数理解析研究所講究録
第 807 巻 1992 年 57-70

"rational singularity" の cyclic covering について
（標数 $p>0$ の場合）

東海大・理　渡辺敬一

序

標数0の代数多様体の特異点の理論に於て，rational singularity の概念から始って、terminal，canonical，elliptic，log-terminal，log-canonical 等々の多くの特異点の概念が定義されている。一方，標数 $p>0$ の環に対しても，Frobenius 写像と，これによって定義される ideal の tight closure の概念を用いて，F-regular，F-rational，F-pure 等の概念が定義されている。

本稿の目的の一つは，F-regular（正確には strongly F-regular），F-pure ring の finite cyclic cover に対する挙動を調べる事である。integral divisor に関する cyclic cover に対して，F-regular，F-pure という性質が保存される事は［9］で見ているが，一般の（fractional divisor に対する）cyclic cover のときは，「分数部分」D' によって cyclic cover が F-regular（F-pure）にな

るか否かが記述される。この事実は，丁度標数0の"log-terminal（又は log-canonical）pair"の挙動と一致する。

一方，2次元の F-regular ring, normal F-pure ring を分類すると，前者は"quotient singularity"，後者は、前者に simple elliptic singularity と cusp singularity 及びそれらを cyclic covering としてもつ rational singularity を加えたものになり，それぞれ log-terminal, log-canonical singularity と一致する。このように，F-regular と log-terminal, F-pure と log-canonical が「同値」となる事が期待されるが，本稿では，

「標数0の特異点が，無限個の素数pに対し，その標数pへの reduction が F-regular（resp. F-pure）なら，log-terminal（resp. log-canonical）である。」を canonical class が有限（Q-Gorenstein）の場合に示す。

逆に，log-terminal（resp. log-canonical）singularity は，無限個の素数pに対して reduction mod. p が F-regular（resp. F-pure）になるか？という問は未解決だが，標数0の特異点の性質の判定に標数 $p>0$ の概念が使えるのは興味深い事と思われる。

§1. Preliminaries.

R は標数 $p>0$ の環とする。以下 R は reduced と仮定し, $R^{\circ} := R \setminus \bigcup\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}$ は R の minimal prime$\}$ とおく。

$F: R \to R$ を Frobenius map, $F(a)=a^p$ とし, F と $R \hookrightarrow R^{1/p}$ を同一視する。本稿に於ては, 条件

F は finite map

を常に仮定する。(例えば, R は体 k 上 ess. of fin. type, k は perfect field 上有限生成. 又は R は complete local, 剰余体 k は上の条件をみたす。)

定義 (1.1). (1) (Hochster–Roberts, [4]) R が F-pure $\Leftrightarrow$ $R \hookrightarrow R^{1/p}$ が R-module として split.

(2) (Hochster–Huneke, [3,2]) R が strongly F-regular $\Leftrightarrow$ $\forall c \in R^{\circ}$, $\exists q = p^e$, $R \hookrightarrow R^{1/q}$, $1 \to c^{1/q}$ が split as R-module.

注. "F-regular" という用語には, まだ研究が始まって日が浅いという事もあり, 他に, "weakly --", 単に "F-regular" 等の言葉が使われているが, R が Gorenstein のときには, 上記の3つは一致する。(cf. [3])

$(R, \mathfrak{m})$ が local ring のとき, $R/\mathfrak{m}$ の injective envelope $E := E_R(R/\mathfrak{m})$ による F-pure, F-regular の判定がある。

<u>Lemma</u> (1.2). $(R, \mathfrak{m})$: local, $E = E_R(R/\mathfrak{m})$ のとき,

(1) R が F-pure $\iff$ $F \otimes 1 : E = E \otimes_R R \to E \otimes_R R^{1/p}$ が injective.

(2) R が strongly F-regular $\iff$ $\forall c \in R^{\circ}$, $\exists q = p^e$, $c^{1/q} . F^e(z) \neq 0$ in $F^e(E) := R^{1/q} \otimes_R E$, ここで z は $\mathrm{Soc}_R(E) = [0 : \mathfrak{m}]_E$ の生成元.

(証明) (1) は [4], (2) は $R \xrightarrow{f} R^{1/q}$, $1 \to c^{1/q}$ が split $\iff$ $f \otimes 1 : E \longrightarrow R^{1/q} \otimes_R E$ が split $\iff$ $f \otimes 1$ が injective $\iff$ $c^{1/q} . F^e(z) = (f \otimes 1)(z) \neq 0$ ([9], (1.2)).

[9] (1.4) では (2) の条件を "weakly F-regular" と同値としたが, 上で示したように, "strongly F-regular" と同値が正しい。(両者の区別がなくなると一番良いのだが。)

$(R, \mathfrak{m})$: normal local で, canonical module K_R をもつとき, $E_R(R/\mathfrak{m}) \cong H^d_{\mathfrak{m}}(K_R)$ である ($d = \dim R$). このとき, $H^d_{\mathfrak{m}}(K_R)$ への Frobenius 写像は

$$H^d_{\mathfrak{m}}(K_R) \xrightarrow{F^e} H^d_{\mathfrak{m}}(K_R) \otimes_R R^{1/q} \cong H^d_{\mathfrak{m}}((K_R^{(q)})^{1/q})$$

で得られる。ここで, $K_R = R(K_R)$ と divisor で書くとき, $K_R^{(q)} = R(qK_R)$ である。$(\ )^{1/q}$ は $R^{1/q}$ の商体で考える事を示す。([9], (2.5)). これを用いて次が示せる。

<u>命題</u> (1.3). ([9], 2.7) $(R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ が normal local rings の finite local hom で, codim. 1 で étale のとき,

R が F-pure (resp. strongly F-regular) $\Rightarrow$ S もそう。

以下に於て cyclic cover (又は normal $\mathbb{Z}_r$-graded ring) の概念が主要な役割を果すので、これに関する言葉を準備する。(詳しくは、[7] 参照)

$S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} S_i$ を cyclic group $\mathbb{Z}_r$ による grading をもつ normal 整域 とする。このとき、$S_0 = R$ も normal で、$u \neq 0 \in S_1$ をとり、R の商体を K、$u^r = f$ とおくと、

$D := \frac{1}{r} \mathrm{div}_R(f)$ とおいて、$S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(iD) \cdot u^i$ と書ける。但し、$R(iD) = \{x \in K \mid \mathrm{div}_R(x) + iD \geqq 0\}$。この記号の下で、$S$ を

$S = S(R, D, f)$ と表す事にする。一般には、D は $\mathbb{Q}$-係数の divisor で、$D = \sum \frac{p_V}{q_V} \cdot V$ $(q_V, p_V) = 1, q_V > 0$ と表すとき、D の分数部分を表す divisor を、

$D' := \sum \frac{q_V - 1}{q_V} \cdot V$ と書くことにする。

R の canonical module を K_R、$K_R \in \mathrm{Div}(R)$ を $K_R = R(K_R)$ とすると、

$K_S \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(K_R + D' + iD) \cdot u^i$,

特に、K_S が S-free $\Longleftrightarrow$ $\exists i$, $K_R + D' \sim iD$ (linearly equivalent) である事を注意しておこう。

§2. Cyclic cover の F-regularity, F-purity.

R を標数 $p>0$ の体を含む Noetherian local normal ring, $R \hookrightarrow R^{1/p}$ は finite とする。$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとする。$S = S(R, D, f)$ を R の r-cyclic cover, $p \nmid r$ とする。次の条件 (*)

(*) $r = \min\{ i > 0 \mid iD$ は R の principal divisor$\}$

を仮定すると, S も local ring である。

我々の目標は, S が F-pure (resp. strongly F-regular) になるための条件を (R, D) を用いて記述する事だが, 結果として log-terminal, log-canonical singularity と同じ現象が現れる事に注意したい.

まず, $D \in \mathrm{Div}(R)$ (integral divisor) のときは, (1.3) により,

(2.1) $S = S(R, D, f)$, $D \in \mathrm{Div}(R)$, $p \nmid r$ のとき, S が F-pure (resp. strongly F-regular) $\Leftrightarrow$ R が F-pure (resp. strongly F-regular).

($\Leftarrow$ は (1.3) だが, $\Rightarrow$ はどちらの性質も pure subring —特に直和因子— に遺伝する事より。[3], [4] 参照。)

問題は D が分数部分をもつ時だが, (1.2) の議論を用いて F-pure, strongly F-regular の条件を判定する。

$$K_S \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(K_R + D' + iD)\cdot u^i$$

だが、次の事実が重要である。（$d := \dim R$ とする。）

<u>Lemma</u> (2.2). $\mathrm{Soc}_S(H^d_m(K_S)) = \mathrm{Soc}_R(H^d_m(R(K_R+D')))$ $= H^d_m(R(K_R)) = H^d_m(K_R)$.（即ち、$K_S$ の socle は "degree 0" の部分に存在する。）

（証明）$H^d_m(K_S) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} H^d_m(R(K_R + D' + iD))\cdot u^i$ が S 上 injective module である事は既知だから、$\mathrm{Soc}_S(H^d_m(K_S))$ は長さ 1 の S-module である。従って、$\mathrm{Soc}_R(H^d_m(R(K_R+D')))$ が S の maximal ideal $n := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_r, i\neq 0} R(iD)\cdot u^i \oplus m$ により零化される事を見れば良い。m の元をかけて 0 になるのは Soc_R の元よりあきらかだから、$a \in R(iD)$ と $\xi \neq 0 \in \mathrm{Soc}_R(H^d_m(K_R))$ に対して、$au^i\cdot\xi = 0$ in $H^d_m(R(K_R+D'+iD))\cdot u^i$ を示せば良い。ところで、$R(iD)$ の定義より、$\mathrm{div}_R(a) + iD \geqq 0$ だが、r の最小性（条件 (*)）より等号は成立たない。従って、$a\xi \in H^d_m(R(K_R - \mathrm{div}_R(a)))$ はこの加群の socle の元だが、次の sublemma により、$H^d_m(R(K_R + D' + iD))$ に於て $a\xi = 0$ であり、$\mathrm{Soc}_R(H^d_m(K_R)) \subset \mathrm{Soc}_S(H^d_m(K_S))$ がわかる。

<u>Sublemma.</u> $I, J \subset K$ を R の divisorial ideal で（R-reflexive な fractional ideal）$I \subsetneqq J$ とする。このとき $I \hookrightarrow J$ から得られる写像 $H^d_m(I) \to H^d_m(J)$ は <u>injection ではない</u>。

[5]に、"pair (X, Δ) が log-terminal (resp. log-canonical) という定義があるが、これの真似をしてみよう。

以下に於て、$p \nmid r$ と仮定する。

定義 (2.3). $D' \in \mathrm{Div}(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を $\sum \frac{q_V - 1}{q_V} \cdot V$ の形のものとする。このとき、

(1) (R, D') が F-pure $\Longleftrightarrow$ $F : H^d_m(R(K_R + D')) = H^d_m(K_R) \longrightarrow H^d_m(R(p(K_R + D')))$ が injection.

(2) (R, D') が F-regular $\Longleftrightarrow$ $\forall c \in R,\ c \neq 0,\ \exists q = p^e,$ $c \cdot F^e(\xi) \neq 0$ in $H^d_m(R(q(K_R + D')))$.

すると、(2.3) と (2.2) より直ちに次が得られる。

定理 (2.4). $S = S(R, D, f)$ のとき、

(1) S が F-pure $\Longleftrightarrow$ (R, D') が F-pure

(2) S が strongly F-regular $\Longleftrightarrow$ (R, D') が F-regular.

(証明) 一般に、S-divisorial ideal $I := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(E + iD) u^i$ ($E \in \mathrm{Div}(R) + \sum_V \frac{1}{q_V} \mathbb{Z} \cdot V \subset \mathrm{Div}(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$) に対して、

$I^{(q)} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(qE + iD) \cdot u^i$ であり、従って、特に

$K_S^{(q)} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(q(K_R + D') + iD) \cdot u^i$ であるので、(2.2) より求める結果を得る。

§ 3. F-regular (F-pure) ring ⇒ log-terminal (log-canonical) singularity.

これまで述べて来たように, F-regular ring と log-terminal singularity, F-pure ring と log-terminal singularity は本質的に同値な概念と思える。ただ, 標数0の環を標数 $p>0$ に reduction した時の Frobenius 写像の作用が良くわからない等、いろいろ難しい点はあるように思われる。ここでは, "標数0の特異点が無限個の $p>0$ での reduction で F-pure (resp. F-regular) なら log-canonical (resp. log-terminal)" という事実の "Frobenius splitting" ([6]参照) を用いた証明をしてみよう。

まず, log-terminal (resp. log-canonical) singularity の定義を復習しよう。([5])

(3.1) (X, x) 標数0の体 K 上定義された normal algebraic variety の特異点とし,

$f: Y \longrightarrow X$ を resolution, $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ を Y の exceptional set, E は simple normal crossing と仮定する。(SNC と略す。) また, $\exists r > 0$, $\omega_X^{[r]} = \mathcal{O}_X(rK_X)$ は invertible とする。(K_X : X の canonical divisor).

$$K_Y = f^*(K_X) + \sum_{i=1}^{n} a_i E_i$$

と書くとき，X が log-terminal (resp. log-canonical)
$\Longleftrightarrow$ $a_i > -1$ (resp. $a_i \geqq -1$) $(i=1,\cdots,n)$.

<u>定理</u>.(3.2). (X,x) は (3.1) の通りとする。もし，$\mathcal{O}_{X,x}$ の標数 p への reduction が無限個の $p>0$ に対し F-pure (resp. strongly F-regular) $\Rightarrow$ (X,x) は log-canonical (resp. log-terminal) singularity.

(証明) まず，(3.1) の X の resolution $f: Y \to X$ を fix する。f, Y, X はすべて K 上 of finite type だから，$\exists A$: $\mathbb{Z}$ 上有限生成の ring で $A \subset K$, $\exists f_A: Y_A \to X_A$, morphism of schemes of finite type over A s.th.

$$f_A \otimes_A K : Y_A \otimes_A K \longrightarrow X_A \otimes_A K \text{ が } f \text{ と一致する。}$$

<u>条件</u> "Y, E が $\mathrm{Spec}(A)$ 上 smooth" は open condition だから (3.1) の条件をすべて保った，標数 $p>0$ の体 $k(\mathfrak{p})$ $(\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A))$ が存在する，即ち，

$$f_A \otimes_A k(\mathfrak{p}) : Y_A \otimes_A k(\mathfrak{p}) \longrightarrow X_A \otimes_A k(\mathfrak{p})$$

は X の標数 $p>0$ への reduction の resolution である。

従って我々は次の定理を示せば良い事になる。

<u>定理</u> (3.3). $f: Y \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$. $(R,\mathfrak{m})$ は標数 $p>0$ の local ring, f は resolution で，f の exceptional

set E は simple normal crossing とする。また，R は quasi-Gorenstein (ω_R が R-free) とする。このとき，($K_R = R$ とおいて) $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(\sum a_i E_i)$ とするとき，R が F-pure (resp. strongly F-regular) ならば，$\forall a_i \geqq -1$ (resp. $\geqq 0$).

("log-terminal, log-canonical singularity" も，F-pure, (strongly) F-regular ring もどちらも canonical cover をとっても保たれるので ($p \nmid cl(K_R)$ の order のとき)，$K_R \cong R$ のときに帰着して良い。)

(証明) $U = Y - E \cong \mathrm{Spec}(R) - \mathrm{Sing}(R)$ とおく。まず、"R が F-pure" を仮定すると，$\exists \varphi : R^{1/p} \longrightarrow R$，$R$-hom. で $\varphi \circ i = id_R$ ($i : R \hookrightarrow R^{1/p}$)。この φ は U に制限する事により，$\varphi : \mathcal{O}_U^{1/p} \longrightarrow \mathcal{O}_U$ をひき起す。

さて，一般に，"adjunction formula" により，標数 p の scheme X に対し，$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{1/p}, \omega_X) \cong (\omega_X)^{1/p}$ ($(\omega_X)^{1/p}$ は $(X, \mathcal{O}_X^{1/p})$ の dualizing module.)。従って，ω_X が invertible とすると，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{1/p}, \mathcal{O}_X) &\cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{1/p}, \omega_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\omega_X)^{-1} \\ &\cong (\omega_X)^{1/p} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\omega_X)^{-1} \cong (\omega_X^{\otimes(1-p)})^{1/p} \\ &= (\mathcal{O}_X((1-p)K_X))^{1/p}.\end{aligned}$$

従って，$\varphi \in H^0(U, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^{1/p}, \mathcal{O}_U)) \cong H^0(U, \omega_U((1-p)K_U))$.

我々は、このφをYに延長する事を考える。
$H^0(U, \mathcal{O}_U) = H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = R$ だから ($\mathrm{codim}(\mathrm{Sing}(R)) \geqq 2$)、$\forall b_i \geqq 0$ のとき、$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\sum b_i E_i)) \supseteq H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = R$ で、$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\sum b_i E_i)) = R$。 $H^0(Y, \mathcal{O}_Y((1-p)K_Y)) = H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\sum(1-p)a_i E_i))$ だから、もし $\forall a_i \leqq 0$ のとき、$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\sum(1-p)a_i E_i)) = H^0(U, \mathcal{O}_U(\sum(1-p)a_i E_i)) = R$ となり、φはYに延長される。しかし、我々の示したい結論は、$\forall a_i \geqq -1$ (resp. $\geqq 0$) だから、$a_i > 0$ なる E_i については考える必要がない。ゆえに、

$$Y' := Y - \bigcup_{a_i > 0} E_i$$

とおく。$(1-p)K_{Y'} \geqq 0$ だから、$H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}((1-p)K_{Y'})) \cong H^0(U, \mathcal{O}_U) \cong R$、$\varphi$は $\psi : \mathcal{O}_{Y'}^{1/p} \to \mathcal{O}_{Y'}$ に延長される。

次に、合成写像 $\varphi \circ i : \mathcal{O}_{Y'} \to \mathcal{O}_{Y'}^{1/p} \to \mathcal{O}_{Y'}$ を考えると、$\varphi \circ i \in H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}) \cong R \cong H^0(U, \mathcal{O}_U)$ だから、Rの元の multiplication と同一視され、また、その値は U 上の作用で決定される。我々は $R \hookrightarrow R^{1/p}$ の splitting $R^{1/p} \to R$ から出発したから、$\varphi \circ i$ はRの unit である。従って、合成写像 $\psi \circ i : \mathcal{O}_{Y'} \to \mathcal{O}_{Y'}$ は各点で bijection でなければならない。

さて、もし、ある $a_i < -1$ とすると、$(1-p)a_i \geqq p$ である。点 $x \in E_i \cap Y'$ に於て、E_i の定義方程式を f_i

とおくと，x での $\mathcal{O}_{Y'}((1-p)K_{Y'})$ の生成元を $\tilde{\psi}_0$ とすると，ψ に対応する $\tilde{\psi} \in H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}((1-p)K_{Y'}))$ は x に於て，$\tilde{\psi}_x \in f_i^{p} \cdot (\tilde{\psi}_0)_x \cdot \mathcal{O}_{Y',x}$ をみたし，従って，$\psi_x \in f_i^{p} \cdot \psi_0 \cdot \mathcal{O}_{Y',x}$.
ゆえに，$\psi_x \circ i : \mathcal{O}_{Y',x} \hookrightarrow (\mathcal{O}_{Y',x})^{1/p} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y',x}$ の image は $f_i \cdot \mathcal{O}_{Y',x}$ に含まれ，$\psi \circ i$ が bijection である事に反する。ゆえに，$\forall a_i \geq -1$ で，F-pure $\Rightarrow$ log-canonical が示せた。

また，$\exists c \neq 0 \in R$，$c \in I(\mathrm{Sing}(R))$，$\exists q = p^e$，$R \longrightarrow R^{1/q}$，$1 \longrightarrow c^{1/q}$ が split by $\varphi : R^{1/q} \longrightarrow R$ とすると，上述のように，$\varphi|_U : \mathcal{O}_U^{1/q} \to \mathcal{O}_U$ を $\psi : \mathcal{O}_{Y'}^{1/q} \to \mathcal{O}_{Y'}$ に延長したとき，$\exists a_i = -1$ とすると，$x \in E_i \cap Y'$ に於て，$\exists \psi_0 : (\mathcal{O}_{Y',x})^{1/q} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y',x}$，$c \cdot \psi \in f_i^{q} \cdot \psi_0 \cdot \mathcal{O}_{Y',x}$ （$f^*(c) \in \mathcal{O}_Y(-E)$ より）。従って，$\mathcal{O}_{Y',x} \ni 1 \longrightarrow c^{1/q} \in (\mathcal{O}_{Y',x})^{1/q} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{Y',x}$ の像が $f_i \cdot \mathcal{O}_{Y',x}$ に含まれる事になり，ψ が各点で splitting を与える事に反する。従って，$\forall a_i > -1$，R は log-terminal が示せる。

特に，R が strongly F-regular ならば，上の条件がみたされ，$\forall a_i > -1$ が示せる。

<u>追記</u>　このノートは、本シンポジウムに於ける泊・渡辺の講演の "char. $= p > 0$" の部分をまとめたもので，前半の "標数 0" の部分は泊氏のノートを参照して下さい。

REFERENCES

[1] R. Fedder and K.-i. Watanabe, A characterization of F-regularity in terms of F-purity, in "Commutative Algebra", Proc. Microprogram, MSRI Publ. 15, 227-245, Springer, 1989.

[2] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure, Invariant theory, and the Briancon-Skoda Theorem, J. of Amer. Math. Soc. 3 (1990), 31-116.

[3] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure and strong F-regularity, Mem. Soc. Math. France, 38 (1989), 119-133.

[4] M. Hochster and J. L. Roberts, The purity of the Frobenius and local cohomology, Adv. in Math. 21 (1976), 115-175.

[5] Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki, Introduction to minimal model problem, Alg. Geom. Sendai (T. Oda ed.), Adv. studies in Pure Math. 10, Kinokuniya-North Holland (1987), 283-360.

[6] V.B. Mehta and A. Ramanathan, Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties, Ann. of Math. 122 (1985), 27-40.

[7] M. Tomari and K.-i. Watanabe, Normal Z_r-graded rings and normal cyclic covers. (Normal cyclic covers, I), to appear in Manuscripta Math.

[8] K.-i. Watanabe, Study of F-purity in dimension two, in "Algebraic Geometry and Commutative Algebra: in honor of Masayoshi Nagata", vol. II, Kinokuniya, Tokyo, 1988, 791-800.

[9] K.-i. Watanabe, F-regular and F-pure normal graded rings, J. of Pure and Appl. Alg. 71 (1991), 341-350.