数理解析研究所講究録
第 810 巻 1992 年 16-21

Crystals and Vertex Models

神戸大·自然科学 中屋敷 厚
(Nakayashiki Atsushi)

以下は、次の方々との共同研究[1,2]の解説です。
S-J Kang, 柏原正樹, K.C. Misra, 三輪哲二, 中島俊樹 各氏。

我々は、crystalの理論を使って、ある種類の 2次元格子模型(vertex models)の1点関数が、アフィンリー環の指標を使って書き表せる、という結果を得たのであるが、証明のKeyポイントは、次の点である。

(1). $B(\lambda)\otimes B \simeq B(\mu)$ の型の crystal の同型を通して、crystal with highest weight と、"path" との全単射を作る。

(2). R-matrix から $q\to 0$ の極限をとって、H-関数を得るプロセスを crystalを使って厳密に意味づける。

(3). (1)の同型を通して定義した path の weight を H-関数を使って表わす。

ただし、ここで1点関数と"paths"を結び付ける所で、Baxter による Corner transfer matrix method (CTMM) を使います。最近

6-vertex model ($\hat{\mathfrak{sl}}_2$, level 1 に対応する)については、CTMMを経由せずに、上の結果を証明することに成功しました。それについては、神保氏の講演録およびその参考文献を参照して下さい。

以上の一般論については、文献[1]を参照していただくことにして、ここでは、(1)の具体例を示すにとどめることにします。

§0 Basic definitions

$\mathfrak{g}$を affine Lie algebra, Pを$\mathfrak{g}$の weight lattice, δを null root $P_{cl} = P/\mathbb{Z}\delta$ とおく。又、Iを$\mathfrak{g}$の simple rootsの index set とする。

<u>Definition.</u> B が crystal とは

(a) Bは集合であり、$B = \bigsqcup_{\lambda \in P} B_\lambda$ なる分解を持つ。

(b) 写像 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \sqcup \{0\} \longrightarrow B \sqcup \{0\}$ $(i \in I)$ で、以下の性質をみたすものが存在する。

(1) $\tilde{e}_i 0 = \tilde{f}_i 0 = 0$ $(i \in I)$

(2) $\tilde{e}_i B_\lambda \subset B_{\lambda+\alpha_i} \sqcup \{0\}$, $\tilde{f}_i B_\lambda \subset B_{\lambda-\alpha_i} \sqcup \{0\}$ ($\{\alpha_i\}$は simple roots)

(3) $\forall i \in I, \forall b \in B$ $\exists n$ s.t. $\tilde{e}_i^n b = \tilde{f}_i^n b = 0$

(4) $\varphi_i(b) := \max\{n \mid \tilde{f}_i^n b \neq 0\}$ $\varepsilon_i(b) := \max\{n \mid \tilde{e}_i^n b \neq 0\}$ とおく。

$b \in B_\lambda \Rightarrow \varphi_i(b) - \varepsilon_i(b) = \langle h_i, \lambda \rangle$ ($\{h_i\}$は simple coroots)

(5) $b, b' \in B$ $i \in I$ に対し、 $b' = \tilde{f}_i b \Leftrightarrow \tilde{e}_i b' = b$

この定義で、PをP_{cl}で置き換えたものを、classical crystal と呼ぶ。これに対し、上で定義した crystal を affine crystal と呼ぶ。両方合わせて、単に crystal とも書くことにする。

Graph structure.

$$b \xrightarrow{\ i\ } b' \iff b' = \tilde{f}_i b \qquad (i \in I)$$

により crystal B には. colored oriental graph の構造が入る。

Tensor product

B_1, B_2 : crystals

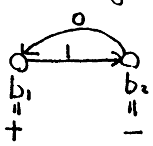
$B_1 \otimes B_2$ は.次により crystal となる

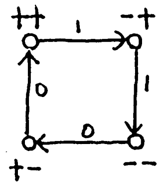
$$\tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{f}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2) \end{cases}$$

$$\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{e}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{e}_i b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2) \end{cases}$$ 。

§1 Examples

$\mathfrak{g} = \widehat{sl}_2$, $P = \mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus \mathbb{Z}\Lambda_1 \oplus \mathbb{Z}\delta$, $P_{cl} \simeq \mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus \mathbb{Z}\Lambda_1$, ここで. $\Lambda_i\ (i=0,1)$ は fundamental weights.

B = 

B⊗B = 

$++ = + \otimes +$ 等。

paths $\mathcal{P}(\Lambda_i)\ (i=0,1)$ は.次で定義される。

$$\mathcal{P}(\Lambda_0) = \{ (p(i))_{i=1}^{\infty} \mid p(2i) = + ,\ p(2i+1) = - \quad {}^{\forall} i \gg 0 \quad p(j) \in B \ \ {}^{\forall} j \}$$

$$\mathcal{P}(\Lambda_1) = \{ (p(i))_{i=1}^{\infty} \mid p(2i) = - ,\ p(2i+1) = + \quad {}^{\forall} i \gg 0, \quad p(j) \in B \ \ {}^{\forall} j \}$$

$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ の $\mathcal{P}(\Lambda_j)$ への作用は次の規則で与えられる。

(a) $\tilde{e}_0, \tilde{f}_0$ の作用

$p \in \mathcal{P}(\Lambda_j)$ とする。以下 p を表示するのに $p = (p(i))_{i=1}^{\infty}$ を右から左へ

書いてゆくものとする。例えば $P=(\cdots +-+-+-)$ は $P(1)=-$, $P(2)=+$ … など。さて P に対して、次の (i)–(iii) の処理を行なう。

(i) 隣り合う $-+$ の組を消去する。 e.x. $P=\cdots \overset{12}{+}\overset{11}{-}\overset{10}{+}\overset{9}{-}\overset{8}{+}\overset{7}{+}\overset{6}{-}\overset{5}{-}\overset{4}{+}\overset{3}{+}\overset{2}{-}\overset{1}{-}$

(ii) (i)で消去した番号はないものとして、 e.x. $\overset{7}{+}\overset{6}{-}\ \ \overset{3}{+}\overset{2}{-}\overset{1}{-}$

隣り合う $-+$ の組を消去する。

(iii) (ii)を inductive にくり返す。最後に e.x. $\overset{7}{+}\ \ \overset{2}{-}\overset{1}{-}$

$+\cdots+-\cdots-$ の形になる。

(iii)の状態で

$\tilde{f}_0\ +\cdots+\wr-\cdots- = +\cdots+\wr+-\cdots-$ e.x. $\tilde{f}_0P=\cdots\overset{10}{+}\overset{9}{-}\overset{8}{+}\overset{7}{+}\overset{6}{-}\overset{5}{-}\overset{4}{+}\overset{3}{+}\overset{2}{+}\overset{1}{-}$

$\tilde{e}_0\ +\cdots+\wr-\cdots- = +\cdots+-\wr-\cdots-$ e.x. $\tilde{e}_0P=\cdots+-+---++--$

ここで $\wr$ は (iii)の状態での $+$ と $-$ との境を表している。

(b) $\tilde{e}_1$, $\tilde{f}_1$ の作用。

(a)で $+$ と $-$ とを入れ換えて全く同じ操作をする。

(iii)に対応する状態で

$\tilde{f}_1\ -\cdots-\wr+\cdots+ = -\cdots-\wr-+\cdots+$

$\tilde{e}_1\ -\cdots-\wr+\cdots+ = -\cdots-+\wr+\cdots+$

いくつか例を書いてみると

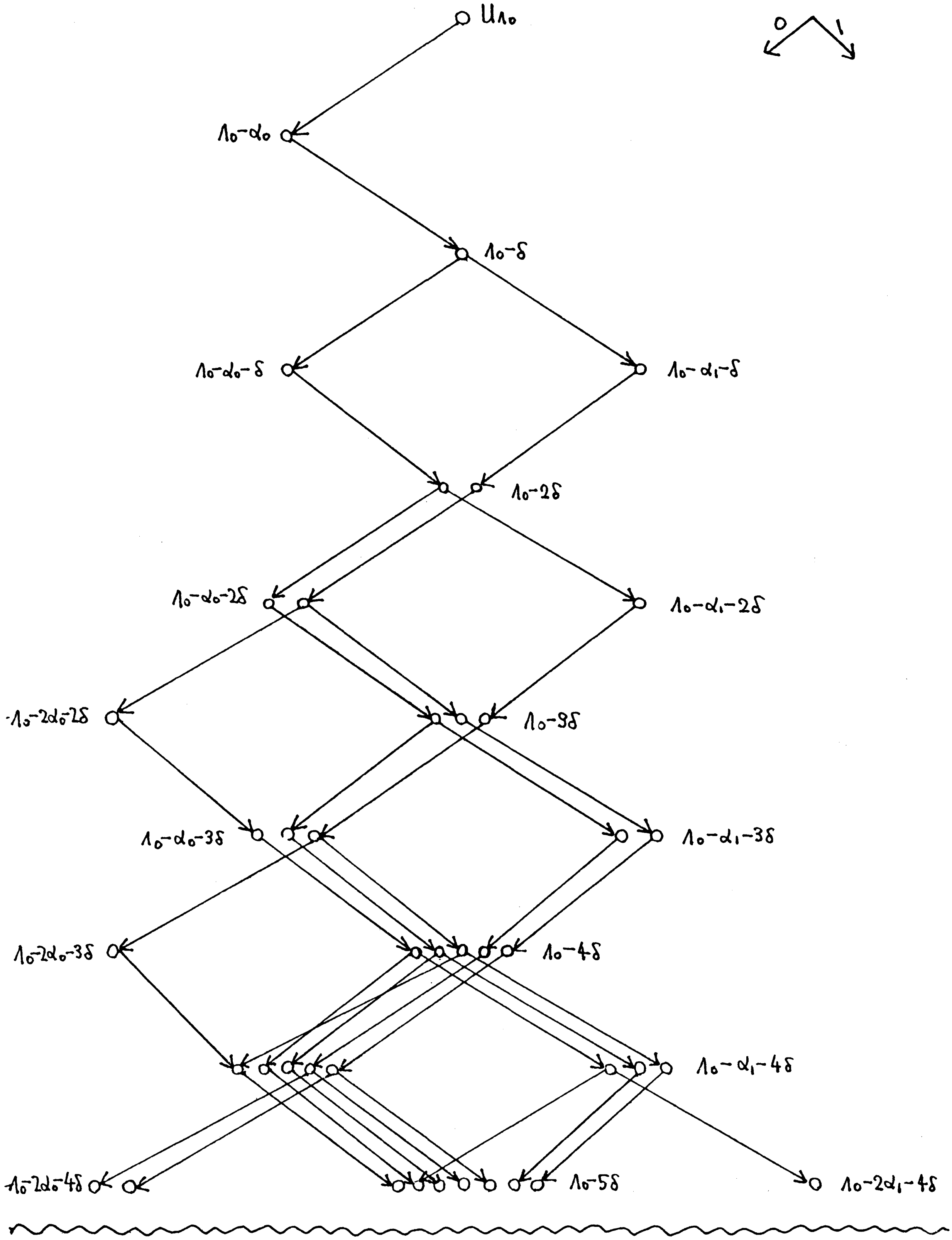
$u_{\Lambda_0}=(\cdots+-+-+-+-+-)\in\mathcal{P}(\Lambda_0)$

$\tilde{f}_0u_{\Lambda_0}=(\cdots+-+-+-+-++)$ $\tilde{f}_0\tilde{f}_1\tilde{f}_0u_{\Lambda_0}=(\cdots-+-+-+-++-+)$

$\tilde{f}_1\tilde{f}_0u_{\Lambda_0}=(\cdots-+-+-+-+--+)$ $\tilde{f}_1\tilde{f}_0\tilde{f}_1\tilde{f}_0u_{\Lambda_0}=(\cdots-+-+-+--+-+)$

$\tilde{f}_1^2\tilde{f}_0u_{\Lambda_0}=(\cdots-+-+-+-+---)$ $\tilde{f}_1^2\tilde{f}_0\tilde{f}_1\tilde{f}_0u_{\Lambda_0}=(\cdots-+-+-+--+--)$

$P(\Lambda_0)$ の crystal graph を書くと、次のようになる。(height 10 の descendant まで)



さて，$(L(\Lambda_i), B(\Lambda_i))$ を highest weight Λ_i の既約 highest weight $U_q(\widehat{sl}_2)$-加群 の crystal base とする。すると $B(\Lambda_i)\simeq \mathcal{P}(\Lambda_i)$ なる affine crystal としての同型が成り立つ。ここで，crystal の間の射は，$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ と可換な写像とし，同型射とは，この写像が全単射である場合を言う。$\mathcal{P}(\Lambda_i)$ については，次の classical crystal としての同型が成り立つことは自明であろう。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Lambda_i)\otimes B & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{P}(\Lambda_{1-i}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (p(k))_{k=1}^{\infty}\otimes\varepsilon & \longmapsto & (\cdots p(2)\,p(1)\,\varepsilon) \end{array} \qquad \varepsilon=\pm$$

paths は，この性質 $\mathcal{P}(\Lambda_i)\otimes B\simeq\mathcal{P}(\Lambda_{1-i})$ により特徴づけられ，$B(\Lambda_i)$ に対して，これを証明することにより，$B(\Lambda_i)$ と $\mathcal{P}(\Lambda_i)$ との間の全単射が得られる。

参考文献

[1] S-J Kang, M. Kashiwara, K.C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, Affine Crystals and Vertex Models RIMS preprint 828

[2] —, Perfect Crystals of Quantum Affine Lie Algebras, RIMS preprint 868

[3] M. Jimbo, K.C. Misra, T. Miwa and M. Okado, Combinatorics of Representations of $U_q(\widehat{sl}(n))$ at $q=0$, CMP 136 (1991) 543-566