

四次元から見た unknotting operations II

津田塾大 宮崎 桂

(Katura Miyazaki)

Knot K_0 にある local move を施して K_1 が得られたとき、 K_0 から K_1 への変化は homotopy $h_t: S^1 \rightarrow S^3$ とみなせることが多い。homotopy h_t の“軌跡” $A' = \{(h_t(x), t) \mid x \in S^1, t \in I\} \subset S^3 \times I$ は $K_0 \subset S^3 \times 0$ と $K_1 \subset S^3 \times 1$ を結ぶ immersed annulus in $S^3 \times I$ である。一般に A' は embedding ではないが、適当な操作で自己交差を取り除くと 4 -mfd 内の embedded annulus になる。そこで 4 -mfd 内の surface の性質に関する諸結果を用いると、 K_0 と K_1 の“差異”を見積ることができる。例えば K_0 と K_1 を signature で区別するには次の定理が有効である。

1 Rochlin's genus theorem の relative version

Th 1 [Viro] [Gilmer] M^4 closed oriented 4-mfd \cup B^4 : 4-ball k_2 : knot in ∂B^4 k_2 は $X \equiv M^4 - \text{int} B^4$ で properly embedded oriented surface F をはさめる。 $\xi = [F, \partial F] \in H_2(X, \partial X)$ が自然数 m で割り切れるとき 次の不等式が成立する。

$$m=2 \text{ のとき } \left| \frac{\xi \cdot \xi}{2} - \sigma(X) + \sigma(k_2) \right| \leq h_2(X) + h_1(F)$$

 m が奇素数 p の巾のとき

$$\left| \frac{\xi \cdot \xi (p^2 - 1)}{2p^2} - \sigma(X) + \sigma_p(k_2) \right| \leq h_2(X) + h_1(F)$$

注意 (1) σ_p は次のように定義される Tristram の p -signature.

$z = \exp(2\pi i \times \frac{p-1}{2p})$, $V =$ knot k_2 の Seifert matrix としたとき、 $\sigma_p(k_2)$ は Hermitian 行列 $(1-z)V + (1-\bar{z})V^T$ の signature.

$p=2$ のとき $\sigma_2 =$ 通常の signature と定めこおく。

(2) $X = B^4$ のときはよく知られた不等式

$$|\sigma_p(k_2)| \leq h_1(F) \text{ になる。}$$

- (3) $\partial X = \emptyset$, $\partial F = \emptyset$ のとき、 $\sigma(K)$ or $\sigma_p(K) = 0$ とすると、定理1は Rochlin's genus theorem (c.f. [安原]定理3) にほかならない。つまり定理1は Rochlin's genus th の relative version といえる。
- (4) P. Gilmer は さらに一般に、 $F \cap \partial X$ が link になる場合も考えている。(Murasugi-Tristram 不等式の拡張)

2 Signature の変化

[安原] は 素数 p に対し local move $\#^p$ を定義している。前節の Th1 を用いて、 $\#^p$ -move での signature の変化を評価してみる。

Prop 2 $K_0 \xrightarrow{\#^p} K_1$ ($\#^p$ -move を1回施す) とき、

[安原] で定義された $\varphi_{(K_0, p)}(K_1)$ を $\varphi_{K_0}(K_1)$ と略すと 次の不等式が成立する。

$$p=2 \text{ のとき } \quad |\varphi_{K_0}(K_1) - \sigma(K_1) + \sigma(K_0)| \leq 2$$

$$p \text{ が奇数のとき } \quad \left| \frac{p^2-1}{p^2} \varphi_{K_0}(K_1) - \sigma_p(K_1) + \sigma_p(K_0) \right| \leq 2$$

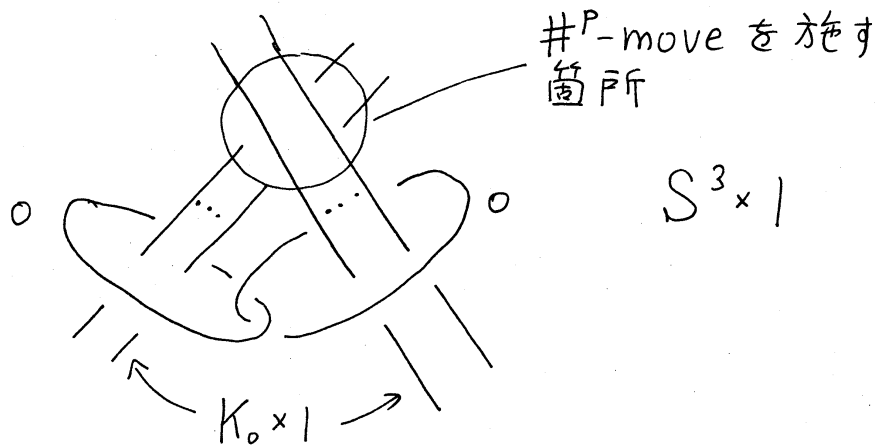
注意 $\#$ -unknotting operation は、 $\varphi = \pm 4$ となる $\#^2$ -move の一例。このとき $|\pm 4 - \sigma(K_1) + \sigma(K_0)| \leq 2$ 。
 path move は $\varphi = 0$ となる $\#^2$ -move の一例。
 よって $|\sigma(K_1) - \sigma(K_0)| \leq 2$ 。
 これら $\#$ -unknotting operation と path move

の signature の変化公式は、各々 [Murakami] [Wong] によつて Seifert surface を用いて求められている。

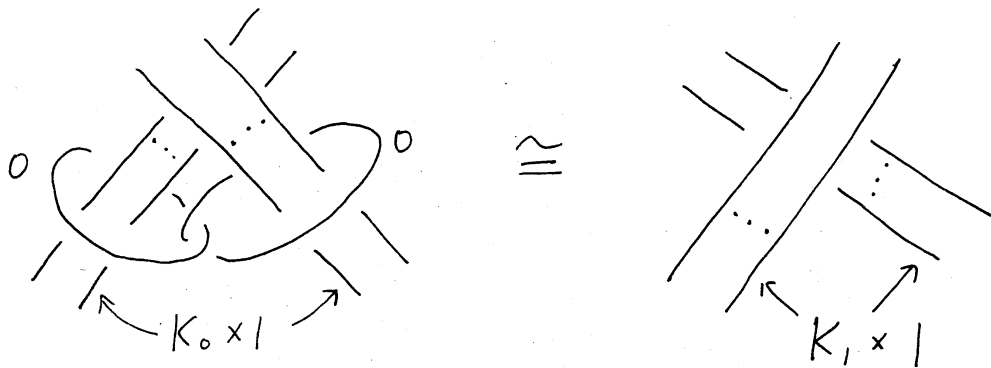
Proof of Prop 2

$S^3 \times I$ の向きを $S^3 \times 1$ に S^3 の標準的向きが導かれるように定めておく。 $A = K_0 \times I$ とおく。

$M^4 \equiv S^3 \times I \cup (\bigcup_{i=1}^2 h_i^2)$ ここで 2-handle h_i^2 は $S^3 \times 1$ の下図の位置に 0-framing でつける。



[安原] の Fig 2 が示すように 3次元球面内の knot としては



また明らかに $M^4 \cong S^2 \times S^2 - \text{int}(B_0^4 \amalg B_1^4)$.

向きまで考えにいれると、 $\partial M^4 \cong -\partial B_0^4 \amalg -\partial B_1^4$

なので結局 $A \cap \partial B_0^4 = K_0 \subset \partial B_0^4$

$A \cap \partial B_1^4 = -K_1' \subset \partial B_1^4$ である。


$\xi = [A, \partial A] \in H_2(M, \partial M)$ は p でわりきれ

$\xi \cdot \xi = 2 \varphi_{K_0}(K_1)$.

γ を A 上の arc で ∂A の components をつなぐものとする。

$X^4 \equiv M^4 - \text{int} N(\gamma)$ $D \equiv A - \text{int} N(\gamma)$ とおくと、

$$\begin{cases} X^4 \cong S^2 \times S^2 - \text{int} B^4 \\ \partial D = K_0 \# -K_1' \text{ in } \partial B^4 \\ D \cdot D = 2 \varphi_{K_0}(K_1) \end{cases}$$

ここに Th 1 を使えば Prop 2 が得られる。 

Twisting についても、 p -signature の公式を Th 1 を用いて導くことは可能。しかしこの場合は、次の Litherland による評価式の方が精密である。

Th 3 l を trivial knot で $lk(K_0, l) = \omega$ とする。

[Litherland] l に沿う $\frac{1}{n}$ -Dehn surgery の結果 K_0 から得られる knot を K_1 と呼ぶ。奇素数 p が ω をわりきるとき、

$$\left| \frac{(p^2-1)n\omega^2}{2p^2} - \text{sgn } n - \sigma_p(K_1) + \sigma_p(K_0) \right| \leq 1.$$

ω が偶数のときは、 $\frac{p^2-1}{2p^2}$ を $\frac{1}{2}$ に、 σ_p を σ に変えた式が成立する。

注意 Th 3 も Th 1 も branched covering space に G -signature theorem を用いて証明するというアイデアは共通している。ただ、Th 1 の方が twisting に限らない状況にも適用できる分だけ、Th 1 を用いて twisting と signature の関係式を導くと、Th 3 の評価より甘くなってしまう。

Th 3 の系として

Cor 4 ($\omega \geq 3$) または ($|n| \geq 2$ かつ $\omega = 2$) のとき K_1 と K_0 は (異なる p -signature を持つので) cobordant ではない。

3. $\#^p$ -unknotting number が 1 でない knot

[安原] で 証明なしに述べられているように、 $\#^p$ -move は unknotting operation である。Prop 2 からわかるように p が大きくなると $\#^p$ -move の前後の p -signature の変化も大きくなりうる。よって与えられた knot の $\#^p$ -unknotting number はある p について 1 でなくとも、と大きい p については 1 になるかもしれない。ここでは、どんな $\#^p$ についても unknotting number が 2 である“固い”knot があることを示す。

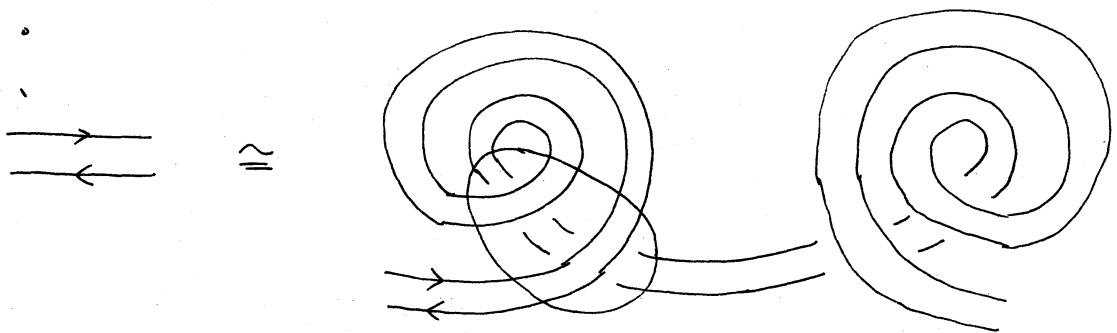
まず $\#^p$ -move が unknotting operation であることをみておこう。

Prop 5 \forall prime p $\#^p$ は unknotting operation である。

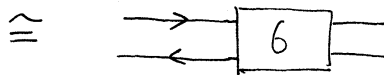
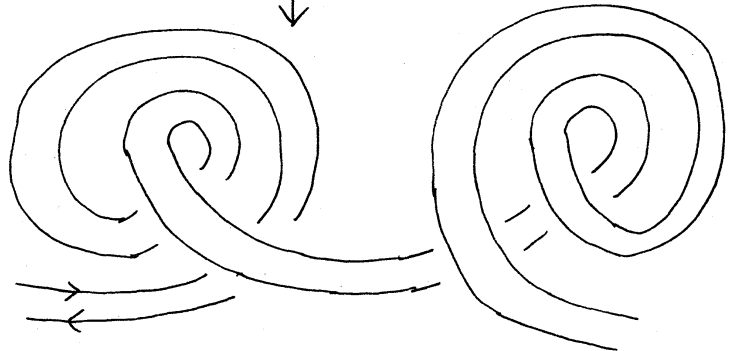
Proof $p=2$ のときは $\#^p$ -move は $\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \uparrow \\ \hline \rightarrow \\ \hline \downarrow \downarrow \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|} \hline \uparrow \uparrow \\ \hline \downarrow \downarrow \\ \hline \end{array}$

を含むので unknotting operation. よって $p: \text{odd}$ とする。

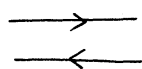
さて、



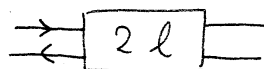
$\#^p$



よって一般に $\forall l$

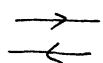


$\exists \#^p$

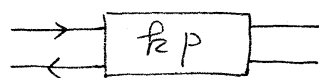


($\#^p$ -move 1回)

次に $\forall k, \#^p$ -move 1回で



を



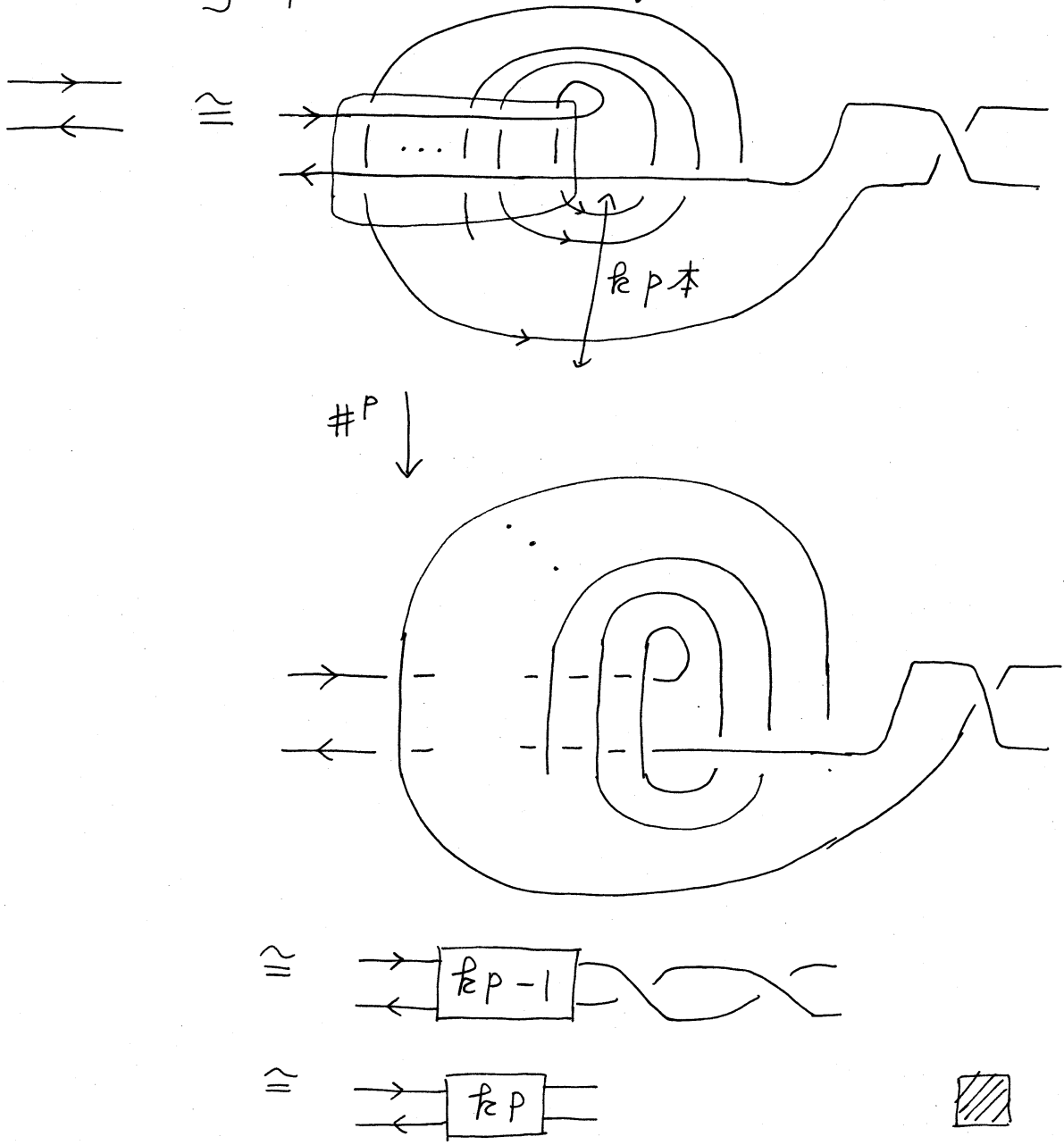
に変え

られること(*)を示す。

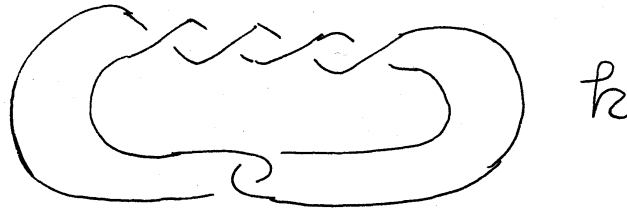
前に示した \cong とあわせると、 $p = \text{odd}$ のとき

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \xrightarrow{\exists \#^p} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \xrightarrow{\exists \#^p} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \boxed{\text{任意}} \quad \text{となる.}$$

特に crossing change $\begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array}$ が 2 回の $\#^p$ -move で実現できるので、 $\#^p$ は unknotting operation とわかる。では (*) を確かめよう。



k_2 を下図のような -2 -twisted doubled knot とする.



Prop 6 $k_2 \# k_2$ の $\#^p$ -unknotting number は任意の p について 2 である.

Proof $\#^p$ -move 1 回で k_2 を trivial knot にできる (このとき $\varphi_{(k_2, p)}(0) = 0$) ので、 $k_2 \# k_2$ の $\#^p$ -unknotting number = 2 or 1.

"= 1" とすると 次のような列が得られる.

$$k_2 \# k_2 \xrightarrow{\#^p} 0 \xrightarrow{\#^p} k_2 \xrightarrow{\#^p} k_2 \# k_2$$

[安原] 定理 6 を用いて $\varphi_{(k_2 \# k_2, p)}(0) = 0$ を示す.

$p \neq 2$ のときは定理 6(ii) により

$$\varphi \equiv \varphi_{k_2 \# k_2}(0) + \varphi_0(k_2) + \varphi_{k_2}(k_2 \# k_2) = 0$$

しかし $\varphi_0(k_2) = \varphi_{k_2}(k_2 \# k_2) = 0$ なので $\varphi_{k_2 \# k_2}(0) = 0$.

$p = 2$ のときは定理 6(i) より

$$-6 \leq \varphi \leq 6 \quad \text{かつ} \quad \varphi \equiv 0 \pmod{8}$$

$\therefore \varphi = 0$ よって前と同じように $\varphi_{k_2 \# k_2}(0) = 0$.

Prop 2 を $k \# k \xrightarrow{\#^P} 0$ に使うと $|\sigma_p(k \# k)| \leq 2$.
 よって σ_p の加法性により $|\sigma_p(k)| = 0, 1$. しかし
 直接計算すると $\sigma_p(k) = -2$ となるので矛盾。 \square

- 注意
1. $k \# k$ の通常の unknotting number も 2.
 2. 上の議論の key point であった [安原] 定理 6
 も 4次元多様体の定理の帰結である。

参考文献

- [Gilmer] P.Gilmer; Configurations of surfaces in 4-manifolds,
 Trans.AMS 264(1981), 353-380.
- [Litherland] R.Litherland; Surgery on knots in solid tori,
 Proc.London.Math.Soc. 39(1979), 130-146.
- [Murakami] H.Murakami; Some metrics on classical knot, Math.Ann.
 270(1985), 35-45.
- [Viro] O.Viro; Link types in codimension-2 with boundary,
 Uspeh Mat.Nauk 30(1975), 231-232.
- [Wong] Y.L.Wong; Band-passes and the Arf invariant of a knot,
 thesis, University of California, Berkeley, 1988.
- [安原] 安原 晃; 四次元から見た unknotting operations I, 本講究録.