数理解析研究所講究録
第 812 巻 1992 年 41-55

Inertial Manifold とその応用

二宮　広和　（京都大学理学部）

1 Introduction

近年、非線型発展方程式の時間大域的な挙動についての研究が数多く報告されている。Navier-Stokes 方程式のような方程式はアトラクターをもつだけでなく、その次元が（Hausdorff の意味で）有限であることも知られるようになった。そこで「アトラクター、あるいは、それを含む集合の上での解の挙動は、常微分方程式で記述できるか？」という問いが自然に考えられる。それに答えたのが Foias, Sell, Temam [17] である。彼らは、inertial manifold という概念を導入した。Inertial manifold とは、

- 有限次元リプシッツ多様体である、
- flow に沿って（正の向きに）不変である、
- あらゆる解を指数的にひきつける、
- アトラクターを含んでいる

ものを指す。第 3 の条件より、もとの方程式の解の挙動の本質的な部分は、この多様体の上に制限した常微分方程式—inertial form—に受け継がれている。

この概念より前に不安定多様体や中心多様体と呼ばれる不変多様体が考えられていた（参照 [20]）。不安定多様体や中心多様体はひとつの解、例えば、定常解の近傍で（局所的に）作られた。これに対し、inertial manifold はアトラクターを含むように大域的に作られる点で大きく異なる。

ここでは今までの inertial manifold の理論の概要と最近の結果について

報告する。

2 存在定理

ヒルベルト空間 H上の発展方程式を考える。

$$u_t + Au = R(u). \tag{2-1}$$

ここで A は正の自己共役作用素で、A^{-1}はコンパクトと仮定する。また、非線型項 $R(u)$ は

$$\begin{cases} \sup_{u\in D(A^\alpha)} |R(u)| & \le K_1, \\ |R(u) - R(v)| & \le K_2 |A^\alpha (u-v)|, \\ R(u) & = 0 \qquad (|A^\alpha u| \ge r), \end{cases} \tag{2-2}$$

を満たしているものとする。今は大域的挙動に興味があるから、非線型項はアトラクターのある近傍の外では 0 になるように修正している。このとき、A の仮定より、A の固有値λ_jと固有ベクトル w_jがとれて、

$$Aw_j = \lambda_j w_j, \ (w_j, w_k) = \delta_{j,k},$$

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_N \le \lambda_{N+1} \le \cdots,$$

を満たす。ここで $(\cdot,\cdot)$ は Hの内積を、$|\cdot|$ は Hのノルムを表すものとする。

この形の方程式には、反応拡散方程式や Kuramoto-Sivashinsky 方程式などが含まれている。

次の spectral gap condition

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N \ge CK_2(\lambda_{N+1}^\alpha + \lambda_N^\alpha) \tag{2-3}$$

を仮定すると、inertial manifold の存在に関する次の定理が得られる。

定理 **2.1.** *Specrtal gap condition (2-3)* の仮定の下、*inertial manifold* M が存在する：

・M は $PD(A^\alpha)$ から $QD(A^\alpha)$ への C^1-写像 Φ のグラフとして表現される。

ここで、P は $\{w_1, \cdots, w_N\}$ の張る空間への正射影、$Q = I - P$。

・任意の解 $u(t)$ に対して、M 上の解 $v(t)$ が存在して

$$|A^\alpha(u(t) - v(t))| \le Ce^{-\gamma t} \tag{2-4}$$

が成り立つ。ここで C, γ は正の定数で、C は $u(0)$ に依存する。

・M上に制限した方程式（これを *inertial form* と呼ぶ）は、

$$\frac{dp}{dt} + Ap = PR(p + \Phi(p)) \tag{2-5}$$

で与えられる。

証明:　ここでは Hadamard のグラフ変換法と言われる方法に従って証明しよう。この方法は名前にあるように $PD(A^\alpha)$ という超平面を $S(t)$ で変換して、その極限として inertial manifold を得ようというものである。つまり、

$$M_t = S(t)PD(A^\alpha)$$

とおくと

$$M_t = \text{ graph } \Phi_t$$

となる $PD(A^\alpha)$ から $(I - P)D(A^\alpha)$ への写像 $\Phi_t(p)$ が存在して

$$\Phi_t(p) \longrightarrow \Phi(p) \qquad (t \to \infty)$$

となることを示そう。そのために次の概念と補題を用意する。$\Pi, \mathcal{C}$ を次のように定める。

$$\begin{aligned} \Pi &= \{(X, Y) \in \mathbf{R}^2; 0 \le X, 0 \le Y\}, \\ \mathcal{C} &= \{(X, Y) \in \mathbf{R}^2; 0 \le X \le Y\}. \end{aligned}$$

定義 2.1 $\mathcal{C}$ と Π 上の曲線族

$$\{\Gamma_\sigma;\ \Gamma_\sigma = \{(X_\sigma(t), Y_\sigma(t)\}_{t_1 \le t \le t_2} \text{ は } \Pi \text{ 上の軌道}, \sigma \in \Sigma\}$$

が *Cone Property* をもつとは

(i) $(X(t_0), Y(t_0)) \in \mathcal{C}$ $(t_1 \le t_0 \le t_2)$ なら、$(X(t), Y(t)) \in \mathcal{C}$ $(t_1 \le t \le t_0 \le t_2)$ で

$$Y(t) \le Y(s)e^{-\gamma(t-s)} \qquad (t_1 \le s \le t \le t_0 \le t_2)$$

が成り立つ。

(ii) $(X(t_0), Y(t_0)) \notin \mathcal{C}$ $(t_1 \le t_0 \le t_2)$ なら、$(X(t), Y(t)) \notin \mathcal{C}$ $(t_1 \le t \le t_0 \le t_2)$。

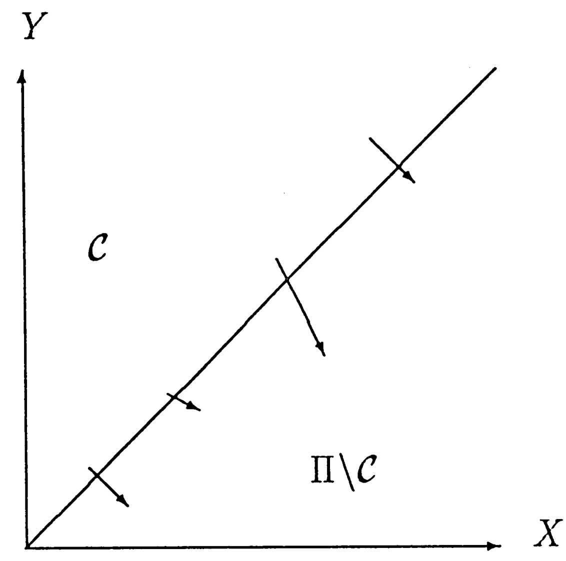

Figure 1: Cone Property

注意 2.1 *(ii)* は $\Pi \backslash \mathcal{C}$ が正の向きに不変であることを意味している。

補題 2.1 2つの解 $u_1(t), u_2(t)$ としたとき、

$$X(t) = |A^\alpha P(u_1(t) - u_2(t))|, Y(t) = |A^\alpha Q(u_1(t) - u_2(t))|$$

とおくと、*Cone Proprty* を満たす。

この補題の証明は省略する（詳しくは [36] [38] などを参照）。この証明において、我々は spectral gap condition を用いる。ここで正定数 γ は $\lambda_{N+1}, \lambda_N, K_2$ に依存する。

まず M_t がグラフに書けることを示す。写像

$$PS(t) : PD(A^\alpha) \longrightarrow PD(A^\alpha)$$

が 1 対 1 であることを見よう。$p + q_1, p + q_2 \in M_s$ とすると、ある $p_1, p_2 \in PD(A^\alpha)$ が存在して、

$$S(s)p_1 = p + q_1,$$

$$S(s)p_2 = p + q_2,$$

を満たす。

$$u_1(t) = S(t)p_1, \qquad u_2(t) = S(t)p_2,$$

$$X(t) = |A^\alpha P(u_1(t) - u_2(t))|, \qquad Y(t) = |A^\alpha Q(u_1(t) - u_2(t))|,$$

として上の補題を用いる。

$$Y(0) = |A^\alpha(p_1 - p_2(0))| = 0$$

だから、

$$(X(0), Y(0)) \in \Pi \backslash \mathcal{C}.$$

故に

$$|A^\alpha Q(u_1(t)-u_2(t))| \le |A^\alpha P(u_1(t)-u_2(t))| = |A^\alpha(p-p)| = 0$$

となり、$PS(t)$ は単射。

次に $PS(t)$ が全射であることを示そう。

$$E(t) = S(t)\{p \in PD(A^\alpha); |A^\alpha p| \ge r\}$$

とおく。

$$R(u) = 0 \qquad (|A^\alpha u| \ge r)$$

に注意すると、上の集合は $t \ge 0$ について単調増加であることがわかる。従って、有限次元空間 $PD(A^\alpha)$ 上の写像

$$p\ (\in PD(A^\alpha)) \longrightarrow PS(t)p\ (\in PD(A^\alpha))$$

は単射・連続のみならず、proper であることがわかる。領域不変性定理を使うと全射であることも従う。以上より、M_t が $PD(A^\alpha)$ からのグラフ Φ_t で書けることがわかった。次に Φ_t が $t \to \infty$ のとき収束することを示そう。$t \ge s \ge 0$ のとき, $p \in E(s)$ に対して

$$\Phi_t(p) = \Phi_s(p)$$

となっている。一方、$p \in PD(A^\alpha)\backslash E(s)$ に対しては

$$|A^\alpha(\Phi_t(p) - \Phi_s(p))| \le re^{-\gamma s} \tag{2-6}$$

が成り立つことを示そう。実際、Φ_t の定義から $p \in PD(A^\alpha)\backslash E(s)$ に対して

$$p = \Phi_t(p_t) = \Phi_s(p_s)$$

となる $p_t, p_s \in PD(A^\alpha)$ がとれる。Cone Property より

$$\begin{aligned}|A^\alpha(\Phi_t(p)-\Phi_s(p))| \leq &\ |A^\alpha Q(S(t)p_t - S(s)p_s)| \\ \leq &\ |A^\alpha QS(t-s)p_t|\end{aligned}$$

となる。p が $E(s)$ に入っている場合も、入ってない場合も、いずれにしても

$$|A^\alpha QS(t-s)p_t| \leq r$$

となることがわかる。こうして (2-6) が従う。つまり、

$$\Phi(p) = \lim_{t\to\infty} \Phi_t(p)$$

が存在して、

$$M = \text{ graph } \Phi$$

が inertial manifold になることがわかる。 ◁

ここで取り上げた方法の他にも証明方法はいくつかある。大きく 3 つに分けられる：

・Lyapunov-Perron の方法（[4] [16] [17] [31] [34] [36] [38]）,

・Hadamard のグラフ変換法（[6] [7] [27]）,

・Elliptic regularization 法（[9] [13] [18] [26]）。

いろいろな方法で証明を行うということは、inertial manifold の近似理論をつくろうとする立場から好ましいと思われる。これについては後で言及する。

これらの方法にはそれぞれ長所・短所がある。いま考えているような簡単な方程式ではほとんど同じであるが、A が Banach 空間での自己共役作用素でない場合などは、1 番目の方法が有力である。またあとで挙げる小さな

非線型境界条件を持つ反応拡散方程式系の場合、２番目の方が適切であると思われる。また Lyapunov-Perron 法の中でもさらにいくつかの方法がある。詳しい解説は割愛するが、[31] では Fourier 変換を用いて条件の改良をしているとだけ付け加えておく。

Φ の満たす方程式は

$$\frac{\partial}{\partial p}\ \Phi(p)(-Ap+PR(p))+A\Phi(p)=QR(p+\Phi(p)) \tag{2-7}$$

である。これを特性曲線法的に解いている１，２番目の方法に対し、３番目の方法は、p を空間方向と考えた特異楕円型方程式

$$\begin{cases} -\epsilon\Delta_p\Phi(p)+\ \dfrac{\partial}{\partial p}\ \Phi(p)(-Ap+PR(p))+A\Phi(p)=QR(p+\Phi(p)), \\ \Phi(p)=0 \qquad\qquad (|A^{\alpha}p|>r) \end{cases}$$

の解の $\epsilon\to 0$ での極限として与えられる。

この節の最後に、ここに挙げた一般的な inertial manifold の存在定理の他に知られている諸結果について紹介しておこう。Inertial manifold の滑らかさ（連続的微分可能性）については [5] [11] [36] で取り扱われている。[36] においては非自励系およびその摂動についても言及されており、その際 Cone Property を少し変形したものを使う点が特徴的である。Inertial manifold の次元を Cone Property に依って決めると大きくなるばかりでなく、その存在もわからなくなるときがある。ある特殊な方程式（空間１次元のスカラー反応拡散方程式）について [2] [21] では、アトラクターと同じ次元で inertial manifold を構成している。

また Navier-Stokes 方程式そのままでは Cone Property は満たさないが、新しい変数を導入することによって反応拡散方程式に埋め込んで、Navier-Stokes 方程式に対する inertial manifold の存在を示した [24] は注目に値する。

3　近似理論

ここでは inertial manifold の近似理論を紹介しようと思う。結論から言うと、まだ満足できる近似理論はなく、これからの分野と思われる。まず数値解析の立場からは [10] [12] が挙げられる。彼らは時間について差分化した方程式についての inertial manifold の存在を議論している。

Inertial manifold の近似理論はそもそも Φ の形がわからないので解の大域的挙動についての情報が得られないという現状からつくられたものだと思われる。この視点から [15] [25] [37] は近似理論を作っている。

まず考えられるのが Galerkin 近似である。数値計算でしばしば用いられるものであるが、これは $\Phi(p)$ を 0 で近似したもので inertial form の第 0 次近似と思うことができる。次元大きくすれば $\Phi(p)$ は 0 に近づいていくので、その意味では近似になっている。

次に 1 次近似とも呼べるものを考えよう。Φ の満たす方程式は

(3-1) $$q_t + Aq = QR(p+q)$$

だったので、アトラクターの上では $|A^\alpha q_t|$ と $|A^\alpha q|$ は $|Aq|$ に比べて小さいと考えられるので

(3-2) $$Aq + QR(p) = 0$$

で近似される。これより

$$\Phi^1(p) = (AQ)^{-1}QR(p),$$

となる。この近似は λ_{N+1}^{-1} のオーダーで見ると先の 0 近似より良くなっている。

[29] [28] においては inertial manifold を近似列で近似しようと試みている。そこでは、q_t も近似することによって近似列を作っている。ただ残念な事にこの近似列は収束するとは言えない。[35] では反例が与えられている。

こうした中、コンピューターで数値計算しているものがある。彼らは、inertial manifold の近似だけでなく、inertial form の近似も行っている（[23] においては、近似した inertial form が dissipative になることを示している）。数値計算は inertial manifold の次元をたいへん小さくとり（$N=3$）、Kuromoto-Sivashinsky 方程式についての大域的分岐図の計算をしている。$N=3$ にもかかわらず良い結果が得られている（[1] [14] [22]）。

4 応用

Inertial manifold からもとの方程式の挙動についての情報を得た結果はまだあまりない（[32] [33]）。その最初は [8] であろう。そこでは Neumann 境界条件を持つ反応拡散方程式

$$
\text{(4-1)} \qquad \begin{cases} u_t = D\Delta u + F(u) & (x \in \Omega, t > 0), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & (x \in \partial\Omega, t > 0), \end{cases}
$$

を扱っている。ここで u は mーベクトル, $D=$ diag $(d_1, \cdots, d_m)$ $(d_j > 0)$, $\Omega \subset R^n$ で $\partial\Omega$ は滑らかとする。このとき $-D\Delta$ に比べて F のリプシュッツ定数が小さいとき inertial manifold が存在して inertial form は

$$
v_t = F(v)
$$

となる。つまり、空間一様な解に指数的に近づくことを意味している。

この節では (4-1) の境界条件を非線型にした次の方程式を考える:

$$
(4\text{-}2) \qquad \begin{cases} u_t &= D\Delta u - u + F(u) & (\ x \in \Omega, t > 0\ ), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= \epsilon G(u) & (\ x \in \partial\Omega, t > 0\ ), \\ u(0,x) &= u_0(x) & (\ x \in \Omega\ ) \end{cases}
$$

(森田(竜谷大)、柳田(東工大)との共同研究)。ここで先の仮定に加えて ϵ は 非負のパラメーターとする。この場合は、解が定数変化法で表せないので、方法としては Lyapunov-Perron の方法よりグラフ変換法の方が良いと思われる。このとき Neumann 境界条件をもった Laplacian の固有値と非線型項 Fに対する spectral gap condition を仮定すると、ϵ が十分小さければ、方程式 (4-2) に対して inertial manifold $M_\epsilon =$ graph Φ_ϵ の存在がわかる。ただこの場合の証明は非線型境界条件のため、Cone Property は $H^2(\Omega;\mathbf{R}^m)$ で示さなくてはならない。また多様体の微分可能性や収束性($\Phi_\epsilon \to \Phi$) は 2 節で挙げた方程式に比べるとたいへん扱い難い。

一般には inertial manifold の形がどうなるかわからないので inertial form からも解の大域的挙動についての情報を期待できない。非線型境界条件が解の大域的挙動に大きな影響を与える次のような例をあげよう。反応拡散方程式系

$$
(4\text{-}3) \qquad \begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + F(u), \\ v_t = d_2 \Delta v, \end{cases}
$$

と境界条件

$$
(4\text{-}4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= -\epsilon v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} &= \epsilon G(u,v). \end{cases}
$$

を考える。ここで関数 F, G は例えば $F(u) = u - u^3/3,\ G(u,v) = u$ で与えられるようなものとする (Fig. 2)。

このシステムは、境界においてだけ関係を持ち、$\epsilon = 0$ のとき互いに無関係なので、あらゆる解は定常解に近づく。$N = 2$ に対して spectral gap condition を仮定すると、inertial manifold が (4-3) に対して存在し、$\bar{u}, \bar{v}$をその空間平均とすると inertial form は次で与えられることがわかる。

$$(4\text{-}5)\quad \begin{cases} \bar{u}_t = F(\bar{u}) - c\bar{v} + O(\epsilon), \\ \bar{v}_t = \epsilon c d_2 G(\bar{u}, \bar{v}) + O(\epsilon^2) \end{cases} \qquad \text{ここで } d_1 = 1/\epsilon, c = |\partial\Omega|/|\Omega|.$$

この方程式は van der Pol 型であり、u-v 平面での flow を考察することにより、上の方程式には安定な relaxed periodic orbit の存在がわかる（ Fig. 2,3 参照）。

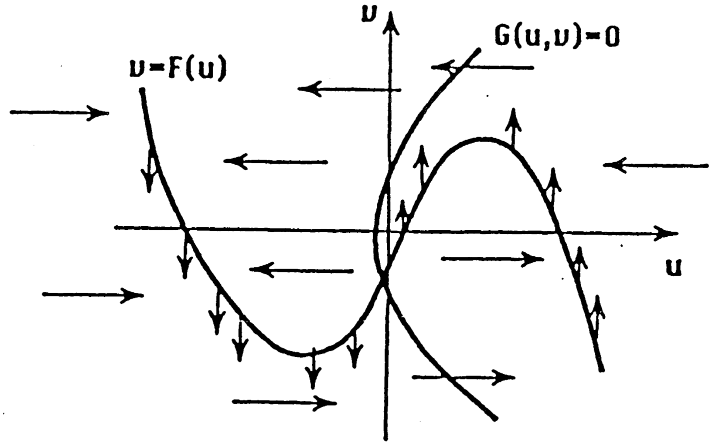

Figure 2: F, G の形と流れの向き

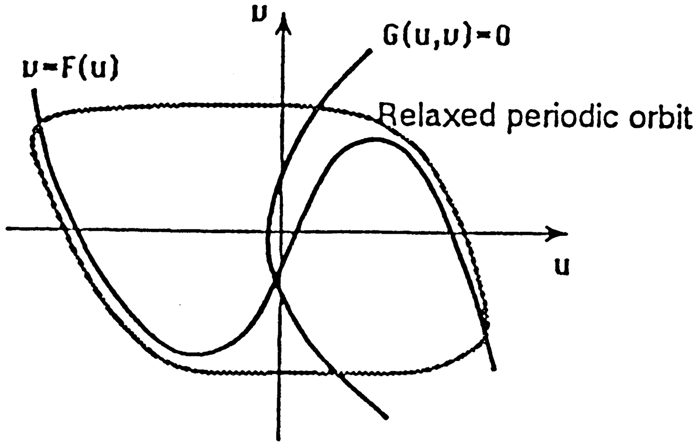

Figure 3: 周期解の存在

References

[1] H. S. Brown, I. G. Kevrekidis, and M. S. Jolly. A minimal model for spatio-temporal patterns in thin flow. *IMA preprint 790*, 1991.

[2] P. Brunovsky. The attractor of the scalar reaction diffusion equation is a smooth graph. *J. Dynamics and Differential Equations*, 2:293–323.

[3] P. Brunovsky and I. Terescak. Regularity of invariant manifolds. *J. Dynamics and Differential Equations*, 3:313–337, 1991.

[4] S. N. Chow and K. Lu. Invariant manifolds for flows in banach spaces. *J. Differential Equations*, 74:285–317, 1988.

[5] S-N. Chow, K. Lu, and G. R. Sell. Smoothness of inertial manifolds. *IMA Preprint.*

[6] P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenco, and R. Temam. Integral manifolds and inertial manifolds for dissipative partial differential equations. *Applied Mathematics Series vol 70 Springer Verlag*, 1989.

[7] P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenco, and R. Temam. Spectral barriers and inertial manifolds for dissipative partial differential equations. *J. Dynamics and Differential Equations*, 1:45–73, 1989.

[8] E. Conway, D. Hoff, and J. Smoller. Large time behavior of solutions of nonlinear reaction-diffusion equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 35:1–16, 1978.

[9] A. Debussche. Inertial manifolds and sacker's equation. *Prepublications Universite Paris-newline Sud Mathematiques 89-23*, 1989.

[10] F. Demengel and J. M. Ghidaglia. Inertial manifolds for partial differential evolution equations under time discretization : existence convergence and applications. *Prepublications Universite Paris-Sud Mathematiques 89-02*, 1989.

[11] F. Demengel and J. M. Ghidaglia. Some remarks on the smoothness of inertial manifolds. *Nonlinear Analysis, TMA*, 16:79–87, 1991.

[12] F. Demengel and J. M. Ghidaglia. Time-discretization and inertial manifolds. *Mathematical Modelling and Numerical Anal.*, 23:395–404, 1989.

[13] E. Fabes, M. Luskin, and G. R. Sell. Construction of inertial manifolds by elliptic regularization. *J. Differential Equations*, 89:355–387.

[14] C. Foias, M. S. Jolly, I. G. Kevrekidis, G. R. Sell, and E. S. Titi. On the computation of inertial manifolds. *Phys. Lett. A*, 131:433–436, 1988.

[15] C. Foias, O. Manlely, and R. Temam. Modelling of interaction of small and large eddies in two dimensional turbulence flows. *Mathematical Modelling and Numerical Anal.*, 22:93–114, 1988.

[16] C. Foias, B. Nicolaenco, G. R. Sell, and R. Temam. Inertial manifolds for kuramoto-sivashinsky equation and an estimate of their lowest dimensions. *J. Math. Pures Appl.*, 67:197–226, 1988.

[17] C. Foias, G. R. Sell, and R. Temam. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations. *J. Differential Equations*, 73:309–353, 1988.

[18] C. Foias, G. R. Sell, and E. S. Titi. Exponential tracking and approximation of inertial manifolds for dissipative nonlinear equations. *J. Dynamics and Differential Equations*, 1:199–244, 1989.

[19] J. K. Hale and C. Rocha. Varying boundary condition with large diffusivity. *J. Math. Pures Appl.*, 66:139–158, 1987.

[20] D. Henry. Geometiac theory of semilinear parabolic equations. *Lectur Notes in Math. No 840 Springer-Verlag*, 1981.

[21] M. S. Jolly. Explicit construction of an inertial manifold for a reaction diffusion equation. *J. Differential Equations*, 78:220–261, 1989.

[22] M. S. Jolly, I. G. Kevrekidis, and E. S. Titi. Approximate inertial manifolds for the kuramoto-sivashinsky equation: analysis and computation. *Physica D*, to appear.

[23] M. S. Jolly, I. G. Kevrekidis, and E. S. Titi. Preserving dissipation in approximate inertial forms for the kuramoto-sivashinsky equation. *J. Dynamics and Differential Equations*, 3:179–197, 1991.

[24] M. Kwak. Finite dimensional inertial forms for the 2d navier-stokes equations. *AH-PCRC prepint 91-30.*

[25] M. Luskin and G. R. Sell. Approximation theories for inertial manifolds. *Mathematical Modelling and Numerical Anal.*, 23:445–461, 1989.

[26] M. Luskin and G. R. Sell. The construction of the inertial manifolds for the reaction-diffusion equations by elliptic reguralization. prepint.

[27] J. Mallet-Paret and G. R. Sell. Inertial manifolds for reaction diffusion equations in higher space dimensions. *J. Amer. Math. Soc.*, 1:805–866, 1988.

[28] M. Marion. Approximate inertial manifolds for reaction-diffusion equations in high spce dimension. *J. Dynamics and Differential Equations*, 1:245–267, 1989.

[29] M. Marion. Approximate inertial manifolds for the pattern formation cahn-hilliard equation. *Mathematical Modelling and Numerical Anal.*, 23:463–488, 1989.

[30] M. Marion. Inertial manifolds associated to partly dissipative reaction-diffusion systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 143:295–326, 1989.

[31] M. Miklavčič. A sharp condition for extistence of an inertial manifold. to appear.

[32] Y. Morita. Reaction-diffusion systems in nonconvex domains: invariant manifold and reduced form. *J. Dynamics and Differential Equations*, 2:69–115, 1990.

[33] Y. Morita and S. Jimbo. Ode's on inertial manifolds for reation-diffusion systems in a singularly perturbed domain with several thin channels. *J. Dynamics and Differential Equations*, to appear.

[34] B. Nicolaenco, B. Scheurer, and R. Temam. Some global dynamical properties of a class of pattern formation equations. *Commum. in Partial Differential Equations*, 14:245–297, 1989.

[35] H. Ninomiya. Inertial manifolds and squeezing properties. *(Survey)*, preprint.

[36] H. Ninomiya. Some remarks on inertial manifolds. *J. Math. Kyoto Univ.*, to appear.

[37] R. Temam. Induced trajectories and approximate inertial manifolds. *Mathematical Modelling and Numerical Anal.*, 23:541–561, 1989.

[38] R. Temam. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. *Applied Mathematics Series vol 68 Springer-Verlag*, 1988.