数理解析研究所講究録
第 811 巻 1992 年 7-11

ネータの正規化定理について

日大理工・数　小林英恒　(Kobayashi, Hidetsune)

0. 序

体 k 上の多項式環 $k[x_1, x_2, ..., x_n]$ のイデアル $a = (f_1, f_2, ..., f_r)$ が与えられたとき、これの高さを計算する方法を示す。これによって a で定義される代数的集合の次元が分かる。次元を知るためにはヒルベルト多項式を計算する方法があるが、今回は正規化定理について検討した。この報告は 2 つの部分に分かれ、第 1 節で準備、第 2 節で構成法を示す。

1. 準備

環 A の素イデアルの列

$$P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_r$$

の長さは r であるという。Pを環 A の素イデアル、

$$P \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_r$$

を Pから始まる素イデアルの列の最長のものとするとき、Pの高さは rであるといい、この高さを $\mathrm{ht}(P)$ と略記する。列の長さが無限大なら Pの高さは ∞ であるという。a を環 A のイデアルとするとき、

$$\min_{P \supset a} \mathrm{ht} P$$

を a の高さという。環 A の素イデアルの高さの最大値を A の次元といい、$\dim(A)$ と表す。

以下の議論は永田 “可換体論” に従う。

次の補題は、2 節の構成法で使われるので、証明をのせておく。

補題　kは体とし,$f \in k[X_1, X_2, ..., X_n]$, $f \notin k$ならば, $k[X_1, X_2, ..., X_n]$ の元 $Y_1, Y_2, ..., Y_n$を次のようにとって $k[X_1, X_2, ..., X_n]$ が $k[Y_1, Y_2, ..., Y_n]$ 上整となるようにできる.

1. $Y_1 = f$, $Y_i = X_i + X_1^{m_i}$, $i = 2, ..., n$.

2. $Y_1 = f$, $Y_i = X_i + C_i X_1$, $i = 2, ..., n$ ただし kが無限体のとき.

1. の m_iは好みの整数の倍数にとることができる.
証明
1.
t を $\deg f$ より大きな整数とする.
$\omega(X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n}) = \sum \alpha_i t^{i-1}$
とおくと, 辞書式順序で

$$(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1) \succ (\beta_n, \beta_{n-1}, \ldots, \beta_1)$$

であることと,

$$\omega(X^\alpha) > \omega(X^\beta)$$

であることとは, 同値である. $f = \sum a_A X^A$の項のうち辞書式順序で最大なものは唯一であるから, $\omega(X^A)$ が最大になる項は唯一である. その項を

$$M = a_A X_1^{a_1} X_2^{a_2} \cdots X_n^{a_n}$$

とする. $m_i = t^{i-1}$ $(i \geq 2)$ ととり, $Y_i = X_i + X_1^{m_i}$ $(i \geq 2)$ とおく. Mを $X_1, Y_2, \ldots, Y_n$で表すと,

$$a_A X_1^{a_1} (Y_2 - X_1^{m_1})^{a_2} \cdots (Y_n - X_1^{m_n})^{a_n}$$

$= X_1^{\omega(M)} + a_1(Y_2, \ldots, Y_n) X_1^{\omega(M)-1} + \ldots$
となる. よって

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = f(X_1, Y_2 - X_1^{m_1}, \ldots, Y_n - X_1^{m_n})$$

$= X_1^{\omega(M)} + b_1(Y_2, \ldots, Y_n) X_1^{\omega(n)-1} + \cdots + b_{\omega(M)}(Y_2, \ldots, Y_n)$
ここで,$Y_1 = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ とおくと,

$$X_1^{\omega(M)} + b_1(Y_2, \ldots, Y_n) X_1^{\omega(M)-1} + \cdots + b_{\omega(M)}(Y_2, \ldots, Y_n) - Y_1 = 0$$

これは X_1が $k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$ 上整であることを示す.
$X_i + X_1^{m_i} = Y_i$より, X_iは $k[X_1, Y_1, \ldots, Y_n]$ 上整だから, $k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ は $k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$ 上整である.
2.
kが無限体であるとき、

$$f(c_1 X_1, X_2 + c_2 X_1, \ldots, X_n + c_n X_1), c_i \in k$$

の X_1の最高次の係数 $f(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ が 0 でなければよい。□

定理　$a \subset k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ は高さ rのイデアルとすると、$k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ の元 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$で

1. $k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ は $k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$ 上整
2. $k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] \bigcap a = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_r)$
3. $Y_{r+1} = X_{r+1} + f_i(X_1, X_2, \ldots, X_r), f_i \in \pi[X_1, X_2, \ldots, X_r]$

となるものが存在する。ここに、π は k の素体。

系　$A = k[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ とする。$z_1, z_2, \ldots, z_t \in A$ で

1. A は $k[z_1, z_2, \ldots, z_t]$ 上整
2. $z_1, z_2, \ldots, z_t$は k上代数的独立

となるものが存在する。

2. 正規化の構成的な方法

$k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \supset (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ なるイデアルが与えられたとする。$t < \deg f_1$ なる整数をとり、$m_i = t^{i-1}$ $(i \geq 2)$ とおく。 以下、無限体のときに限って議論をすすめることにする。(有限体の時も同様に議論を進めることができる。)

$$\begin{cases} u_1 = x_1 \\ u_2 = x_2 + c_1 x_1 \\ \cdots \\ u_n = x_n + c_n x_1 \end{cases}$$

なる座標変換を行なう。f_1 は

$$f_1 = c u_1^N + a_1(u_2, \ldots, u_n) u_1^{N-1} + \cdots + a_N(u_2, \ldots, u_n)$$

の型になっていることを確認したのち、

$$y_1 = f_1, y_2 = u_2, \ldots, y_n = u_n$$

とおく。

また、

$$f_i(u_1, u_2 - c_2u_2, \dots, u_n - c_nu_n) \text{ を } \tilde{f}_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

とおく。

$a = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_m)$ の辞書式順序によるグレブナ基底を $\{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ とおく。

命題 $a \bigcap k[y_1, y_2, \dots, y_n] \ni h(y_1, y_2, \dots, y_n)$ で (y_1) に属さないものが存在するためには、$\{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ のうちに $y_2, y_3, \dots, y_s$ の多項式であるものが存在することが必要十分である。

証明

$h(y_2, \dots, y_n) \in a \bigcap k[y_1, y_2, \dots, y_n]$ が存在したとする。

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(u_1, u_2 - c_2u_1, \dots, u_n - c_nu_1) \in a$$

だから、

$$0 \neq h(0, y_2, \dots, y_n) \in a, h(0, y_2, \dots, y_n) \longrightarrow 0 \ \{g_1, \dots, g_s\}$$

ゆえ、$g_1, g_2, \dots, g_s$のうち、いくつかは $y_2, \dots, y_n$の多項式。

逆はあきらか。□

$\{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ の番号をつけなおして、$g_1, \dots, g_{s_1}$ は u_1を含み、$g_{s_1+1}, \dots, g_r$ は u_1を含まないとする。

$$a \bigcap k[y_2, \dots, y_s] = (g_{s_1+1}, \dots, g_s)$$

で、$\{g_{s_1} + 1, \dots, g_s\}$ は $a \bigcap k[y_2, \dots, y_n]$ のグレブナ基底である。次に

$$\begin{cases} v_2 = y_2 \\ v_3 = y_3 + \tilde{c}_3y_2 \\ \cdots \\ v_n = y_n + \tilde{c}_ny_2 \end{cases}$$

と座標変換を行う。

$$g_j(v_2, v_3 - \tilde{c}_3v_2, \dots, v_n - \tilde{c}_nv_n) \text{ を } \tilde{g}_j(v_2, \dots, v_n)$$

とおき、あらためて、$y_i = v_i,\ i = 3, \dots, n$ とおく。また、$y_2 = g_{s_1+1}(v_2, v_3 - \tilde{c}_2v_2, \dots, v_n - \tilde{c}_nv_n)$ とおく。

$(\tilde{g}_{s_1+1}, \dots, \tilde{g}_n)$ のグレブナ基底を $\{h_1, h_2, \dots, h_t\}$ とおく。

前の命題と同様に、

$$a \bigcap k[y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n] \ni g(y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

で、(y_1, y_2) に属さないものが存在することと、$h_1, \ldots, h_t$の中に $y_3, \ldots, y_n$ の多項式が存在することとが同値である。

このような gがなければ、ここで終了、有れば同様の繰り返しを行ない。終了した時点で

$$a \bigcap k[y_1, y_2, \ldots, y_n] = (y_1, \ldots, y_r)$$

となる。