisms in $\mathcal{F}^1(M)$ satisfy Axiom A, preprint.

7. M. Hénon, A two-dimensional mapping with a strange attractor, Commun. Math. Phys. 50 (1976), 69-77.

8. M. Hirsh, M. Shub and C. Pugh, Invariant manifolds, L.N.M. 583 (1977).

9. M. Hirsh and C. Pugh, Stable manifolds and hyperbolic sets, Proc. Sympos. Pure Math. 14, A.M.S., 1970, 133-163.

10. A. Katok, Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms, Publ. Math. IHES, 51 (1980), 137-173.

11. R. Mañé, Contributions to the stability conjecture, Topology 17 (1978), 383-396.

12. ———, An ergodic closing lemma, Ann. of Math., 116 (1982), 503-541.

13. ———, On the creation of homoclinic points, Publ. Math. IHES, 66 (1988), 139-159.

14. ———, A proof of the C^1 stability conjecture, Publ.

Math. IHES, 66 (1988), 161-210.

15. ________, Ergodic theory and differentiable dynamics, Springer-Verlag (1987).

16. S. Newhouse, Hyperbolic limit sets, Trans. A.M.S., 167 (1972), 125-150.

17. ____________, Diffeomorphisms with infinitely many sinks, Topology 12 (1974), 9-18.

18. J. Palis and W. Melo, Geometric theory of dynamical systems, Springer-Verlag (1982).

19. J. Palis and F. Takens, Homoclinic bifurcations and hyperbolic dynamics, IMPA (1985).

20. R.V. Plykin, Sources and sinks of A-diffeomorphisms, USSK, Sbornik, 23 (1974).

21. K. Sigmund, Generic properties for Axiom A diffeomorphisms, Inventiones Math., 11 (1970), 99-109.

22. R. Williams, Classification of one-dimensional attractors, Proc. Symp. Pure Math., 14 (1970), 341-363.