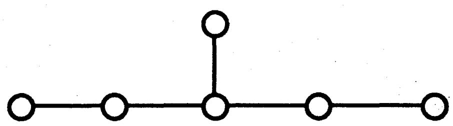
数理解析研究所講究録
第808巻 1992年 159-166

ハッセ原理に関連したマニンの予想について

都立大理学部
Tokyo Metropolitan University
卜部東介
Tohsuke Urabe

はじめに



昨年の今ごろ（１９９０年末頃）ロシアの数学者マニンの出世作になった有名な本「Cubic Forms」を読み返していた。ご存じの方も多いと思うがこの本は三次元射影空間内の三次曲面を主題にし、著者の観点からそれに関連した数学をさまざまな方向から取り上げたものである。とくに多くのページを割いてディンキン図形 E_6 と三次曲面の関連を論じてある。自分は「代数多様体とディンキン図形」というテーマで研究を進めているので、これを読み返すうちに何か新しい得るものが有るのではないかと思ったのである。

１８２ページに予想３１．７というのがあった。これを読んだとたん、あれ、これは解けるぞ、と思った。予想３１．７の具体的内容は、この記事の続く部分で説明する。M. Artin と J. Tate の結果よりヒントを得、予想３１．７を立てるに至った、三次曲面についてはそれが成り立っていることを、場合ごとの具体的な計算でチェックできると書いてあった。本全体の記述からして、予想３１．７は重要な意義があることも判った。解けるとすれば、何も難しいことはない、かなり初等的な方法で解けるはずだとも思われた。マニンが解けないのは、単に最初に思い付いた方法が複雑なものであって、それに固執するからであって、発想を切り替えればそれで良いのだとも思われた。

ならば、既に世界の何処かで誰かが解いてしまっていてもおかしくはないと思った。

この本「Cubic Forms」には二つの版がある。第一版は１９７４年に出され、第二版は１９８６年に出されている。第二版には第一版には無い付録が付いている。そこでは、第一版の出版以来現われたこの本の内容に関連した新しい結果の展望がなされている。この付録を詳しく読んでみたが、予想３１．７についての記述はなかった。そこで、何人かの代数幾何専攻の方に予想３１．７に関連した新結果について知らない

か問い合わせてみた。塩田氏、向井氏から返答を頂いたが、いずれも知らないとのことだった。

そこで予想３１．７の解答をまとめてみることにした。また、少し踏み込んだ議論も付け加えることにした。そうしておけば、後で既に解答が有ることが判っても、出版できなくなってしまうことはなくなるだろう。二つの事項を付け加えた。ひとつは、理論的に予想３１．７に扱われている数値の取りえる値に制約を与えるもの、もうひとつは、最近の発展のめざましいパソコンと数式処理用のソフトを用いて、予想３１．７に関連したデータを計算した結果である。第二の付加事項に関連しては、マニン自身が既に「Cubic Forms」の中で三次曲面に関連した E_6 型ワイル群 $W(E_6)$ について計算を実行してあり結果を一覧表にしてある。これを E_7 型ワイル群 $W(E_7)$ および E_8 型ワイル群 $W(E_8)$ について、同様の一覧表を作ることにした。

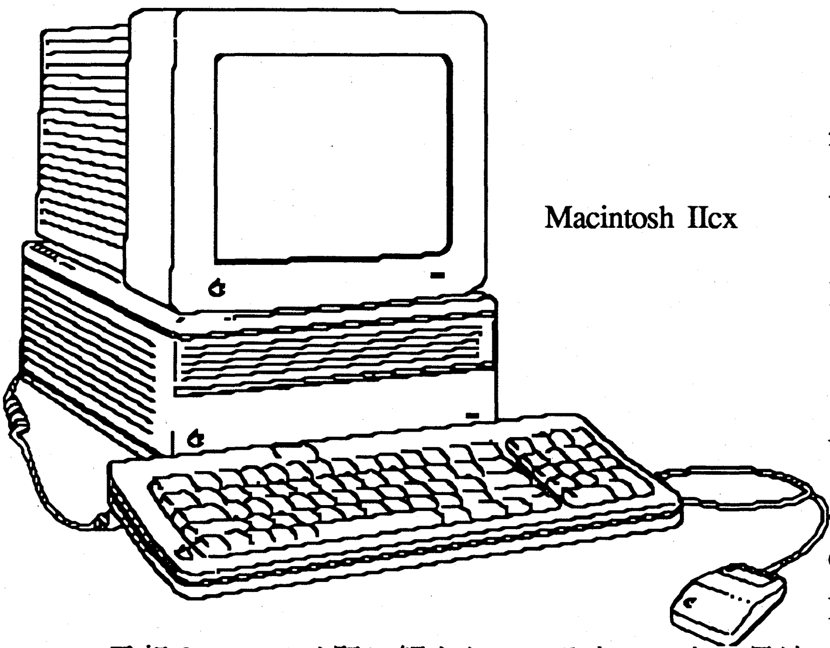
第一の付加事項によりあるデータが常に平方数である整数になることが判る。ところが「Cubic Forms」内の一覧表の対応する項目を見るとこれが平方数になっていないところが二箇所有る。（１７６ページの表の第七列、共役類 C_{20} に対応する $\mathbf{Z}_2$ と共役類 C_4 に対応する $\mathbf{Z}_2$。$\mathbf{Z}_2$ の位数２は平方数でない。）これは誤りであり、$\mathbf{Z}_2$ を０で置き換えるべきである。誤ったデータを使うかぎり予想３１．７はこの二つの場合には成立しないはずであり、それをチェックすることは出来ないはずである。どうもおかしい。

第二の付加事項については、対応する群の位数に注意して欲しい。

ワイル群 $W(E_6)$ の位数 $= 51840 =$ 約五万
ワイル群 $W(E_7)$ の位数 $= 2903040 =$ 約三百万
ワイル群 $W(E_8)$ の位数 $= 696729600 =$ 約七億

ワイル群 $W(E_8)$ の位数は中国の人口にも匹敵するのだ。このことは、普段単にひとつの記号で $W(E_7)$ あるいは $W(E_8)$ 等と書いてこの群を扱っており、それで理解しているつもりになっているので、なかなか認識されないことである。この事実からして、$W(E_7)$あるいは $W(E_8)$ に対してマニンが $W(E_6)$ に対して行った計算を実行するには、たとえ予想３１．７の解答により効率的な計算法が見つかっているのであっても、パソコンが不可欠であることが判る。また、パソコンは一度準備が出来たなら膨大なデータを吐き出してくるので、最後に論文の原稿に書き込むまでにデータを保

持し整理する方法を工夫しなければならない。自分はデータの保持、取捨、並べ換えには表計算ソフトExcelを用いた。数式処理ソフトやワープロソフトに比べてこれはスクロールの速さが違う。また一覧表の作成に不可欠な $W(E_7)$ や $W(E_8)$ の共役類の分類は高性能のパソコンをもってしても恐らく過重な問題であろう。しかし、単純な計算では膨大な量になることが、理論により単純明快なものになってしまうことはしばしば有る。自分はこの部分にはR. W. Carterによる理論を用いた。(R. W. Carter : Conjugacy classes in the Weyl group. Comp. Math. 25, Fasc. 1, 1-59, 1972)



Macintosh IIcx

なお、コンピュータはマッキントッシュII cxを、数式処理ソフトはMathematicaを用いた。

プレプリントをまとめ各方面に郵送したところ、果たして、Boris Kunyavskii氏より手紙を頂いた。論文Yu. G. Zarkhin: The Brauer group of an Abelian variety over a finite field, Math. USSR Izvestiya 20 No.2, 203-234, 1983で予想３１．７は既に解かれているとのこと。早速この論文を読んでみた。Zarkhin氏自身は予想３１．７を解いたと主張している。また、事実本質的に解いている。しかし、記述に独り善がりの所があり読んで判り辛いことも事実である。

これが１９８６年出版の第二版の付録で言及されなかった理由は判らない。

予想３１．７とは何か

X を代数閉体上定義された非特異曲面とする。さらに X はデル・ペッツォ曲面である、つまり X の反標準直線バンドル $-\omega$ はアンプルである、と仮定する。デル・ペッツォ曲面についてその次数 $d=(\omega,\omega)$ は $1\leq d\leq 9$ を満たすことが知られている。次数３のデル・ペッツォ曲面とは三次元射影空間内の非特異三次曲面にほかな

らない。$d\neq 8$ ならば X のネロン・セベリ群 $NS(X)$ は整数 $r=9-d$ にのみ依存する。これを $N_r=NS(X)$ とかく。交点形式はその上に整数値対称双一次形式を定義する。$W(R_r)$ で N_r の自己同型で双一次形式を保ち標準直線バンドル $\omega\in N_r$ を固定するもの全体の作る群を表す。$H\subset W(R_r)$ で任意に与えた巡回部分群を表す。h^1 を群 $H^1(H,N_r)$ の位数としよう。群 H の N_r への作用について、その生成元の特性根のうち１と異なるもの全体の集合を (ς)、固定される元全体の作る部分格子を N_r^H で表す。Δ を N_r^H の判別式とする。

マニンの予想３１．７とは次数 d が $1\leq d\leq 6$ をみたすデル・ペッツォ曲面 X について等式 $\prod_{\varsigma}(1-\varsigma)=h^1\Delta$ が常に成立するというものである。

これが次のような一般的な形で解ける。

有限階数の自由 $\mathbf{Z}$－加群 L が整数値対称双一次形式（ , ）をもつとき L は**格子**であると言われる。$\det L=\left|\det(e_i,e_j)\right|$ を L の**判別式**と呼ぶ。ここで、$e_1,e_2,\cdots,e_r$ は L の基底である。判別式は基底の取り方に依らない。もし $\det L\neq 0$ ならば、L は**非退化**であると言う。

定理０．１ N を非退化格子とする。双一次形式を保つ N の自己同型全体の作る群のひとつの有限巡回部分群を H とする。h^1 で群 $H^1(H,N_r)$ の位数を表す。また、群 H の N への作用について、その生成元の特性根のうち１と異なるもの全体の集合を (ς) で表す。

（１）固定元の作る部分格子 N^H の直交補空間を M と書く。このとき、指数 $\Delta'=[N:N^H+M]$ は有限であり、$\Delta'^2=\det M\cdot\det N^H/\det N$ が成り立つ。

（２）$\prod_{\varsigma}(1-\varsigma)=h^1\Delta'$。

上の定理の設定で、さらに格子 N が**ユニモジュラー**、つまり $\det N=1$ のときには、$\det M=\det N^H$ となることが容易に判る。このときには $\Delta'=\det N^H$ となる。

デル・ペッツォ曲面 X については $N_r=NS(X)$ はユニモジュラー格子であり、上の群 $W(R_r)$ は有限群である。

系０．２ マニンの予想３１．７は正しい。

予想３１．７についての議論

まず上記の群 $W(R_r)$ は $r=3,4,5,6,7,8$ （このときそれに従って $d=6,5,4,3,2,1$。） に従いリー環論に出てくるワイル群 $W(A_2+A_1)$, $W(A_4)$, $W(D_5)$, $W(E_6)$, $W(E_7)$, $W(E_8)$ に一致する事を注意しておく。これが予想３１．７に $1\le d\le 6$ という条件の付く根拠と思われる。

さて、予想３１．７の意義は群 $H^1(H,N_r)$ を具体的に決定可能にするということにあると思われる。実際群コホモロジー $H^1(H,N_r)$ の任意の元の位数は群 H の位数の約数であるという事実を用いれば、多くの場合に位数 $h^1=\#H^1(H,N_r)$ を知るだけで $H^1(H,N_r)$ の構造を決定できる。残りの場合も予想３１．７の解答を見れば簡単な $H^1(H,N_r)$ の計算法が判る。

「Cubic Forms」では短完全系列

$$0\to k(X)^*/k^*\to \mathrm{Div}_X\to \mathrm{Pic}(X)=\mathrm{NS}(X)=N_r\to 0$$

に基づく $H^1(H,N_r)$ の計算法を展開してあり、これでは $W(E_7)$, $W(E_8)$ についての計算は複雑すぎて絶望的である。ここで k は基礎体、Div_X は X 上の因子の作る自由加群、$\mathrm{Pic}(X)$ は X のピカール群である。

次に群 $H^1(H,N_r)$ がなぜ重要かということを説明する。

曲面 Y が完全体 m 上定義され、それの代数閉包 $\overline{m}$ への引き上げ $Y\otimes\overline{m}$ がデル・ペッツォ曲面 X になる場合を考える。ガロア群を $G=Gal(\overline{m}/m)$ と書く。ホッホチルド・セール　スペクトル列

$$E_2^{p,q}=H^p(G,H^q(X_{et},\mathbb{G}_m))\Rightarrow H^{p+q}(Y_{et},\mathbb{G}_m)$$

が定義される。ここで定義により $H^1(X_{et},\mathbb{G}_m)=\mathrm{Pic}(X)$ であり $H^1(\mathrm{O}_X)=0$ であるから $\mathrm{Pic}(X)=\mathrm{NS}(X)=N_r$ であり $E_2^{1,1}=H^1(G,N_r)$ となる。準同型写像 $G\to\mathrm{Aut}(N_r)$ の像を H とすれば、さらに $E_2^{1,1}=H^1(H,N_r)$ となる。一方、$H^2(Y_{et},\mathbb{G}_m)=\mathrm{Br}'(Y)$ は Y のコホモロジー的ブラウワー群と呼ばれている。完全体 m 上定義された次元が２以下の代数多様体 Z についてそれの代数閉包 $\overline{m}$ への引き上げ $Z\otimes\overline{m}$ が非特異ならば、コホモロジー的ブラウワー群 $\mathrm{Br}'(Z)$ は真のブラウワー群 $\mathrm{Br}(Z)$ （ Z 上の東屋多元

環の層の同値類の作る群）に同型である。従って特に $H^2(Y_{et},\mathbb{G}_m)=\mathrm{Br}(Y)$。また $E_2^{2,0}=H^2(G,\overline{m}^*)=\mathrm{Br}(Spec(m))=\mathrm{Br}(m)$ である。完全列

$$0\to\mathrm{Br}(m)\to\mathrm{Br}(Y)\to H^1(H,N_r)$$

があることになる。つまり群 $H^1(H,N_r)$ は Y のブラウワー群のうち、基礎体 m に依存しない Y の幾何に関係する部分を記述することになる。また、H が巡回群であるという仮定の下では、正確に $H^1(H,N_r)=\mathrm{Br}(Y)/\mathrm{Br}(m)$ となる。

東屋多元環の層を曲面の算術理論に応用せよということは、「Cubic Forms」で展開されたドグマのひとつである。この本の出版までに 4 変数 3 次の斉次多項式についてハッセ原理の反例がいくつか知られていた。しかし、ばらばらの視点から説明が与えられていた。それらを統一的視点から説明するために、この本ではこのドグマは使われている。その後、J.-L. Colliot - Thélène、J.-J. Sansuc らによってこのドグマの応用は大きく発展させられていて、非常に有効な方法である事が判っている。

ここでハッセ原理について少し説明しておこう。これは数論専攻の人なら誰でも知っている事項である。数論における最も深い成果の一つであるとされている。任意の代数的数体で定式化可能であるがここでは簡単の為に有理数体 $\mathbf{Q}$ の場合を説明する。$Z\subset\mathbf{P}^N$ を次元 N の射影空間内の $\mathbf{Q}$ 上定義された代数多様体とする。$\mathbf{Q}$ を含む体 K に対して、$Z(K)$ でその K-値点、つまり Z の点でその斉次座標のすべての成分が K の元であるように取れる点、それの全体の集合を表す。次の命題をハッセ原理と呼ぶ。

$$Z(\mathbf{R})\neq\varnothing\ \text{かつ、すべての素数}\ p\ \text{について}\ Z(\mathbf{Q}_p)\neq\varnothing\ \text{ならば}\ Z(\mathbf{Q})\neq\varnothing$$

ここで $\mathbf{R}$ は実数体を、$\mathbf{Q}_p$ は p-進数体を表す。条件 $Z(\mathbf{R})\neq\varnothing$ および $Z(\mathbf{Q}_p)\neq\varnothing$ は比較的簡単にチェックできるのに対し、条件 $Z(\mathbf{Q})\neq\varnothing$ のチェックは非常に難しいことに注意したい。Z が二次超曲面の時にはハッセ原理は常に正しいことがしられている。また、Z が余次元 r の完全交差多様体の時には、その定義多項式の次数の列 $(d_1,d_2,\cdots,d_r)$ を固定した時、それに対応して整数 N_0 が定まり空間 $\mathbf{P}^N$ の次元が $N\geq N_0$ を満たすのなら、ハッセ原理は正しい。

三次元射影空間内の三次曲面 Z の幾つかのものについてハッセ原理が成立しない

ことが東屋多元環の層の理論により示せるのである。

さて、予想３１．７の解答によりマニンの三次曲面の理論を次数が２あるいは１のデル・ペッツォ曲面に拡張することがはじめて現実的になった、といえるので、ここで次数が２あるいは１のデル・ペッツォ曲面とは何か考えておこう。この拡張は将来の面白い研究テーマであると考えられる。

次数が２のデル・ペッツォ曲面とは重み付き射影空間 $\mathbf{P}(2,1,1,1)$ 内の非特異曲面で $w^2+F_4(x,y,z)$ の形の多項式で定義される曲面である。ここで $F_4(x,y,z)$ は４次の斉次多項式である。変数 x,y,z の重みは１、変数 w の重みは２である。これについて算術理論を展開しようとすると恐らく種数３の曲線の算術理論が密接に関連してくると思われる。この曲面は二次元射影空間上の分岐二重被覆であり、その分岐点の集合は $F_4(x,y,z)$ で定義される平面曲線、つまり非特異平面４次曲線、見方を変えて見れば、超楕円型でない種数３の曲線の標準モデル、であるからである。

一方、次数が１のデル・ペッツォ曲面とは重み付き射影空間 $\mathbf{P}(3,2,1,1)$ 内の非特異曲面で $w^2+z^3+G_4(x,y)z+G_6(x,y)$ の形の多項式で定義される曲面である。ここで $G_4(x,y), G_6(x,y)$ はそれぞれ４次、６次の斉次多項式である。変数 x,y の重みは１、変数 z の重みは２、変数 w の重みは３である。これには楕円曲線の理論が密接に関連してくると考えられる。一般の定数 a,b について、$w^2+z^3+G_4(a,b)z+G_6(a,b)$ は楕円曲線の定義多項式であるからである。

また、上記の群 $W(R_r)$ がこれらの場合にはワイル群 $W(E_7)$ あるいは $W(E_8)$ になることより、リー群あるいはリー環の理論とも密接な関連をもつと予想される。

ここで「Cubic Forms」１８２ページの問題３１．８「Does 31.7 generalize to the remaining Weyl groups?」（予想３１．７は残りのワイル群に拡張されるか。）に言及しておこう。この問題３１．８の内容は二つの部分に分割できる。

（１）ネロン・セベリ群に $A_k, B_\ell(=C_\ell), D_m, F_4$ あるいは G_2 型のワイル群の自然な作用をもつ曲面を見つけること。

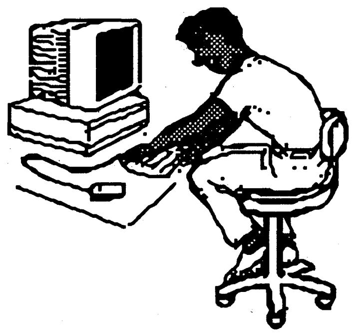
（２）予想３１．７の等式をそういった曲面について拡張すること。

我々の定理０．１はかなり一般的な設定を扱っているので上の後半（２）は解かれたと言えると思う。前半については例えば松沢氏の結果がある。(J. Matsuzawa: Monoidal transformations of Hirzebruch surfaces and Weyl groups of type C. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. 35, 425-429, 1988)

最後に第一の付加事項とは何か書き下しておく。次の命題の事である。

命題0．3　デル・ペッツォ曲面の次数 d が $1 \leq d \leq 6$ を満たすのなら、任意の巡回部分群 $H \subset W(R_r)$ について、群 $H^1(H, N_r)$ の位数 h^1 は常に平方数である。

定理0．1および命題0．3の証明、そして第二の付加事項により作成した一覧表については小生のプレプリント A remark on a conjecture of Manin あるいは将来書くことになるであろうそれの改訂版を見て欲しい。



１９９２年1月２０日