

Seifert circles for surface braids

大阪市立大学理学部・学振特別研究員
鎌田 聖一 (Seiichi Kamada)

R^3 内の有向結び目・絡み目に対し、その Seifert 曲面を構成する方法として Seifert のアルゴリズムが知られている。 R^4 内の有向閉曲面に対する Seifert 多様体の構成法は、例えば河内-渋谷-鈴木 [5] による motion picture method を用いたものがある。最近 Carter-斎藤 [1] は R^4 内の有向閉曲面に対し、Seifert のアルゴリズムに類似した Seifert 多様体の構成法を与えた。我々は R^4 内の閉 2 次元グレイドに対して、Seifert 多様体を構成する方法を与える。 R^4 内の有向閉曲面は常に閉 2 次元グレイドに変形できる [3] ので、これは R^4 内の有向閉曲面に対してその Seifert 多様体を構成する一つの方法である。

2 次元グレイドはチャートにより表わされるが、我々はこのチャートを用いて Seifert 多様体をハンドル分解により与える。

注意. Carter-斎藤の構成法もその Seifert 多様体にある意味でハンドル分解を与えているが, それは虫食い穴のあるハンドル体に 1-ハンドルと 2-ハンドルを接着する形式となっている。しかし, 彼らの方法は与えられた R^4 内の有向閉曲面に直接 (ただし, それが R^3 への正則な射影を与えている時) に適用できるという長所がある。我々の構成法は彼らの方法の特殊なケースとして解釈できることを注意する。

チャート及びそれが表わす 2次元ブレイドの定義は [2] [4] を参照。

構成法を述べる前にここで用いられる用語の説明をする。

F を 4次元多様体 W 内に埋め込まれた有向曲面とする。 h を W に埋め込まれた 3次元球又はソリッドトーラスで, $F \cap h = F \cap \partial h$ かつ 次の (1)(2)(3) のいずれかを満たすとき, h は F に 1-ハンドル ((1)のとき), 2-ハンドル ((2)のとき), ラウンドハンドル ((3)のとき) として接着しているという。

(1) h は 3次元球で $F \cap h$ は ∂h 上の 2枚の 2次元球である。

(2) h は 3次元球で $F \cap h$ は ∂h 上の 1枚の アニュラスである。

(3) h はソリッドトーラス $S^1 \times I \times I$ で, $F \cap h$ は $S^1 \times I \times \partial I$ である。

W 内の曲面 $F' = \mathcal{C}(F \cup \partial h - F \cap h)$ を F から h に沿って手術して得られた曲面という。(1) 及び (3) のとき F' は向きつけ不可能となる場合もあるが, ここでは向きつけ可能となる場合のみを考え, F' には F より誘導される向きを入れる。

M を有向 n 次元多様体とする。 M_0 を M 内の有向 n 次元多様体とし, $\partial M_0 = F$ とする。 M_0 の向きが M の向きに一致し, $\mathcal{C}(M - M_0) = h$ が n 次元球又はソリッドトーラスで上の (1)(2)(3) のいずれかを満たすとき, h は M_0 に接着する 1-ハンドル (1) のとき, 2-ハンドル (2) のとき, ラウンドハンドル (3) のとき であると呼ぶ。 M は M_0 に h を接着して得られた多様体であるという。

M を M_0 にラウンドハンドルを一つ接着して得られた多様体とするとき, M は M_0 に 1-ハンドルを一つ接着し, その後 2-ハンドルを一つ接着して得られる。

m を自然数とする。 $B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq m+1, -1 \leq y \leq 1\}$ とし, 点 $z_i = (i, 0) \in \mathbb{R}^2$, 点 $\bar{z}_i = (i, -1) \in \mathbb{R}^2$ ($i=1, 2, \dots, m$) とする。 A_i を z_i と \bar{z}_i を結ぶ線分 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=i, -1 \leq y \leq 0\}$, $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$, $X_m = \{z_1, \dots, z_m\}$, $\bar{X}_m =$

$\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$, $D^2 = \{(w, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq w \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ とする。

F を $B^2 \times D^2$ 内の 2次元「レイド」とする。定義より ∂D^2 上の各点 p に対し、 $F \cap B^2 \times \{p\} = X_m \times \{p\}$ が成立する。さて、 $B^2 \times D^2$ 内の閉曲面 \hat{F} を次の様に定める。

$$\hat{F} = F \cup \bar{X}_m \times (\text{int} D^2) \cup A \times \partial D^2.$$

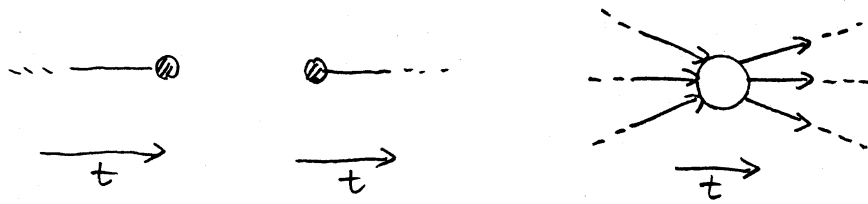
\hat{F} に F から誘導される向きを入れる。

補題 1 $B^2 \times D^2$ を \mathbb{R}^4 内へ埋め込んだとき、 \hat{F} は F の closure に \mathbb{R}^4 内でアンゼエントアイソトポックである。

証明は省略する。

我々は上の \hat{F} が張る 3次元多様体を $B^2 \times D^2$ の中に構成する。

F を表わすチャートを Γ とする。 Γ を D^2 内のアンゼエントアイソトポーにより t 座標に関して Γ は「モース的」とする。すなわち、 $p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $p_2(w, t) = t$ とし、 p_2 の Γ への制限を考えると、これが Γ の頂点以外 (1次元多様体) では普通の意味でのモース関数であり、頂点の近傍では次の様であるとする。



Case 1 P が空のとき。この時 F は自明な二次元ブレイド $X_m \times D^2$ である。

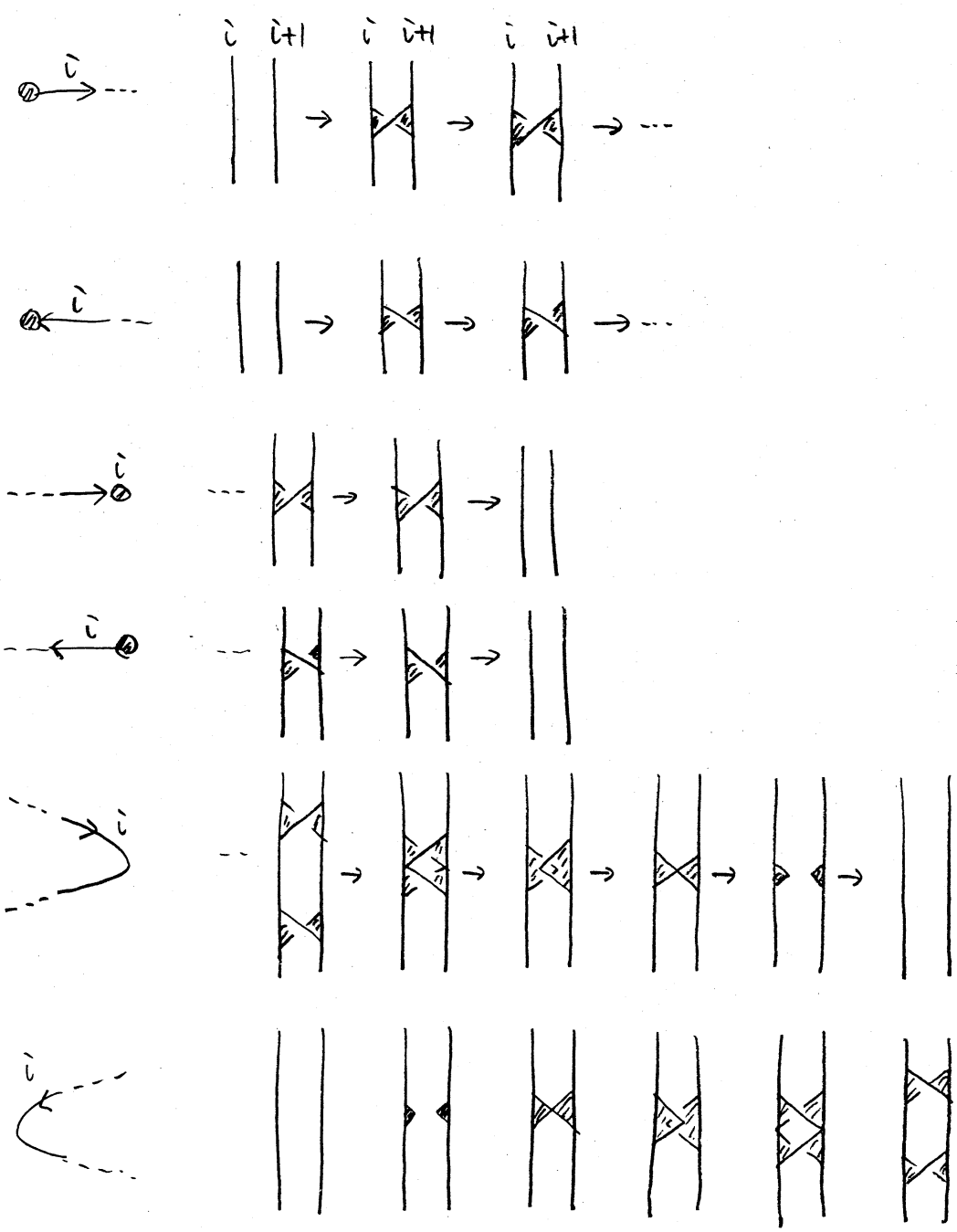
$$\begin{aligned} \partial(A \times D^2) &= \partial A \times D^2 \cup A \times \partial D^2 \\ &= X_m \times D^2 \cup \bar{X}_m \times D^2 \cup A \times \partial D^2 \\ &= \hat{F} \end{aligned}$$


であるから、 $M_1 = A \times D^2$ が求める 3次元多様体である。

(M_1 は m 個の 3次元球に同相。)

Case 2 P が ribbon (P は free edge と loop のみから成る) のとき。

F は自明な二次元ブレイド $F_1 = X_m \times D^2$ に 1-ハンドルとラウンドハンドルをいくつか接着し、それによって F_1 を手術することにより得られる。ここで用いる各 1-ハンドルは free edge に、各ラウンドハンドルは loop に対応して次のように構成される。

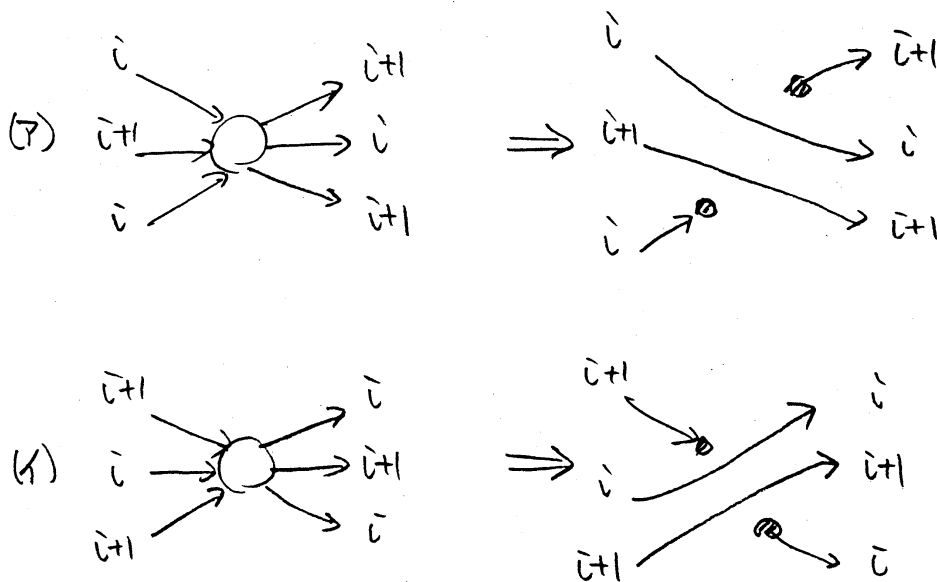


と  については省略する。

M_1 を Case 1 の 3次元多様体 $A \times D^2$ とし、 h_1, \dots, h_s を上の様に構成された free edge に対応する 1-ハンドルとし、 r_1, \dots, r_t を loop に対応するラウンド 1-ハンドルとする。ここで s は Γ の free edge の数、 t は loop の数である。

$M_2 = M_1 \cup \bigcup_{i=1}^s h_i \cup \bigcup_{j=1}^t r_j$ が求める 3次元多様体である。

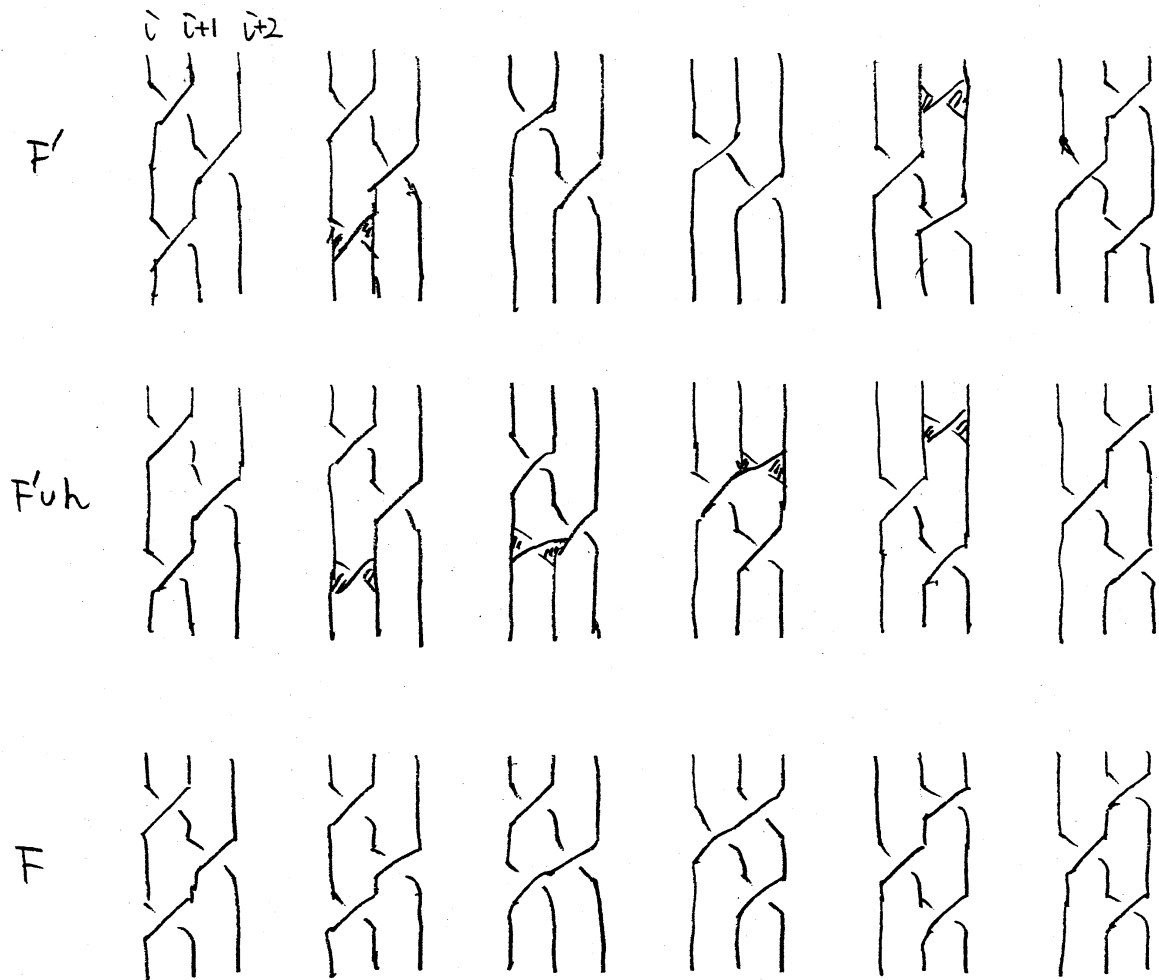
Case 3 一般の場合。 Γ は白の頂点をいくつか持つ。各白の頂点を次の様に置き直して得られたチャート Γ' とする。(Γ' は白の頂点を持たない、すなわち ribbon である。)



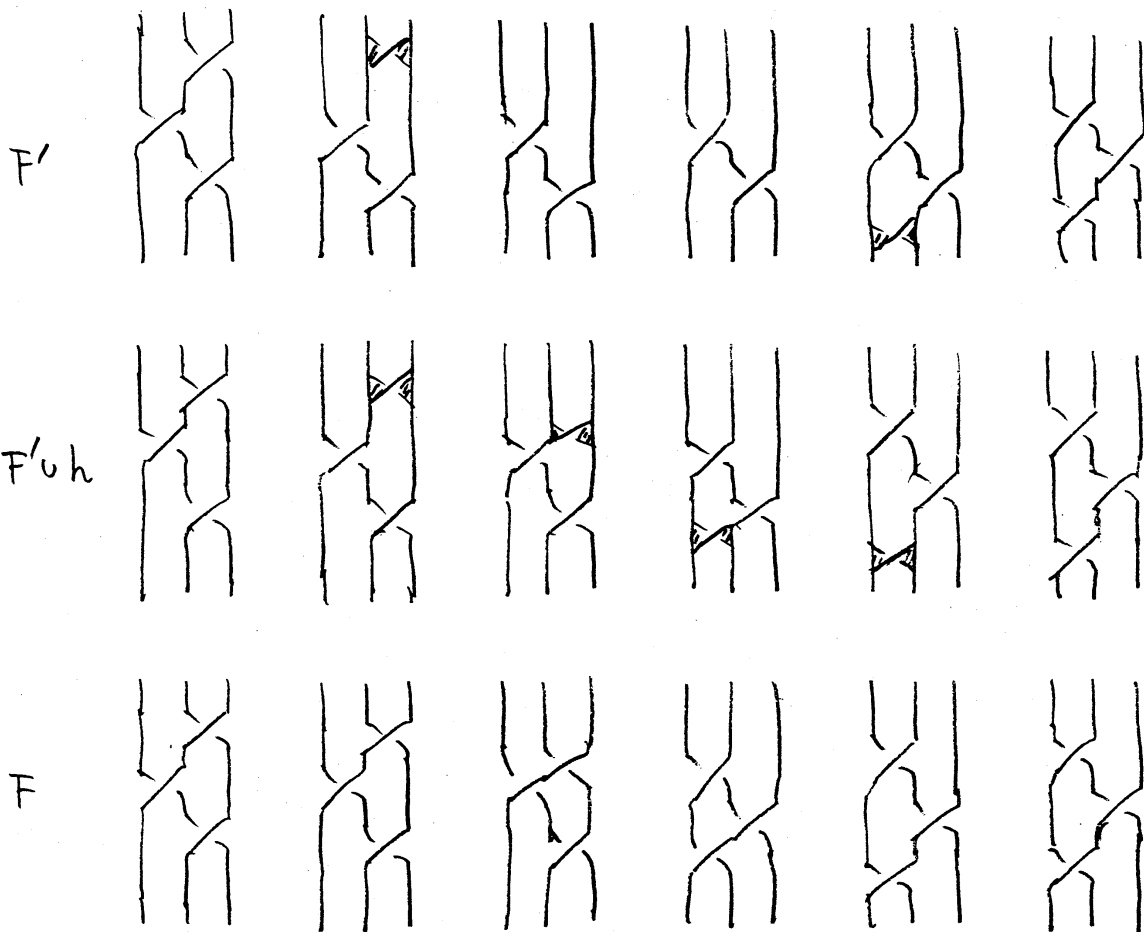
Γ' が表わす 2次元ブレイドを F' とする。 Γ' に対して Case 2 の様に \hat{F}' が張る 3次元多様体 M_2 を構成せよ。

さて、 F は F' に白の頂点に対応する位置に次の様に2-ハンドル
 を接着して手術することにより得られる。

(ア)の場合。



(1) の場合。



この 2-ハンドル h は M_2 に対し 2-ハンドルとして
 接着していることに注意せよ。

h_1^2, \dots, h_u^2 をこれらの 2-ハンドルとする。ここで u は
 Γ の白の頂点の数である。

$$M_3 = M_2 \cup \bigcup_{k=1}^u h_k^2 \quad \text{が求める 3次元多様体である。}$$

この構成法により次が示された。

定理 P を 2次元グレイド F を表わす 4ヤートとする。
 Case 3 の様に P から 白の頂点をとり除いて得られる 4ヤートを
 P' とせよ。 s を P' の free edge の数, t を P' の loop の数, u
 を P の 白の頂点の数とするとき, \hat{F} は 次の分解を持つ 3次元
 多様体 M を $B^2 \times D^2$ 内に張ることができる。

$$M \cong (m \text{ 個の } 0\text{-ハンドル}) \cup (s \text{ 個の } 1\text{-ハンドル}) \cup \\ (t \text{ 個の ラウンドハンドル}) \cup (u \text{ 個の } 2\text{-ハンドル})。$$

参考文献

- [1] J. S. Carter and M. Saito, A Seifert algorithm for knotted surfaces, preprint.
- [2] S. Kamada, Surfaces in R^4 of braid index three are ribbon, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 1 (1992) 137-160.
- [3] S. Kamada, A characterization of groups of closed orientable surfaces in 4-space, preprint.
- [4] S. Kamada, 2-dimensional braids and chart descriptions, preprint.
- [5] A. Kawauchi, T. Shibuya and S. Suzuki, Descriptions on surfaces in four-space, II, *Math. Sem. Notes, Kobe Univ.* 11 (1983) 31-69.