数理解析研究所講究録
第 807 巻 1992 年 126-130

On signature defects of cusps

東北大教養　尾形庄悦 (Shoetsu Ogata)

この講演では，以下の型の正規孤立特異点 (V, p) をカスプ (cusp) と呼ぶことにする。

I　土橋カスプ —— Hilbert モジュラーカスプを一般化したもので，特異点の近傍 $V-\{p\}$ が開凸錐 $C\subset\mathbb{R}^n$ と算術的部分群 $G_{\mathbb{Z}}\subset \mathrm{Hol}(\mathbb{R}^n+\sqrt{-1}C)$ を使ってチューブ領域の商 $G_{\mathbb{Z}}\backslash\mathbb{R}^n+\sqrt{-1}C$ と表わせるものである。詳しい定義は[T]を参照。

II　球積カスプ（これは筆者の造語で，未だ定着していない）—— 特異点の近傍 $V-\{p\}$ が複素単位球の直積 $\overset{r}{\times}\mathbb{B}^n$ $(r\geq 2,\ n\geq 2)$ の商であるもの。$n=1$ にすると Hilbert モジュラーカスプである。特に，$r=2$ の場合，特異点解消の例外因子は各既約成分がひとつの $2n-2$ 次元アーベル多様体上の $\mathbb{P}^1$ 束で 0 切断と ∞ 切断で他の成分と交わったサイクルである。定義は[O2]を参照。

次に，n 次元カスプ (V, p) の不変量 $\sigma(p)$ と $\chi_\infty(p)$ とを定義する。$(U, X)\longrightarrow(V, p)$ を toroidal embeddings を使った特異点解

消で，$X=\bigcup_{i\in I}X_i$ が単純正規交叉を持つ因子であるものとする。各 X_i の定める基本類の双対を $\delta_i\in H^2(U,\partial U;\mathbb{Z})$ を表わす。佐武[S1]に従って，カスプ (V,p) の signature defect $\sigma(p)$ を以下のように定める。

$$\sigma(p)=\Big[\prod_{i\in I}\delta_i\coth\delta_i\Big]_n[U,\partial U]-\mathrm{sign}(U,\partial U).$$

ここに第一項は，形式的巾級数の n 次の項に基本類 $(U,\partial U)$ を代入したもので，その値は有理数である。第二項は，$H^n(U,\partial U)$ 上でカップ積で定義された二次形式の符号数である。

<u>注意</u>。(V,p) が Hilbert モジュラーカスプの時には，この定義は Hirzebruch の定義[H]と一致する。

もうひとつの不変量 $\chi_\infty(p)$ も佐武[S1]に従って

$$\chi_\infty(p)=\Big[\prod_{i\in I}\delta_i/(1-e^{-\delta_i})\Big]_n[U,\partial U]$$

で定義する。この不変量の名前は未だ確定していない。意味は判っていて，(V,p) が対称チューブ領域のカスプの時にカスプ形式の次元公式に対するカスプ (V,p) の寄与が $(-1)^n\chi_\infty(p)$ である。

<u>定理</u>　(V,p) を $n=2k$ 次元カスプとするとき，等式

$$\sigma(p)=2^n\chi_\infty(p)$$

が成立する。

この定理と，本研究集会中の石田氏の講演の主定理とを合わせると，Hirzebruchの予想[H]の代数幾何的証明を与えている。更に，土橋カスプへの予想の一般化の解答も与える。このことについては[SO]を参照。

1. 符号数公式

定理の証明に使う重要な公式を示す。(V,p)を一般のn次元正規孤立特異点とする。$(U,X)\longrightarrow(V,p)$を射影的特異点解消で，$X=\bigcup_{i\in I}X_i$が単純正規交叉をもつ因子であるものとする。$\Delta=\{J\subset I \mid X_J:=\bigcap_{i\in J}X_i\neq\phi\}$，$\Delta(j)=\{J\in\Delta \mid |J|=j\}$とおく。$J\in\Delta(j)$に対し，$H^{n-2j}(X_J;\mathbb{R})$上の二次形式$Q_J$を

$$Q_J(u,v)=(u\vee v\vee c_1(L)^j)[X_J]$$

で定める。ここにLはX_J上のample直線束である。

<u>主定理</u>　次の等式が成立する。

$$\mathrm{sign}(U,\partial U)=-\sum_{J\in\Delta}\mathrm{sign}\,Q_J\,.$$

証明するためには，Uを含むn次元射影多様体とその上のケーラー計量をえらんで，$H^n(U,\partial U)$に具合のよりLefschetz分解を与えることと，その原始部分の次元をX_JのHodge数で表わすことが重要になる。詳しくは[O1]を参照。

2. 型Iの場合.

以下，$n=2k$とし，$\tau_\infty(p)=[\prod_{i\in I}\delta_i \coth\delta_i]_n[U,\partial U]$とおく。

命題(佐武[S1]). 次の等式が成立する.

$$\tau_\infty(p)-2^n\chi_\infty(p)=\sum_{j=1}^{n}(-2)^{n-j}\,\#\Delta(j).$$

一方，X_J ($J\in\Delta(j)$) は $n-j$ 次元トーリック多様体で $H^{2i}(X_J)\cong H^{i,i}(X_J)$ だから，

$$h^{i,i}(X_J)=\sum_{t=0}^{i}(-1)^{i-t}\binom{n-j-t}{i-t}\,\#\Delta_J(t+j)$$

と表わせる。ここに $\Delta_J(\ell)=\{K\in\Delta(\ell)\mid K\supset J\}$ である。この事実と前節の符号数公式より，次が判る。

命題[O1]

$$\mathrm{sign}(U,\partial U)=\sum_{j=1}^{n/2}(-1)^j\left\{2^{n-j}-\sum_{i=0}^{j-1}\binom{n-j}{n/2-i}\right\}\#\Delta(j).$$

ふたつの命題中の和を比較すると，和の範囲が異なることに気づく。ここに困難がある。Δがオイラー複体をなすことを使って長い計算の後に次が判る。

命題[O1]

$$\tau_\infty(p)-2^n\chi_\infty(p)=\mathrm{sign}(U,\partial U).$$

3. 型IIの場合.

このとき，各 X_J はトーリック多様体をファイバーとするアーベル多様体上のファイバー束になり，特に $\chi(Q_{X_J})=0$ である。このことから次が判る。

命題(佐武[S2])

$$\tau_\infty(p) = 2^n \chi_\infty(p).$$

更に，X_J の Hodge 数はファイバーの Hodge 数と底空間の Hodge 数で表わせるから，型Iの場合より簡単な計算で次が判る．

命題[O2]

$$\mathrm{sign}(U, \partial U) = 0.$$

References

[H] F. Hirzebruch, *Hilbert modular surfaces*, Enseign. Math. **19** (1974), 183–281.

[I] M.-N. Ishida, *The duality of cusp singularities, preprint.*

[O1] S. Ogata, *Hirzebruch's conjecture on cusp singularities (preprint).*

[O2] S. Ogata, *Signature defects of Hilbert-Picard modular cusps (preprint).*

[S1] I. Satake, *On numerical invariants of arithmetic varieties of $\mathbb{Q}$-rank one*, in "Automorphic Forms of Several Variables," Taniguchi Symposium, Katata, 1983 (I. Satake and Y. Morita eds.) Adv. Studies in Pure Math. **46**, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1984, pp. 353–369.

[S2] I. Satake, *On the y-genus of arithmetic varieties of $\mathbb{Q}$-rank one*, Advances in Math. (Chinese Math. Soc.) **16** (1987), 269–276.

[SO] I. Satake and S. Ogata, *Zeta functions associated to cusps and their special values*, in "Automorphic Forms and Geometry of Arithmetic Varieties," (Y. Namikawa and K. Hashimoto eds) Adv. Studies in Pure Math. **15**, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1989, pp. 1–27.

[T] H. Tshuchihashi, *Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities*, Tohoku Math. J. **35** (1983), 607–639.