

## Link types in solid tori (II)

河野正晴 (神戸大教養)

### 1 introduction and result

定義で始る文章は良くないとクヌースの本に書いてありましたが, 教えに従わずに最初に記号を定義します.  $V$  を oriented solid torus とし,  $k$  をそのなかの oriented knot とします.  $V$  の oriented longitude-meridian system はすでに一つ指定されているとします.  $C$  を向き付けられた 3 次元球面  $S^3$  のなかの oriented knot としたとき, 整数  $n$  を一つ与えると  $V$  から  $U(C)(=U)$  への向きを保つ同相写像  $f$  で  $f_*([l_V]) = [l_U] + n[m_U]$  となるものが存在します. ただし,  $[ ]$  は homology class.  $U(C)$  は  $C$  の正則近傍で  $l_V, l_U$  は  $V, U$  の longitude,  $m_U$  は  $U$  の meridian とします. このとき  $C(k, n) = f(k)$  と定義し,  $n = 0$  のとき  $C(k) = C(k, 0)$  と表すことにします.

我々の興味は  $C(k, n)$  から  $C, k, n$  などの情報を再現できるかということにあります. 具体的に問題の形で書くと次の様になります.

問題 1  $C(k, m) \cong C'(k, n)$  ならば  $C \cong C'$  か.

問題 2  $C(k, m) \cong C(k, n)$  ならば  $m = n$  か.

問題 3  $C(k, m) \cong C(k', m)$  ならば  $k \cong k'$  か.

ここで ' $\cong$ ' は向きもこめての same type を表すことにします.

これらについては [1],[2],[3],[5] 等で調べられています. 問題 1 については

『 $C, C'$  が non-trivial で  $Wind_V(k) \neq 0$  のとき  $C(k, m) \cong C'(k, n)$  ならば  $C \cong C'$ 』

等の結果が得られています. ここで  $Wind_V(k)$  は winding number で  $[k] =$

$Wind_V(k)[l_V]$  で定義されます.

問題2については

『 $C$ が non-trivial で  $\omega_V(k) \geq 2$  のとき  $C(k, m) \cong C(k, n)$  ならば  $m = n$ 』等が得られています. ここで  $\omega_V(k)$  は wrapping number で  $V$  の meridian disk と knot  $k$  の幾何学的交差数を表します. 問題3については否定的な例が知られているだけで肯定的な結果はほとんど得られていません (詳しくは [1],[2],[3],[5] を).

またこの議論は link に拡張する事ができます.  $\mathcal{V} = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_\mu$  を oriented solid tori とし,  $k_i$  を  $V_i$  の oriented knot とし,  $\ell = k_1 \cup \dots \cup k_\mu$  とします.  $V_i$  ( $i = 1, \dots, \mu$ ) の oriented longitude-meridian system はすでに一つ指定されているとします (link の longitude はここでは各 component ごとに knot と見た時のそれとしておきます).  $C = C_1 \cup \dots \cup C_\mu$  を 3次元球面  $S^3$  のなかの oriented link とし, ベクトル  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_\mu)$  ( $n_i$  は整数) を一つ与えると  $\mathcal{V}$  から  $U(C)$  への向きを保つ同相写像  $f$  で  $f_*([l_{V_i}]) = [l_{V_i}] + n[m_{V_i}]$  となるものが存在します (ここで  $U_i = U(C_i)$ ). このとき  $C(\ell, \mathbf{n}) = f(\ell)$  と定義します.

link の場合の問題1, 2は [4] で調べられています. ここでの結果は問題3についてです. 次が成立します.

**定理** 各  $C_i$  は non-trivial とする ( $i = 1, \dots, \mu$ ).  $C$  は non-splittable で  $\mu \geq 2$ .  $Wind_{V_i}(k_i) > 0$ ,  $Wind_{V_i}(k'_i) > 0$  ( $i = 1, \dots, \mu$ ) のとき  $C(\ell) \cong C(\ell')$  ならば  $\ell \cong \ell'$ .

knot の場合には肯定的な結果があまり得られないのに, link にするといえるというところが面白いなと思っています.

## 2 定理の証明

定理を証明するため次の補題を必要とします. 証明は [4] を見てください.

**補題**  $U = U_1 \cup \dots \cup U_\mu$  と  $U' = U'_1 \cup \dots \cup U'_\mu$  は  $S^3$  のなかの solid tori とします. ただし  $\mu \geq 2$  とします.  $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$  を non-splittable link で  $K_i \subset U_i$ ,  $K_i \subset U'_i$  を満たしているとします. このとき  $L$  を止めた  $S^3$  のアイソトピーで各  $i$  について次のいずれかにできる.

1.  $U'_i \subset U_i$ .
2.  $U_i \subset U'_i$ .
3.  $U_i$  と  $U'_i$  の共通の meridian disks  $D_1, D_2$  が存在して,  $U'_i - (D_1 \cup D_2)$  の或る成分の closure である 3-ball  $Y$  のなかで  $U_i - (D_1 \cup D_2)$  のある成分の closure である 3-ball  $X$  が knotted ball pair になっている. (See Fig. 1).
4.  $U_i$  と  $U'_i$  の core が Hopf link になっていて  $k_i$  を含む  $U_i \cap U'_i$  の成分  $W$  が solid torus でその core が  $U_i$  では  $(p,q)$ -cable knot で  $U'_i$  では  $(p,q)$ -cable knot になっている. ただし,  $p$  と  $q$  は  $\pm 1$  ではない.
5.  $U_i$  の core と  $U'_i$  の core が一致していて  $k_i$  を含む  $U_i \cap U'_i$  の成分  $W$  が solid torus でその core が  $U_i$  でも  $U'_i$  でも  $(p,q)$ -cable knot になっている. ただし,  $p$  は  $\pm 1$  ではない.

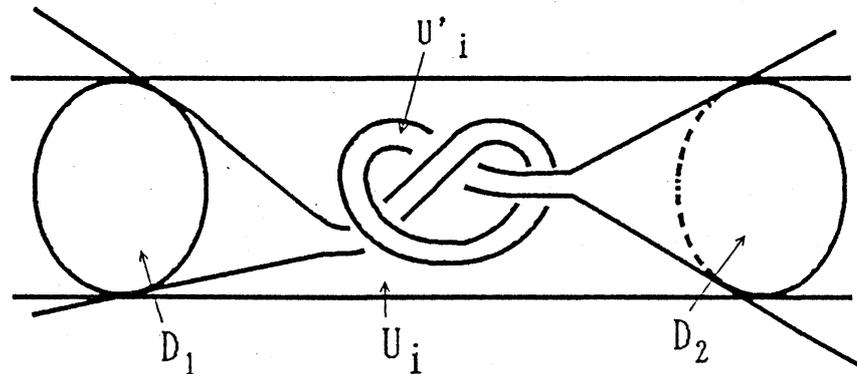


Figure 1

[4] の補題の証明を見ると場合 3 のとき次が証明されている事が分ります.  $U_i$  には disjoint な  $2k = \#(\partial U_i \cap \partial U'_i)$  個の meridian disks  $D_1, \dots, D_{2k}$  が存在して,  $\partial D_j (j = 1, \dots, 2k)$  は  $U'_i$  の meridian であって,  $\partial U'_i - \cup_{j=1}^{2k} D_j$  の成分の closure を  $A$  とするとき,  $\partial A$  の一つの成分が  $D_j$  上にある時他の成分は  $D_{j \pm 1} \pmod{2k}$  上にある. そしてそのうちの 2 個の disk について場合 3 の状況になっている.

以下定理の証明です。

$U_i = U(C_i)$ ,  $U = U_1 \cup \dots \cup U_\mu$ と置きます.  $f$ を  $V$ から  $U$ への同相写像とし,  $f(k_i) = K_i$ ,  $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu (= C(\ell))$ とします.  $L$ と  $C(\ell')$ は同じタイプなので  $S^3$ のアイソトピー  $g$ が存在して,  $g(K_i) = f(k'_i)$ となります ( $i = 1, \dots, \mu$ ). このとき  $U'_i = g(U_i)$ ,  $U' = U'_1 \cup \dots \cup U'_\mu$ とします. これに補題を適用して, 場合1から5までのどれかの状態になっているとします.

場合1のとき,  $C_i$ が non-trivial ということから  $\partial U_i$ と  $\partial U'_i$ が平行でなければなりません. このときは  $U_i = U'_i$ とできるので

$$(V_i, k_i) \cong (U_i, K_i) \cong (U'_i, K_i) \cong (V_i, k'_i)$$

より定理は成立します. ただし, ここで  $(V, K) \cong (V', K')$ は  $V$ から  $V'$ への向きを保つ同相写像  $h$ で longitude を longitude に写し,  $h(K) = K'$ となるものが存在する事を言います. 場合2は1と同じにできます.

場合4は  $C_i$  non-trivial ということから起こりません. 場合5のとき link の他の成分を止める事をしなければ  $U_i = U'_i$ とできるので1と同様にできます.

よって以下場合3を証明します. そのために記号をいくつか導入しておきます.  $S^3$ のなかの solid torus  $U$ に対し  $c(U)$ でその core を表します. 向きは longitude の向きから決まるものを選びます.  $S^3$ の knot  $\alpha$ に対し solid torus  $V$ の knot  $\hat{\alpha}$ とは  $\alpha$ を  $V$ に local に入れたとき,  $V$ の core  $c(V)$ との connected sum でつくられる knot とします.

ここで  $K = K_i$ ,  $U = U_i$ ,  $U' = U'_i$ とします.  $D_1, \dots, D_{2k}$ を補題の後に述べた  $U$ の meridian disk とし, 場合を2つに分けます.

Case 1: すべての  $j(j = 1, \dots, 2k)$ について  $D_j \subset U'_i$

Case 2: そうでない, 次の図2の様な事が起きている.

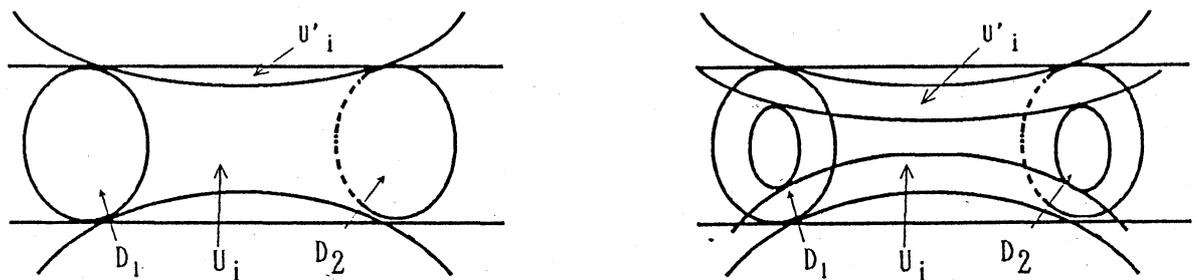


Figure 2

まず, Case 1 の場合を考えます. この場合は図 3 の様に  $U$  と  $U'$  は入れ子になっています.

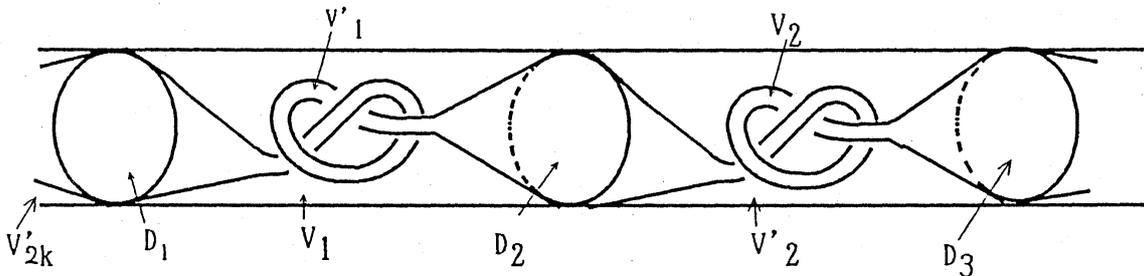


Figure 3

$cl(U - \cup_{j=1}^{2k} D_j)$  を順に  $V_1, \dots, V_{2k}$ ,  $cl(U' - \cup_{j=1}^{2k} D_j)$  を順に  $V'_1, \dots, V'_{2k}$  とします. ただし,  $V'_{2j-1} \subset V_{2j-1}$ ,  $V_{2j} \subset V'_{2j}$  ( $j = 1, \dots, k$ ) となるように選んでおきます. また  $l_U, l_{U'}$  を適当に変形して  $l_U \cap \partial D_j = l_{U'} \cap \partial D_j$  ( $j = 1, \dots, 2k$ ) となるようにしておきます.  $U \cup U'$  の core の knot を  $\gamma$  とする (向きは  $l_U$  ないしは,  $l_{U'}$  でいれる—仮定よりどちらも同じ向き).  $\partial V_j \cap l_U = l_j$ ,  $\partial V'_j \cap l_U = l'_j$  とし ( $j = 1, \dots, 2k$ ),  $\alpha_j = l'_{2j-1} \cup (-l_{2j-1})$ ,  $\beta_j = l_{2j} \cup (-l'_{2j})$ , とします ( $j = 1, \dots, k$ ). ただし,  $-\alpha$  は向きを反対にした  $\alpha$  とします.  $\tilde{W} = U \cap U', W = \tilde{W} - \dot{U}(\partial \tilde{W}, \tilde{W})$  とおくと

$$C(W) \cong \gamma \# \alpha_1 \# \beta_1 \# \dots \# \alpha_k \# \beta_k$$

$$C(U) \cong \gamma \# \beta_1 \# \dots \# \beta_k$$

$$C(U') \cong \gamma \# \alpha_1 \# \dots \# \alpha_k$$

なので  $c(U) \cong c(U')$  より  $\alpha_1 \# \dots \# \alpha_k \cong \beta_1 \# \dots \# \beta_k$ . よって

$$(U, c(W)) \cong (V, \beta_1 \# \dots \# \beta_k) \cong (V, \alpha_1 \# \dots \# \alpha_k) \cong (U', c(W))$$

よって,  $(U, K) \cong (U', K)$  が成立します.

次に Case 2 を考えます. このときは  $\#(\partial U \cap \partial U')$  についての帰納法で示します. 場合を更に2つに分けます.

Subcase A: 図2の左が起きている.

Subcase B: 図2の右が起きている.

Subcase A の場合は,  $U \cap U'$  の成分で  $\partial U$  と  $\partial U'$  とも交わるものを  $Z$  とおきます.  $D_1, D_2$  を共通の meridian disk で  $Z$  と交わるものとし,  $U, U'$  の longitude  $l_U, l_{U'}$  を動かして  $l_U \cap \partial D_i = l_{U'} \cap \partial D_i$  ( $i = 1, 2$ ) とし,  $\alpha = l_1 \cup l_2$  (向きは  $l_1$  ないし  $l_2$  から決まる向きを入れておきます—仮定よりどちらも同じ向きを定義する).  $\tilde{W} = U - \dot{Z}, W = \tilde{W} - \dot{U}(\partial \tilde{W}, \tilde{W}), \tilde{W}' = U' - \dot{Z}, W' = \tilde{W}' - \dot{U}(\partial \tilde{W}', \tilde{W}')$  とおくと,  $c(W) = c(U) \# \alpha, c(W') = c(U') \# \alpha$  かつ

$$(U, c(W)) \cong (V, \hat{\alpha}) \cong (U', c(W'))$$

また  $\alpha$  は 3-ball のなかにあり link の他の成分に影響を与えないので帰納法の仮定より  $(W, K) \cong (W', K)$ . 以上により  $(U, K) \cong (U', K)$ .

Subcase B の場合は図2右の様な部分が存在します. つまり,  $U$  の meridian disk  $D_1, D_2$  が存在して,  $U - (D_1 \cup D_2)$  の一つの成分の closure ( $X$  とする) のなかで  $U' \cap X$  の成分で最も  $\partial U$  側にある成分 ( $Z$  とする) は  $\partial U$  と2個の loop で交わります.

このとき  $D_2$  を取替える事により  $Z$  は annulus と線分の直積と同相だとしてよく,  $Y = U(\partial U \cap X), W' = (U' - \dot{Z}) \cup Y$  と置くと,  $c(U') \cong c(W')$  かつ  $(W', K) \cong (U', K)$  が成立します.  $\#(\partial U \cap \partial W') < \#(\partial U \cap \partial U')$  なので帰納法の仮定より  $(U, K) \cong (W', K)$ . よって  $(U, K) \cong (U', K)$  で証明が終わります.

## 参考文献

- [1] M. Kouno, and K. Motegi, On satellite knots, preprint
- [2] M. Kouno, K. Motegi and T. Shibuya, Twisting and knot types, J. Math. Soc. Japan, 44(1992), 199-216
- [3] M. Kouno, K. Motegi and T. Shibuya, Behavior of knots under Twisting, to appear in Advanced Studies in Pure Math. Vol.20

- [4] M. Kouno and T. Shibuya, Link types in solid tori, Kobe J. Math.,8(1991),197-205
- [5] T. Soma, On preimage knots in  $S^3$ ,Proc. Am. Math. Soc., 100(1987),589-592